

Sonder la structure nucléaire avec des nucléons

Eric Bauge

Commissariat à l'Energie Atomique
Centre DAM Ile-de-France
Service de Physique Nucléaire
Bruyères-le-Châtel
91297 Arpajon CEDEX

Résumé

L'objet de ce cours est de montrer comment la diffusion de nucléons peut être utilisée pour sonder la structure des noyaux cibles et comment interpréter les observables de diffusion de nucléons en termes de structure nucléaire à l'aide de potentiels optiques microscopiques. Pour cela, après un bref exposé des particularités inhérentes au problème de la diffusion de nucléons sur les noyaux et quelques rappels de théorie de la diffusion, l'essentiel du cours sera consacré à la construction de potentiels optiques dans lesquels l'information de structure des noyaux cibles est convoluée avec une interaction effective. Plusieurs exemples de construction de potentiels optiques microscopiques seront donnés.

Abstract

The goal of this lecture is to show how nucleon scattering can be used to probe the structure of target nuclei, and how nucleon scattering observables can be interpreted in terms of nuclear structure using microscopic optical potentials. After an brief overview of the specificities of nucleon-nucleus scattering, and a quick reminder on scattering theory, the main part of this lecture will be devoted to the construction of optical potentials in which the target nuclei structure information is folded with an effective interaction. Several examples of such microscopic optical model potentials will be given.

Table des matières

1	Sonder la structure nucléaire	2
2	Qu'est ce que le potentiel optique	4
2.1	Position du problème	5
2.1.1	Solution compliquée	5
2.1.2	Autre solution (moins compliquée)	5
2.2	Utilité du potentiel optique	6
2.2.1	Etudes de structure nucléaire expérimentale	6
2.2.2	Données nucléaires	6
2.3	Potentiel complexe	7

3	Lien avec le libre parcours moyen	8
3.1	Section efficace d'absorption	8
3.2	Section efficace élastique	9
3.3	Retour au potentiel complexe	13
3.4	Section efficace totale	13
4	Non localité du potentiel optique	14
5	Couplages	14
6	Interaction effective	16
6.1	Interaction effective	16
6.2	Brückner-Hartree-Fock (BHF) : généralités	17
6.3	Potentiels de convolution	19
6.3.1	Potentiel "JLM"	20
6.3.2	Potentiel de Melbourne	22
6.3.3	Potentiel dans l'espace des impulsions	24
7	Aspects phénoménologiques du potentiel optique	25
8	Anti-résumé	26
9	Annexe : Relations de dispersion	27

1 Sonder la structure nucléaire

Une des manières les plus naturelles pour sonder la structure d'un noyau consiste à envoyer un projectile dessus, et à mesurer ce qui sort de la réaction. Le type de réaction le plus simple que l'on puisse imaginer pour cela est la réaction élastique où la particule mesurée en voie de sortie est de même nature et de même énergie que le projectile.

Il y a eu jusque dans les années 80 une forte activité de mesures de diffusion élastique d'électrons sur les noyaux stables, ceci afin de sonder la structure des noyaux dans leur état fondamental. La diffusion d'électrons présente en effet de nombreuses qualités qui rendent son utilisation assez naturelle. Premièrement les électrons interagissent avec le noyau à travers l'interaction coulombienne qui est parfaitement bien connue et dont le traitement ne pose pas de problème, ce qui permet une déconvolution non ambiguë de la densité de charge sous-jacente. Deuxièmement, le fait que la sonde soit de nature complètement différente de la cible simplifie grandement cette déconvolution, puisqu'il n'y a pas de processus d'échange à prendre en compte entre la sonde et les nucléons de la cible. Troisièmement, la longue portée de l'interaction coulombienne garantit que toute la cible sera sondée, même si l'électron ne pénètre pas complètement la cible. Tous ces avantages viennent avec un inconvénient : l'interaction coulombienne ne sonde que la charge et donc essentiellement les protons (ainsi que la distribution de charge à l'intérieur des neutrons). Ces études ont été extrêmement précieuses pour comparer les différents modèles de structure nucléaire disponibles (voir Fig. 1).

L'étude des états excités des noyaux cibles est aussi possible par diffusion inélastique d'électrons, et comme la diffusion élastique, ces mesures produisent des contraintes expérimentales non ambiguës (indépendantes d'un modèle) pour les théories de structure nucléaire. Comme la diffusion élastique pour la structure de la cible dans son état fondamental, ces mesures produisent des densités de transition de charge qui sont directement comparables aux prédictions des différentes théories de structure nucléaire (voir Fig. 2) et ont permis de discriminer entre ces différentes théories.

Lorsque les études de structure nucléaire expérimentale se sont tournées vers des noyaux exotiques instables, il n'a naturellement pas été possible de fabriquer des cibles de noyaux instables et

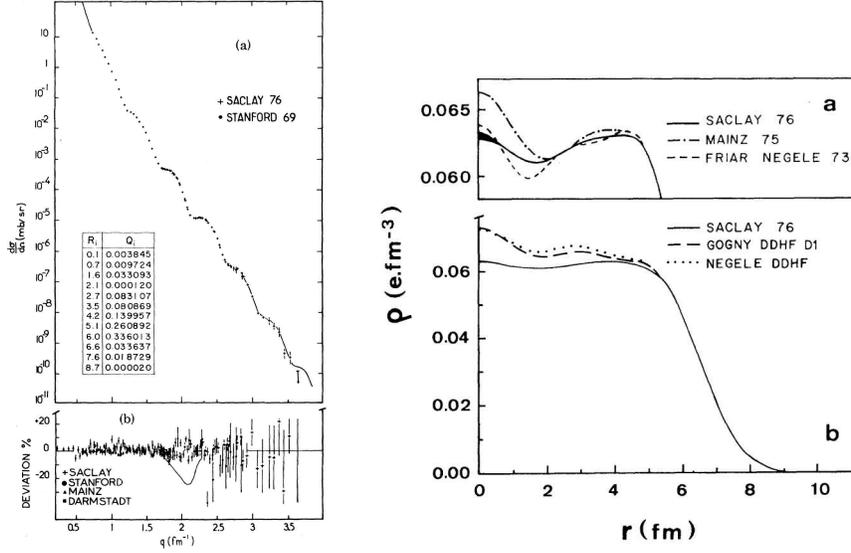


FIG. 1 – Section efficace de diffusion élastique d’électrons sur du ^{208}Pb (à gauche), et la densité de charge qui en est déduite comparée aux prédictions de différents modèles (à droite). Figures tirées de [1]

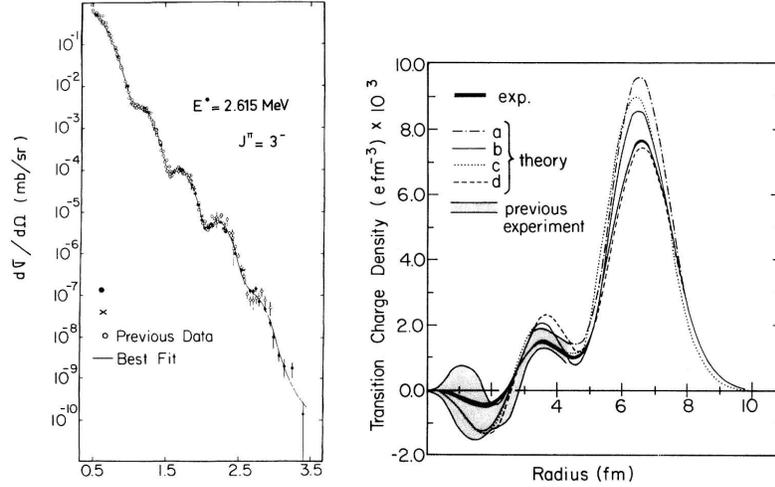


FIG. 2 – Section efficace de diffusion inélastique d’électrons sur du ^{208}Pb vers le premier état 3^- (à gauche), et la densité de transition de charge qui en est déduite comparée aux prédictions de différents modèles (à droite). Figures tirées de [2]

ce type de mesure a cessé d’être intéressant. Ce n’est que récemment, avec les projets de collisionneurs électron-ion ELISE-FAIR à GSI Darmstadt et de Riken au Japon, que la diffusion élastique et inélastique d’électrons connaît un regain d’intérêt. On peut espérer que ces travaux apporteront autant à la connaissance des noyaux instables que les études des années 80 l’ont fait pour les noyaux de la vallée de stabilité.

Afin d’étudier la structure des noyaux instables, il a donc fallu mettre en oeuvre d’autres techniques. La technique de l’excitation coulombienne qui peut être utilisée en cinématique inverse,

et donc pour des "cibles" instables, a été très largement utilisée. Elle consiste à envoyer un faisceau du noyau à étudier sur une cible lourde stable (souvent du plomb ou de l'or) et à mesurer la diffusion inélastique coulombienne. Bien qu'elle ne permette pas de remonter à la densité de transition, cette méthode permet de mesurer l'énergie des états excités ainsi que leur collectivité à travers les observables telles que $B(E2)$ (voir Fig. 3).

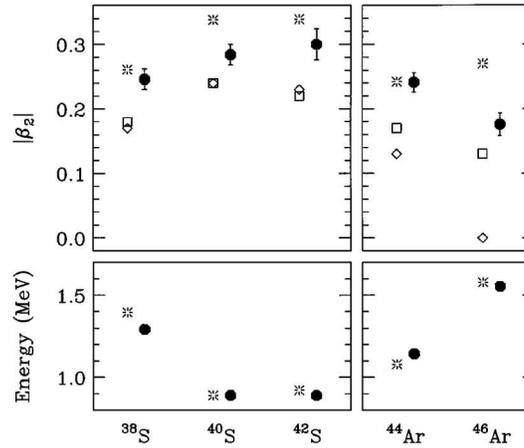


FIG. 3 – Paramètre de déformation β_2 et énergie du premier 2^+ d'une série d'isotopes de soufre et argon, mesurés par excitation coulombienne et comparés à des résultats de calculs théoriques. Figure tirée de [3]

Une alternative pour sonder la structure nucléaire consiste à utiliser non pas l'interaction coulombienne mais l'interaction nucléaire, et pour cela utiliser des nucléons comme sonde. L'utilisation de nucléons pour sonder la structure des noyaux permet de sonder toute la distribution de matière nucléaire (proton et neutron) et non pas essentiellement les protons comme la diffusion d'électrons. De ce point de vue la diffusion de nucléons est complémentaire de la diffusion d'électrons puisque l'une sonde la densité de matière et l'autre sonde la densité de charge. De plus, la diffusion protons est utilisable en cinématique inverse, ce qui permet son application pour des "cibles" instables. La diffusion de nucléons présente cependant des inconvénients liés au fait que l'interaction nucléaire est mal connue, et que la connaissance de la structure nucléaire que l'on tire d'expériences de diffusion de nucléons est entachée par cette méconnaissance. De plus, l'interaction nucléaire étant de courte portée, la zone de la "cible" sondée par la diffusion de nucléons est limitée à la zone où la probabilité de présence du projectile est importante. Cette zone peut se limiter à la surface de la cible dans le cas de projectiles de faible énergie. Finalement, une autre complication est liée au fait que le nucléon projectile est de même nature que les nucléons de la cible, et que l'échange doit être pris en compte.

La diffusion élastique et inélastique de nucléon est modélisée par le modèle optique. Dans ce cours, j'essaierai de montrer comment et avec quelles limites le potentiel optique peut servir à interpréter des expériences de diffusion de nucléons, et comment la diffusion de nucléons peut permettre de discriminer entre différentes théories de structure nucléaire, comme cela a été fait, en son temps, par la diffusion d'électrons.

2 Qu'est ce que le potentiel optique

Comme le temps accordé à ce cours ne permet pas de développer tous les aspects du potentiel optique, j'en montre ici quelques uns des plus intéressants/utiles (souvent simplifiés à l'extrême).

2.1 Position du problème

Le problème posé consiste à rendre compte de l'interaction *directe* d'un projectile (p, n, d, t, α , ${}^A_Z Y$) avec une cible (${}^A_Z X$).

Il faut alors prédire les observables : $\sigma_{Totale}(E)$, $\sigma_{Reaction}(E)$, $\sigma_{Elastique}(E)$, $d\sigma/d\Omega(E, \theta)$. Voir Fig 4.

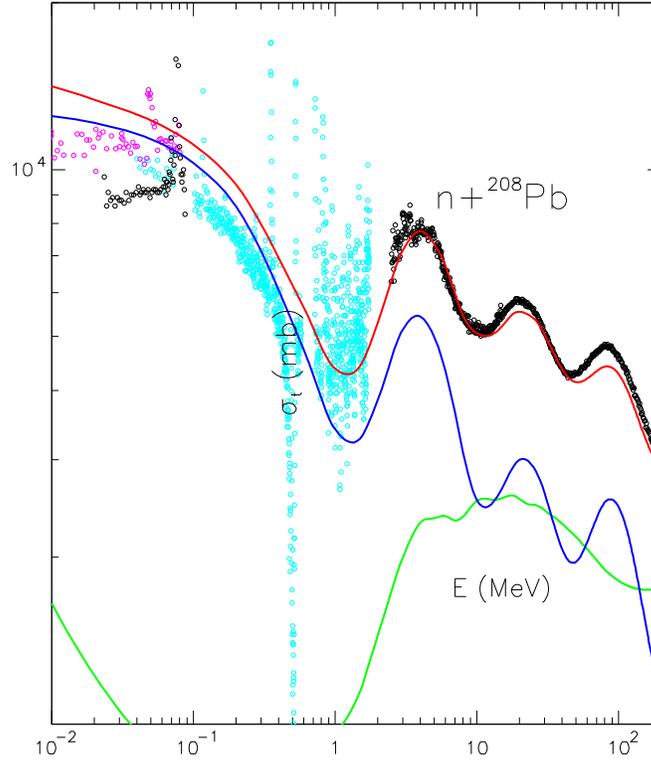


FIG. 4 – Sections efficaces Totale (rose), Elastique (bleu) et de Réaction (vert) d'un neutron sur du ${}^{208}\text{Pb}$ entre 10 keV et 200 MeV.

Il existe deux types de solutions pour ce problème :

2.1.1 Solution compliquée

(ici dans le cas de la diffusion nucléon-noyau) Résoudre le problème à $A+1$ nucléons, avec initialement A nucléons liés (cible) et un nucléon libre incident (projectile).

Cette approche implique la résolution d'un Hamiltonien à A corps (plus le mouvement du centre de masse) : difficile.

2.1.2 Autre solution (moins compliquée)

Calculer un *potentiel effectif* qui rend compte de l'interaction projectile-cible comme un système à 2 corps \rightarrow Hamiltonien à 1 corps (plus CDM).

On appelle ce potentiel effectif le *Potentiel Optique* noté $U(r, E, \dots)$. Il est d'un emploi plus aisé que le calcul complet à A corps et cette approche peut être utilisée pour des énergies de projectiles allant de quelques keV à quelques GeV. Il faut cependant se rappeler que le potentiel optique (Optical Model Potential ou OMP en anglais) ne décrit que la partie directe de l'interaction et que dans tout cet intervalle d'énergie il existe d'autres processus de réaction qui contribuent aux mesures (voir Fig. 5).

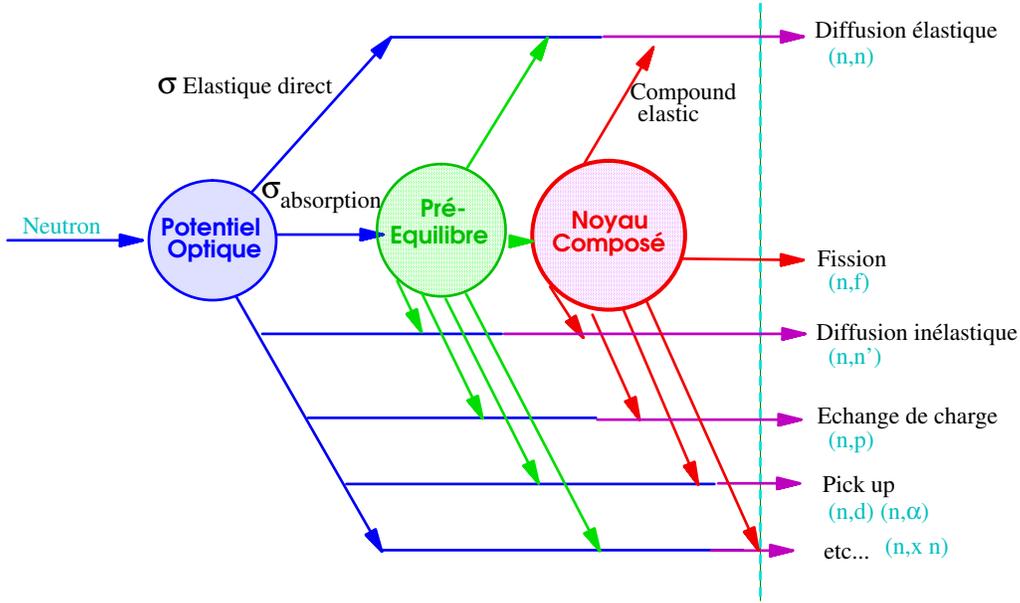


FIG. 5 – Enchaînement des modèles permettant de calculer les observables mesurées.

Hypothèse Majeure : Les degrés de liberté internes (à la cible ou au projectile) sont séparables du mouvement relatif cible-projectile. C'est-à-dire que pour une réaction $A + a \rightarrow B + b...$ on s'intéresse à $T_{ba} = \langle \psi_b | v | \psi_a \rangle$, avec :

$$\psi = \phi \cdot \chi(r), \quad (1)$$

où ψ est la fonction d'onde complète, ϕ est la fonction d'onde associée aux degrés de liberté internes (projectile et cible) et χ est la fonction d'onde relative. Ce point sera développé dans le chapitre 6 sur les interactions effectives.

2.2 Utilité du potentiel optique

Le potentiel optique sert à calculer/prédire/reproduire les sections efficaces de diffusion élastiques et inélastiques *directes* ainsi que la section efficace de réaction. (Voir Fig. 4).

Le potentiel optique a deux types d'applications (outre son intérêt scientifique intrinsèque) :

2.2.1 Etudes de structure nucléaire expérimentale

On peut penser que la manière dont les A nucléons de la cible sont assemblés (fonction d'onde de degrés de liberté internes de la cible) a une influence sur la façon dont le projectile va être diffusé.

L'utilité du potentiel optique consiste donc en la création d'un lien entre les études expérimentales de réactions nucléaires et ce qu'on sait ou croit savoir de la structure des noyaux impliqués dans la réaction. C'est l'objet de ce cours.

2.2.2 Données nucléaires

Le modèle optique permet de calculer des sections efficaces (et d'autres quantités comme les coefficients de transmission T_l) qui entrent comme ingrédients dans les calculs d'autres modèles :

Exemples : physique des réacteurs nucléaires, neutronique, applications médicales, "incinération" des déchets nucléaires, astrophysique, électronique, contrôles non destructifs, etc...

La figure 5 montre comment les quantités calculées à l'aide du potentiel optique servent d'ingrédients aux autres modèles utilisés pour l'évaluation des données nucléaires. Pour en savoir plus sur le potentiel optique pour les données nucléaires reportez-vous à [4]

2.3 Potentiel complexe

Expérimentalement on a vu qu'une partie du flux incident sur la cible n'est pas diffusé de façon élastique : il y a disparition de flux de la voie élastique vers d'autres voies de réaction (inélastique, capture, ...).

Par analogie avec l'optique on rend compte de ces réactions par un potentiel complexe :

$$U = V + iW$$

avec $V = Re(U)$: réfraction, et $W = Im(U)$: absorption.

Illustration avec l'équation de Schrödinger :

$$(H + T + U - E)\psi = 0$$

et $T = -\hbar^2/2\mu \nabla^2$ Comme on a fait l'hypothèse de la séparabilité des degrés de liberté internes et relatifs (Eq. 1) on peut séparément écrire l'Équation de Schrödinger (EDS) interne :

$$(H - E_I)\phi = 0,$$

et l'EDS du mouvement relatif :

$$(T + U - \epsilon)\chi = 0. \quad (2)$$

en multipliant à gauche (2) par χ^* , et en soustrayant à l'équation conjuguée :

$$\begin{aligned} \chi^*(T + U - \epsilon)\chi &= 0 \\ -\chi(T + U^* - \epsilon)\chi^* &= 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}(\chi^*\nabla^2\chi - \chi\nabla^2\chi^*) + (U - U^*)\chi\chi^* &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

dans $U - U^*$ on reconnaît $2iIm(U) = 2iW$, et $\chi\chi^* = \rho(r)$.

En se rappelant de la définition du courant de probabilité (Messiah T1, Ch IV, §4) :

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{im} Re(\chi^*\nabla\chi) = \frac{\hbar}{2im}(\chi^*\nabla\chi - \chi\nabla\chi^*)$$

on calcule $div(\vec{j})$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\hbar}{2im}(\chi^*\nabla^2\chi - \chi\nabla^2\chi^*)$$

que l'on peut identifier dans (3). Et l'on trouve :

$$\boxed{\hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 2 \rho W} \quad (4)$$

L'Eq. 4 s'interprète ainsi : si $W < 0$ il y a disparition de flux (absorption), si $W > 0$ il y a émission de flux. Pour le potentiel optique, le flux qui disparaît ($W < 0$) correspond au flux qui part dans des voies de réaction autres que la voie élastique (directe).

3 Lien avec le libre parcours moyen

Pour un potentiel constant (indépendant de \vec{r}) $U = -(V + iW)$ la fonction d'onde χ s'écrit comme une onde plane :

$$\chi(\vec{r}) = e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}$$

κ vient de l'EDS :

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{2\mu}{\hbar^2}(E + V + iW) \\ \kappa &= \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}(E + V) \right)^{1/2} \left(1 + \frac{iW}{E + V} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Si $W \ll E + V$ on peut faire le développement au 1er ordre :

$$\kappa = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}(E + V) \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{iW}{E + V} \right)$$

que l'on réintroduit dans la fonction d'onde χ ($W = -|W|$) :

$$\chi(\vec{r}) = e^{i\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}(E+V)\right)^{1/2} \cdot \vec{r}} \times e^{-\left(\frac{\mu}{2\hbar^2}\right)^{1/2} \frac{|W|}{(E+V)^{1/2}} \cdot \vec{r}} \quad (5)$$

Dans (5) le premier terme correspond à une onde plane dont l'amplitude est amortie par le second terme exponentiellement décroissant. En réécrivant ce second terme sous la forme $e^{-\vec{r}/\lambda}$ on fait apparaître le libre parcours moyen λ .

$$\lambda = \hbar \sqrt{\frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{E+V}}{|W|}}$$

Le fait que ce libre parcours moyen ne soit pas infini signifie que (particulièrement à basse énergie) le projectile ne pénètre pas toujours complètement la cible et n'interagit donc qu'avec les "couches" les plus externes de la cible. Il en résulte que, surtout à basse énergie, la diffusion d'un projectile sur une cible est essentiellement sensible à la surface du potentiel optique, c'est-à-dire à la partie la plus externe de celui-ci.

3.1 Section efficace d'absorption

C'est la quantité de flux qui disparaît de la voie élastique (directe). En notant v le courant incident ;

$$\sigma_{abs} = \frac{-\int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3r}{v}$$

En substituant (4) dans cette équation on obtient :

$$\sigma_{abs} = -\frac{2}{\hbar v} \int \rho(\vec{r}) W(\vec{r}) d^3r$$

En se rappelant la définition de $\rho(\vec{r}) = \chi^*(\vec{r})\chi(\vec{r})$, en décomposant $\chi(\vec{r})$ en ondes partielles selon l le moment angulaire orbital (qui est un nombre quantique adapté/conservé pour les problèmes de diffusion) :

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l u_l(r) P_l(\cos(\theta)), \quad (6)$$

et en utilisant l'orthogonalité des polynômes de Legendre ($P_l(\cos(\theta))$) :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\cos(\theta)) P_{l'}(\cos(\theta)) d(\cos(\theta)) = 2 \frac{\delta(l, l')}{2l+1} \quad (7)$$

on obtient finalement :

$$\sigma_{abs} = -\frac{2}{\hbar v} \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} |u_l(r)|^2 W(r) dr$$

On peut réinterpréter l'équation ci-dessus comme :

$$\boxed{\sigma_{abs} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{abs}(l)} \quad (8)$$

avec :

$$\boxed{\sigma_{abs}(l) = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) T_l} \quad (9)$$

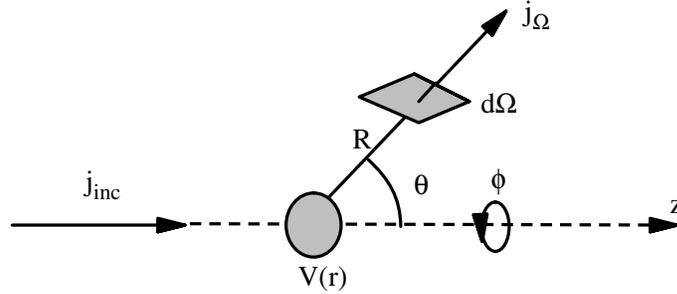
et

$$\boxed{T_l = -\frac{8}{\hbar v} \int_0^{\infty} |u_l(r)|^2 W(r) dr.} \quad (10)$$

T_l est appelé le coefficient de transmission. Ce coefficient est utilisé pour les calculs de modèle statistique.

3.2 Section efficace élastique

Rappels de théorie de la diffusion pour un potentiel réel



A la limite $r \rightarrow \infty$ (r : distance cible projectile) la fonction d'onde incidente est une onde plane $\chi_{inc}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, et l'onde diffusée élastiquement est une onde sphérique $\chi_{el}(\vec{r}) = f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$. La fonction d'onde complète est de la forme :

$$\chi(\vec{r} \rightarrow \infty) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (11)$$

et est solution de l'équation de Schrödinger :

$$(H - E)\chi = 0.$$

On se propose de calculer $d\sigma_{el}(\Omega)$ l'élément de section efficace élastique dans la direction Ω . $d\sigma_{el}(\Omega)$ s'écrit :

$$d\sigma_{el}(\Omega) = \frac{\vec{j}_{el}(\Omega)}{\vec{j}_{inc}}$$

avec $\vec{j}_{el}(\Omega)$ le flux sortant dans la direction Ω , et \vec{j}_{inc} le flux incident.
 \vec{j}_{inc} s'écrit :

$$\vec{j}_{inc} = \hbar/\mu \vec{k} = \vec{v}.$$

le flux diffusé dans la direction Ω à travers l'élément d'angle solide $d\Omega$ s'écrit :

$$\vec{j}_{el}(\Omega)r^2 d\Omega = \frac{\hbar}{2i\mu} \left[f^*(\Omega) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r} \right) - f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f^*(\Omega) \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] r^2 d\Omega$$

en développant et en simplifiant on obtient :

$$\vec{j}_{el}(\Omega) r^2 d\Omega = |f(\Omega)|^2 \frac{\hbar}{\mu} k d\Omega = |f(\Omega)|^2 v d\Omega$$

d'où :

$$\boxed{\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = |f(\Omega)|^2} \quad (12)$$

et en intégrant selon Ω :

$$\boxed{\sigma_{el} = \int \frac{|f(\Omega)|^2 d\Omega}{4\pi}} \quad (13)$$

C'est très intéressant car toute l'information sur la diffusion élastique est contenue dans $f(\Omega)$, mais rien ne dit comment calculer $f(\Omega)$. Pour cela, il faut tout écrire en coordonnées sphériques et décomposer en ondes partielles.

En coordonnées sphériques l'EDS s'écrit :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) - E \right) \chi(\vec{r}) = 0.$$

La partie cinétique du Hamiltonien se décompose en une partie radiale et une partie angulaire (Messiah T1, Ch IX, §2) :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2\mu r}.$$

Et l'opérateur L^2 s'écrit :

$$L^2 = -\hbar \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right].$$

On décompose tout d'abord l'onde plane en ondes partielles :

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ik r \cos(\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (14)$$

avec $j_l(kr)$ fonction de Bessel sphérique (Messiah T1, Annexe II, §6)

$$j_l(kr) \propto \frac{\sin(kr - \pi l/2)}{kr} \underset{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} -i^l \frac{e^{ikr} + (-)^{l+1} e^{-ikr}}{2ikr}$$

De même, on peut décomposer $\chi(\vec{r})$ en ondes partielles (6) ainsi que $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos(\theta)) \quad (15)$$

En se souvenant que les P_l sont fonctions propres de L^2 :

$$L^2 P_l(\cos(\theta)) = \hbar^2 l(l+1) P_l(\cos(\theta))$$

on peut réécrire l'EDS :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hbar^2 \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) - E \right) (2l+1) i^l \frac{u_l(r)}{kr} P_l(\cos(\theta)) \right] = 0$$

en éliminant P_l on obtient les EDS radiales qui donnent les $u_l(r)$ (une équation par valeur de l) :

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right) u_l(r) = 0} \quad (16)$$

avec :

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}.$$

Pour résoudre l'équation différentielle (16) et obtenir $u_l(r)$, il faut fixer des conditions aux limites sur $u_l(r)$. $u_l(r)$ est finie donc :

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Pour $r \rightarrow \infty$, $\frac{l(l+1)}{r^2}$ et $V(r)$ tendent vers 0. (16) se simplifie alors et devient :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) u_l(r \rightarrow \infty) = 0.$$

Les solutions $u_l(r \rightarrow \infty)$ de cette équation sont de la forme :

$$u_l(r \rightarrow \infty) = a_l \frac{i^{-l} e^{i\delta_l} e^{ikr} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-ikr}}{2i} \quad (17)$$

avec δ_l le décalage de phase (phase shift en anglais) dû au potentiel. En effet, à l'infini le seul effet du potentiel sur la fonction d'onde est d'introduire une phase dans la fonction d'onde. Si le potentiel est réel δ_l est réel.

En reprenant (11) et en introduisant les décompositions en ondes partielles de l'onde plane (14) et de $f(\Omega)$ (15) on obtient :

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos(\theta)) \left((-)^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{r} + (1 + 2i k f_l) \frac{e^{ikr}}{r} \right).$$

Si cette fois on reprend (6) en y introduisant (17) on obtient :

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos(\theta)) a_l \left((-)^{l+1} e^{-i\delta_l} \frac{e^{-ikr}}{r} + e^{i\delta_l} \frac{e^{ikr}}{r} \right).$$

En identifiant les deux dernières équations on obtient $1 = a_l e^{-i\delta_l}$ et $(1 + 2i k f_l) = a_l e^{i\delta_l}$, d'où l'on peut tirer la valeur de f_l :

$$\boxed{f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1)}$$

Maintenant on peut calculer $f(\Omega)$ en sommant les f_l avec (15). En effet, en pratique, connaissant $V(r)$ on peut résoudre (16) numériquement et identifier la solution à grand r avec (17), d'où l'on tire les δ_l , ce qui permet de calculer les f_l , puis $f(\Omega)$, et enfin $d\sigma_{el}/d\Omega$ et σ_{el} . On définit la matrice S :

$$S_l = e^{2i\delta_l}.$$

$f(\Omega)$ devient :

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos(\theta)) \quad (18)$$

d'où l'on tire $d\sigma_{el}/d\Omega$:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1)(S_l - 1)(S_{l'}^* - 1)P_l(\cos(\theta))P_{l'}(\cos(\theta)).$$

Dans cette expression on peut remarquer qu'il y a des termes croisés en l et l' qui produisent des structures complexes. Voir Fig. 6.

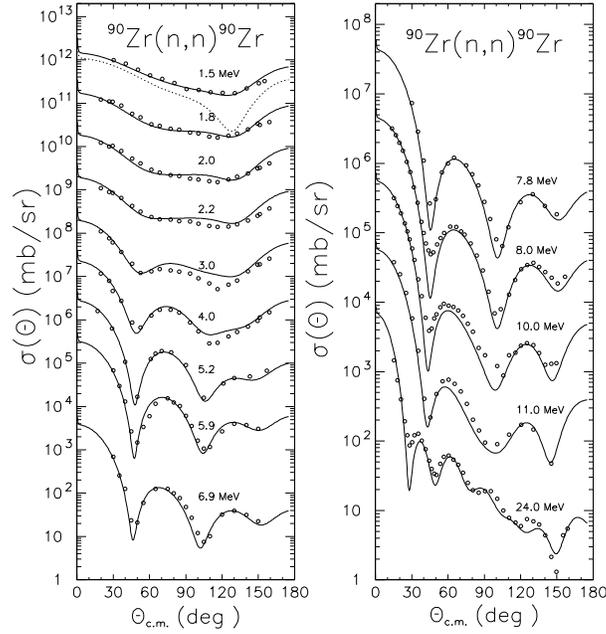


FIG. 6 – Sections efficaces différentielles de diffusion d'un neutron sur un noyau de ^{90}Zr entre 1.5 MeV et 24 MeV.

Pour calculer σ_{el} il suffit d'intégrer sur les angles

$$\sigma_{el} = \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d\Omega} d(\cos(\theta))$$

et en utilisant l'orthogonalité des P_l (7), on obtient :

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)|S_l - 1|^2$$

3.3 Retour au potentiel complexe

Si l'on n'a plus $V(r)$ mais $U(r) = V(r) + iW(r)$ les expressions dérivées plus haut sont justes à condition de considérer que $u_l(r)$ et δ_l sont maintenant complexes. On peut alors exprimer σ_{el} sous sa forme la plus connue :

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)|^2$$

On peut aussi essayer de calculer σ_{abs} en termes de δ_l . Pour cela on réévalue $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ (toujours pour $R \rightarrow \infty$) :

$$- \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3r = \frac{\hbar}{2\mu i} R^2 2\pi \int_{-1}^1 \left(\chi^* \frac{\partial}{\partial r} \chi - \chi \frac{\partial}{\partial r} \chi^* \right)_{r=R} d(\cos(\theta))$$

et on y introduit une expression asymptotique de $\chi(\vec{r})$:

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left((-)^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{r} + S_l \frac{e^{ikr}}{r} \right) P_l(\cos(\theta))$$

et toujours en utilisant l'orthogonalité des P_l (7), on obtient :

$$- \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3r = \frac{\hbar\pi}{\mu k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

d'où :

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

En identifiant avec (9) on peut trouver une expression de T_l en fonction de S_l :

$$T_l = 1 - |S_l|^2$$

3.4 Section efficace totale

C'est la somme de la section efficace élastique et de la section efficace d'absorption :

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \text{Re}(S_l))$$

Si l'on compare cette expression avec la partie imaginaire de $f(\theta = 0)$ (18) on peut remarquer que :

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(\theta = 0))$$

C'est le théorème optique qui relie la section efficace élastique à l'avant à la section efficace totale. Ainsi un calcul de potentiel optique qui reproduit bien les mesures de diffusion élastique aux angles avants, reproduit *forcement* bien la section efficace totale (et inversement).

4 Non localité du potentiel optique

Dans ce chapitre nous allons essayer de voir que même si jusqu'à maintenant nous avons utilisé un potentiel optique local, un potentiel optique dans toute sa généralité est non local.

Si nous revenons à une description de la diffusion en terme de problème à A+1 corps, et si l'on écrit la fonction d'onde totale comme une somme antisymétrisée des A $\phi_i(\vec{r})$ les fonctions d'onde du i^{eme} noyau de la cible et de $\chi(\vec{r})$ la fonction d'onde du nucléon projectile, on peut écrire l'EDS (en supposant un certain découplage entre les degrés de liberté internes et relatifs) :

$$E \chi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \chi(\vec{r}) + \sum_{i=1}^A \int [\phi_i(\vec{r}_i)]^2 v(\vec{r} - \vec{r}_i) \chi(\vec{r}) - [\phi_i^*(\vec{r}_i) \phi_i(\vec{r}) v(\vec{r} - \vec{r}_i) \chi(\vec{r}_i)] d\vec{r}_i$$

Le premier terme de l'intégrale (le terme direct) est local c'est-à-dire qu'on peut le replacer par quelque chose de la forme $\chi(\vec{r})U(\vec{r})$. Au contraire, le deuxième terme (le terme d'échange) ne peut pas être mis sous cette forme et doit rester sous la forme d'une intégrale du type $\int u(\vec{r}, \vec{r}') \chi(\vec{r}') d\vec{r}'$: une forme non locale.

Dans la pratique, dans beaucoup de cas on utilise un potentiel optique local "équivalent" $U(\vec{r})$ pour éviter de traîner toute la complexité de $u(r, r')$. On doit alors avoir :

$$\chi(\vec{r})U(\vec{r}) = \int u(\vec{r}, \vec{r}') \chi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Il est aussi courant de n'utiliser qu'un potentiel local, sans forcer l'équivalence avec le potentiel complet non local. Dans ce cas, on néglige les effets de non localité (qui peuvent être importants, surtout si A est petit).

Pour avoir une autre idée de la non-localité on peut faire un développement de Taylor de $\chi(r')$ autour de $\chi(r)$ (on suppose que $v(\vec{r} - \vec{r}')$ est un potentiel de courte portée).

$$\chi(\vec{r}') = \chi(\vec{r}) + (\vec{r}' - \vec{r}) \nabla \chi(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{r}' - \vec{r})^2 \nabla^2 \chi(\vec{r}) + \dots$$

Comme $\nabla = \frac{p}{\hbar}$, et comme les termes impairs s'annulent par intégration :

$$\chi(\vec{r})U(\vec{r}) = [U_0(\vec{r}) + U_2(\vec{r})p^2 + \dots] \chi(\vec{r})$$

La non localité peut aussi se voir comme une dépendance en impulsion supplémentaire (au-delà de celle qui est associée à la dépendance en énergie).

5 Couplages

Jusqu'à maintenant nous n'avons pas considéré explicitement le spectre des états internes $\phi_i(\xi)$ (ξ : coordonnées internes). Si $\phi_i(\xi)$ a N états propres accessibles alors pour tout $i=1, \dots, N$ ϕ_i est un état propre de l'EDS et ϵ_i sa valeur propre associée :

$$(h - \epsilon_i) \phi_i = 0$$

et

$$\int d\xi \phi_i^*(\xi) \phi_j(\xi) = \delta_{ij}$$

Les états de diffusion qui laissent les degrés de liberté internes dans l'état i $\Psi_i(\vec{r}, \xi)$, solutions de l'EDS $(T + h + U - E)\Psi_i = 0$ sont alors écrits

$$\Psi_i(\vec{r}, \xi) = \sum_{j=1}^N \chi_{ij}(\vec{r}) \phi_j(\xi) \quad (19)$$

avec

$$\chi_{ij}(\vec{r}) = \int d\xi \phi_j^*(\xi) \Psi_i(\vec{r}, \xi) \quad (20)$$

$\chi_{ij}(\vec{r})$ s'interprète comme le recouvrement entre la fonction d'onde interne ϕ_j et l'état de diffusion Ψ_i et est la contribution à la fonction d'onde relative associée à l'état interne j laissant le système dans l'état i . L'équation (19) implique que pour un état de diffusion donné, tous les états internes contribuent a priori.

En développant l'EDS de $\Psi_i(\vec{r}, \xi)$ on obtient N équations indicées par j

$$\int d\xi \phi_j^*(\xi) \left(\frac{\hbar^2}{2\mu} + h + U(\vec{r}, \xi) - E \right) \sum_{k=1}^N \chi_{ik}(\vec{r}) \phi_k(\xi)$$

et en utilisant l'orthogonalité des ϕ et leur EDS interne :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} - E_j + U_{ii}(\vec{r}) \right) \chi_{ij}(\vec{r}) = - \sum_{j \neq i} U_{ij}(\vec{r}) \chi_{ij}(\vec{r}) \quad (21)$$

avec

$$E_j = E - \epsilon_j$$

et

$$U_{ij}(\vec{r}) = \int d\xi \phi_i^*(\xi) U(\vec{r}, \xi) \phi_j(\xi)$$

$U_{ij}(\vec{r})$ est le potentiel de couplage entre deux états internes. (21) définit un système de N équations couplées dont les solutions sont les χ_{ij} pour i donné et $j=1, \dots, N$, qui permettent de calculer $\Psi_i(\vec{r}, \xi)$. Pour calculer les $\Psi_i(\vec{r}, \xi)$ pour tous les i , il faut donc résoudre N systèmes couplés.

Un exemple simple : le couplage spin-orbite d'une particule de spin $1/2$ sur une cible de spin 0 .

Comme dans le modèle en couche l'interaction spin-orbite couple le spin s du projectile avec son moment angulaire relatif. On considère ici que le seul degré de liberté interne mis en jeu est la projection du spin du projectile ; c'est-à-dire $M = \pm 1/2$: il n'y a que deux états dégénérés. Le potentiel de couplage est :

$$V = V_{ls}(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

La fonction d'onde d'un état de diffusion s'écrit :

$$\Psi(\vec{r}, s) = \chi_{\frac{1}{2}}(\vec{r}) \phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(s) + \chi_{-\frac{1}{2}}(\vec{r}) \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(s)$$

Le potentiel de couplage s'écrit alors :

$$V_{ik}(\vec{r}) = V_{M, M'} = V_{ls}(r) \sum_{s=\pm \frac{1}{2}} \phi_{\frac{1}{2}, M}^*(s) (\vec{l} \cdot \vec{s}) \phi_{\frac{1}{2}, M'}(s)$$

mais il est difficile de travailler avec cette équation. Il vaut mieux faire une décomposition en ondes partielles et travailler à J donné (J : spin total $\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$).

$$V_{ik}^J(\vec{r}) = V_{l, l'}^J = V_{ls}(r) \int d\xi \mathcal{Y}_{l, J}^*(\xi) (\vec{l} \cdot \vec{s}) \mathcal{Y}_{l', J}^*(\xi)$$

Comme $\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$, on a $\vec{l} \cdot \vec{s} = 1/2(J^2 - l^2 - s^2)$, et comme \mathcal{Y} est fonction propre de J^2 , l^2 et s^2 avec les valeurs propres $J(J+1)$, $l(l+1)$ et $3/4$ on obtient :

$$V_{ik}^J(\vec{r}) = V_{l,l'}^J = \frac{1}{2}V_{ls}(r) [J(J+1) - l(l+1) - 3/4] \delta_{ll'}$$

qui est diagonal (les équations ne sont même pas couplées). En se rappelant que $l=J \pm 1/2$ on obtient les deux éléments de matrice non nuls pour chaque J :

$$V_{l=J-1/2, l'=J-1/2}^J = \frac{1}{2}V_{ls}(r)l$$

$$V_{l=J+1/2, l'=J+1/2}^J = \frac{1}{2}V_{ls}(r)(-l-1)$$

il suffit de résoudre l'EDS pour chaque J et $l=J \pm 1/2$ et de revenir à une représentation en J, s_z par des coefficients de Clebsh-Gordan.

6 Interaction effective

Nous allons maintenant essayer de comprendre le concept d'interaction effective et comment ce concept s'applique au modèle optique.

6.1 Interaction effective

On divise l'espace des états accessibles au système de A+1 nucléons en deux sous espaces p et q, et les projecteurs P et Q vers ces deux sous espaces. On définit p comme l'espace des états du système correspondant à une diffusion élastique, et q comme le complémentaire de p. On a :

$$\begin{aligned} P^2 &= P \\ Q^2 &= Q \\ Q &= 1 - P \\ PQ &= QP = 0 \\ P + Q &= 1 \end{aligned} \tag{22}$$

En introduisant (22) dans l'EDS $(E - H)\psi = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} (E - H)(P + Q)\psi &= 0. \\ EP\psi + EQ\psi - HP\psi - HQ\psi &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

De même on peut décomposer H en :

$$H = PHP + QHQ + PHQ + QHP = H_{PP} + H_{QQ} + H_{PQ} + H_{QP}$$

En multipliant (23) à gauche par Q :

$$\begin{aligned} EQP\psi + EQQ\psi - QHP\psi - QHQ\psi &= 0. \\ (E - H_{QQ})(Q\psi) &= H_{QP}(P\psi) \end{aligned}$$

et on en tire :

$$Q\psi = \frac{1}{E - H_{QQ} + i\epsilon} H_{QP}(P\psi) \tag{24}$$

Le $i\epsilon$ est ajouté pour assurer l'analyticité de la fonction.
En multipliant (23) à gauche par P :

$$(EPP\psi + EPQ\psi - PHP\psi - PHQ\psi = 0.$$

$$(E - H_{PP})(P\psi) = H_{PQ}(Q\psi)$$

et en y introduisant l'expression de $Q\psi$ de (24) on trouve :

$$\boxed{(E - H_{PP} - [H_{PQ}(E - H_{QQ} + i\epsilon)^{-1}H_{QP}])(P\psi) = 0} \quad (25)$$

Cette équation est suffisante si l'on ne s'intéresse qu'à la partie élastique du problème de diffusion : elle donne le même résultat pour $(P\psi)$ que l'équation de Schrödinger complète. En revanche, (25) ne dit rien sur les états inélastiques $(Q\psi)$ (contrairement à l'EDS complète).

On peut aussi réécrire (25) comme :

$$(E - H_{interne} - t - v)(P\psi) = 0$$

avec

$$\boxed{v = V_{PP} + V_{PQ}(E - H_{QQ} + i\epsilon)^{-1}V_{QP}} \quad (26)$$

Si on écrit l'élément de matrice de transition :

$$\tau_{aa'} = \langle \chi_{a'} | V | \psi_a \rangle = \langle \chi_{a'} | v | P\psi_a \rangle$$

cet élément de matrice peut être écrit soit en fonction de ψ et utilise alors V l'interaction brute, soit en fonction de $P\psi$ et utilise alors v une interaction effective qui donne le même $\tau_{aa'}$ que V pour les problèmes de diffusion. v fournit une solution équivalente pour calculer $\tau_{aa'}$ dans un espace de fonctions d'onde plus petit (p au lieu de $p+q$) mais au prix d'une interaction à la structure plus compliquée (v (26) au lieu de V). On a déplacé la complexité de la fonction d'onde vers le potentiel. En effet, le calcul de v n'est pas simple car il faut connaître H_{QQ} pour le faire et car l'espace Q (voies inélastiques) est bien plus riche que l'espace P .

Dans (26) on peut remarquer que la voie élastique est traitée à la fois par V_{PP} (qui représente une diffusion élastique "directe") et par $V_{PQ}(E - H_{QQ} + i\epsilon)^{-1}V_{QP}$ qui prend en compte des excitations inélastiques intermédiaires qui retombent sur la voie élastique.

V_{PP} est réel (par définition), mais $V_{PQ}(E - H_{QQ} + i\epsilon)^{-1}V_{QP}$ est complexe, et c'est ce terme qui est la source de la partie imaginaire du potentiel optique.

6.2 Brückner-Hartree-Fock (BHF) : généralités

On veut construire une interaction effective à partir d'une interaction nucléon-nucléon nue. Le Hamiltonien $H = \sum_{i=0}^A T_i + \sum_{i<j}^A V_{ij}$ peut se séparer en $H = H_0 + v$ avec :

$$H_0 = \sum_i T_i + U_i$$

qui décrit un système de particules indépendantes (potentiel à 1 corps), et

$$v = \sum_{i<j} V_{ij} - \sum_i U_i$$

interaction résiduelle qui décrit les corrélations existantes entre les particules issues des composantes à 2 corps.

Pour tous les i on a :

$$(T_i + U_i - E_i)\phi_i = 0$$

et la fonction d'onde du système non corrélé est (à 1 corps) :

$$\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_a\}_a$$

où le a dénote l'antisymétrisation. Φ est bien sûr solution du Hamiltonien non corrélé $(E_0 - H_0)\Phi = 0$.

Ψ est la solution du Hamiltonien complet $(E - H)\Psi$ que l'on peut réécrire :

$$(E_0 - H_0)\Psi = (v - E + E_0)\Psi.$$

si l'on définit $Q_0 = 1 - |\Phi\rangle\langle\Phi|$ qui est un projecteur vers les états différents de la solution non corrélée, on peut tirer (se vérifie en appliquant $(E_0 - H_0)$ à Ψ) :

$$\boxed{\Psi = \Phi + Q_0(E_0 - H_0)^{-1}(v - E + E_0)\Psi} . \quad (27)$$

Le premier terme de cette équation représente la fonction d'onde non corrélée, et le second terme correspond aux corrections à apporter à ce premier terme à cause des corrélations dues à l'interaction résiduelle. Noter que Ψ apparaît dans les deux membres de (27). On peut donc itérer (27) :

$$\Psi = \Phi + Q_0(E_0 - H_0)^{-1}(v - E + E_0)\Phi + \dots$$

et en définissant $g = Q_0(E_0 - H_0)^{-1}$ on obtient :

$$\boxed{\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} [g(v - E + E_0)]^n \Phi} \quad (28)$$

qui s'interprète comme Ψ la fonction d'onde du système complet est la fonction d'onde du système non corrélé sur lequel on fait agir une série de corrélations.

En introduisant (27) dans l'EDS complète on peut calculer l'énergie du système complet :

$$E = E_0 + \langle \Phi | v | \Psi \rangle$$

On calcule la correction d'énergie due aux corrélations $E - E_0$ en réinjectant l'expression de Ψ (28) dans l'équation précédente :

$$E - E_0 = \langle \Phi | v \sum_{n=0}^{\infty} [g(v - E + E_0)]^n | \Phi \rangle$$

$$E - E_0 = \langle \Phi | v | \Phi \rangle + \langle \Phi | v g (v - E + E_0) | \Phi \rangle + \dots$$

$$E - E_0 = \langle \Phi | v | \Phi \rangle + \langle \Phi | v g v | \Phi \rangle - (E - E_0) \langle \Phi | v g | \Phi \rangle$$

$$+ \langle \Phi | v g v g v | \Phi \rangle - (E - E_0) \langle \Phi | v g^2 v | \Phi \rangle + \dots$$

En se rappelant que $g\Phi = 0$ (définition de Q_0) et en réinjectant $E - E_0$ dans sa propre expression on obtient :

$$E - E_0 = \langle \Phi | v | \Phi \rangle + \langle \Phi | v g v | \Phi \rangle + \langle \Phi | v g v g v | \Phi \rangle + \dots$$

$$- \langle \Phi | v | \Phi \rangle \langle \Phi | v g^2 v | \Phi \rangle + \dots$$

c'est une série très compliquée que l'on peut resommer en regroupant les termes qui s'annulent, on peut aussi choisir de négliger le termes du second, troisième,... ordre.

En procédant à ces resommations (long compliqué et très technique), on aboutit à l'équation de Bethe et Goldstone qui définit la matrice G :

$$\boxed{G_{ij} = V_{ij} + V_{ij}Q_0(E - H_0)^{-1}G_{ij}} \quad (29)$$

cette matrice G est une interaction nucléon-nucléon "habillée" construite à partir de l'interaction nucléon-nucléon "nue". Cette nouvelle interaction effective a une dépendance en densité (par l'intermédiaire de l'opérateur de Pauli Q_0 qui est un projecteur sur les états différents du système non-corrélé, qui est en fait très peu différent de la solution complète du système).

Plus précisément pour une interaction effective dédiée aux problèmes de diffusion, les états de diffusions sont de la forme $k > k_F$ (k_F niveau de Fermi). Pour se faciliter les calculs on travaille dans la matière nucléaire infinie (un milieu de densité nucléaire homogène et infini dans lequel les fonctions propres sont des ondes planes). A la densité de la matière nucléaire ρ on associe k_F tel que $\rho = 2/3 \pi^2 k_F^3$. La matrice G dans un milieu de densité ρ pour une énergie incidente w est de la forme :

$$\boxed{g_{k_F}(w) = v + \sum_{\vec{a}, \vec{b} > \vec{k}_F} v \frac{|\vec{a}\vec{b}\rangle \langle \vec{a}\vec{b}|}{(w - e(a) - e(b))} g_{k_F}(w)}$$

Comme cette interaction effective est dédiée aux problèmes de diffusion, elle n'a de sens qu'entre un nucléon libre et un nucléon de la cible (lié). Si on calcule la diffusion élastique entre un nucléon libre ($k > k_F$) et les nucléons de la cible ($j < k_F$) on obtient l'opérateur de masse $M_{k_F}(k, E)$:

$$\boxed{M_{k_F}(k, E) = \sum_{\vec{j} < \vec{k}_F} \langle \vec{k}\vec{j} | g_{k_F}(E + e(j)) | \vec{k}\vec{j} \rangle_a} \quad (30)$$

où le a dénote l'antisymétrisation. Il a été montré que l'on peut assimiler cet opérateur de masse au potentiel optique $U_{k_F}(k, E)$ dans la matière nucléaire. $U_{k_F}(k, E)$ est non local, on peut le voir à sa double dépendance en énergie E et en impulsion k . On peut aussi le voir à l'antisymétrisation qui implique un terme d'échange non local. On peut rendre un potentiel optique local en faisant l'approximation sur couche d'énergie :

$$\boxed{U_{k_F}(E) = U_{k_F}(E, k_E)}$$

en forçant une dépendance entre k_E et E :

$$E = \hbar^2/2 k_E^2 + U_{k_F}(E, k_E).$$

Bien sûr comme c'est une approximation on y a perdu de la physique, il faudrait rétablir les dépendances en k et E , par exemple en rajoutant des masses effectives.

6.3 Potentiels de convolution

Un potentiel calculé dans la matière nucléaire infinie n'est pas très utile pour la plupart des problèmes (sauf les étoiles à neutrons) qui traitent de noyaux finis (quelques fm). Il faut donc pouvoir se ramener à un noyau fini. Il existe pour cela une approximation, l'approximation de la densité locale (local density approximation ou LDA en anglais). Etant donné un profil de densités $\rho(r)$ pour un noyau ${}^A_Z X$, (ex : Fig 7) on peut faire l'approximation :

$$U(r, E) = U(\rho(r), E) = \int U(\rho(r')) \delta(r - r') d^3 r'.$$

C'est-à-dire que l'on approxime le potentiel en un point r au potentiel dans la matière nucléaire de densité $\rho(r)$. On peut raffiner cette approche en rajoutant une portée non nulle :

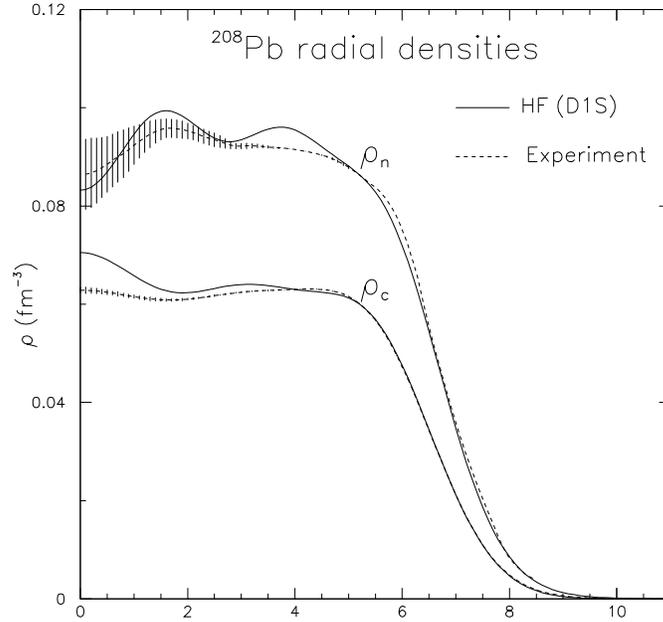


FIG. 7 – Densité radiale du ^{208}Pb calculée par le modèle Hatree-Fock avec l’interaction effective de Gogny D1S [7].

$$U(r, E) = \int \frac{U(\rho(r_1))}{\rho(r_1)} \rho(r') t(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'. \quad (31)$$

Le choix de la fonction t peut être multiple (gaussienne, Yukawa,...), ainsi que le choix de l’endroit r_1 où est évalué le potentiel optique ($r, r', (r + r')/2, \dots$). Ces choix sont non triviaux et montrent qu’il y a quelque chose d’artificiel dans la LDA. La LDA est quand même très utilisée car elle permet de faire aisément le lien entre les informations de structure nucléaire ($\rho(r)$) et les informations de réactions nucléaire (sections efficaces calculées à partir de U).

6.3.1 Potentiel “JLM”

C’est la construction ci-dessus qui est utilisée pour fabriquer le potentiel dit de JLM [5] qui est largement utilisé, tant pour les applications que pour tester les prédictions des modèles de structure nucléaire [6]. Par exemple, les calculs théoriques des figures 4 et 6, ont été réalisés avec ce potentiel calculé par convolution de l’opérateur de masse de JLM avec des densités nucléaires radiales tirées de calculs de champ moyen avec l’interaction de Gogny D1S [7]. Pour obtenir un si bon accord, les profondeurs de puits du potentiel ont dû être renormalisées [6]. Cependant, ces normalisations sont censées être indépendantes de la cible et ont été figées depuis 2001. Un exemple de potentiel calculé pour la diffusion $p+^{208}\text{Pb}$ entre 5 et 195 MeV est illustré sur la figure 12. Avec ces facteurs de normalisation figés, on peut alors tester et comparer les prédictions d’observables de diffusion qui découlent de différents modèles de structure nucléaire.

On peut par exemple s’intéresser à des noyaux déformés qui doivent être traités en prenant en compte le couplage du fondamental aux niveaux excités de basse énergie. Pour cela, on utilise des densités radiales déformées que l’on introduit dans une version modifiée de l’équation (31) dans lesquelles les coordonnées (r) sont toutes associées à une dépendance angulaire (\vec{r}). Ces potentiels sont introduits dans le système d’équations couplées (21), et le couplage des moments angulaires sélectionne les multipôles associés à chaque transition. Dans le cas de la diffusion inélastique d’un neutron sur du ^{155}Gd , la figure 8 montre une comparaison des sections efficaces élastiques et inélastiques calculées et mesurées. L’excellent accord que l’on constate sur cette figure s’interprète

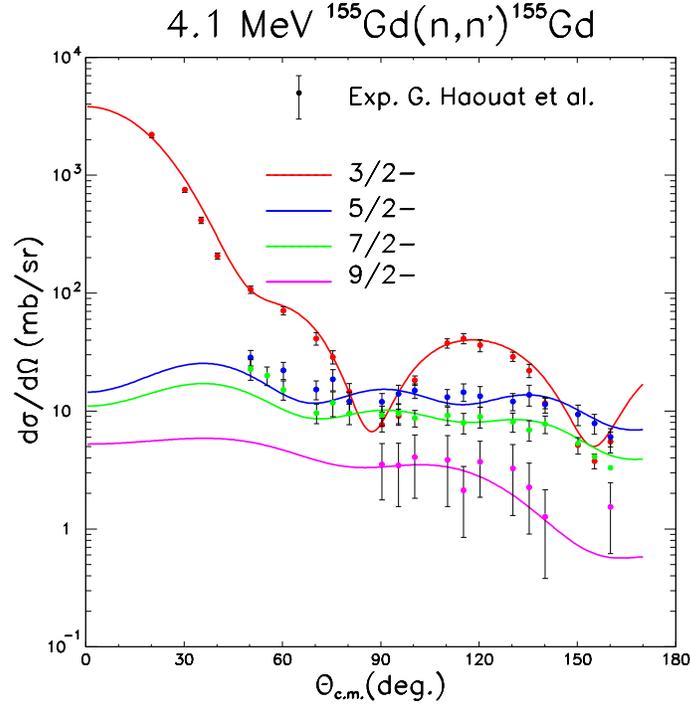


FIG. 8 – Comparaison des sections efficaces élastiques et inélastiques de diffusion $n+^{155}\text{Gd}$ à 4.1 MeV, mesurées et calculées par convolution de l’opérateur de masse JLM de [6], avec une densité calculée par le modèle Hartree-Fock-Bogoliubov déformé axialement.

comme une manifestation de la bonne qualité de la description de la densité radiale déformée du ^{155}Gd par le modèle Hartree-Fock-Bogoliubov déformé axialement. On peut dire que ce bon accord des observables de diffusion valide la description de la structure nucléaire sous-jacente.

On peut aller plus loin et s’intéresser à des noyaux éloignés de la vallée de stabilité. Ainsi, la figure 9 montre une comparaison entre des calculs de diffusion élastique et inélastique (vers le premier état 2^+) de protons sur différents isotopes pairs du soufre et les données expérimentales disponibles. On peut remarquer que cet échantillon comprend à la fois des isotopes stables ($^{32,34,36}\text{S}$), un isotope instable riche en protons (^{30}S), et des isotopes instables riches en neutrons ($^{38,40,42,44,46}\text{S}$). Pour ces calculs c’est la même interaction effective [6] qui a été utilisée et convoluée avec les densités radiales déformées issues de calculs de structure nucléaire de type Hamiltonien collectif (GCM). On peut constater un bon accord global avec toutes les données, sauf pour le ^{36}S . On attribue cet accord, d’une part à la bonne qualité de l’interaction effective, et notamment à sa partie insovectorielle, et d’autre part à la bonne description de la structure des cibles par le modèle employé. Reste le problème du ^{36}S , dont aucun modèle de structure nucléaire basé sur le champ moyen ne parvenait à prédire la collectivité [9]. Comme d’une part, les diffusions de protons sur les autres isotopes sont bien prédites par le modèle, et que d’autre part, l’échec des modèles basés sur le champ moyen est confirmée par la diffusion d’électrons, nous considérons que les modèles de structure nucléaire sont la cause du désaccord du calcul avec les données expérimentales. Avec la disponibilité récente des calculs de QRPA self consistante déformée avec l’interaction de Gogny, nous avons essayé de voir si ce nouveau modèle permet d’expliquer la diffusion inélastique $p+^{36}\text{S}$. La figure 10 compare les prédictions des modèles collectif (courbes rouge et bleue) et QRPA déformé (courbes verte et rose) avec les données expérimentales de diffusion de protons à 28 MeV. Alors que le calcul GCM surestime largement la diffusion inélastique vers le premier état 2^+ du ^{36}S , le calcul basé sur la QRPA déformée produit un bon accord avec les données. Cette figure est donc un très bon exemple du fait que la diffusion de nucléons permet de discriminer entre différentes descriptions de la structure nucléaire, pour peu que cette structure nucléaire soit incluse dans un calcul de potentiel optique de

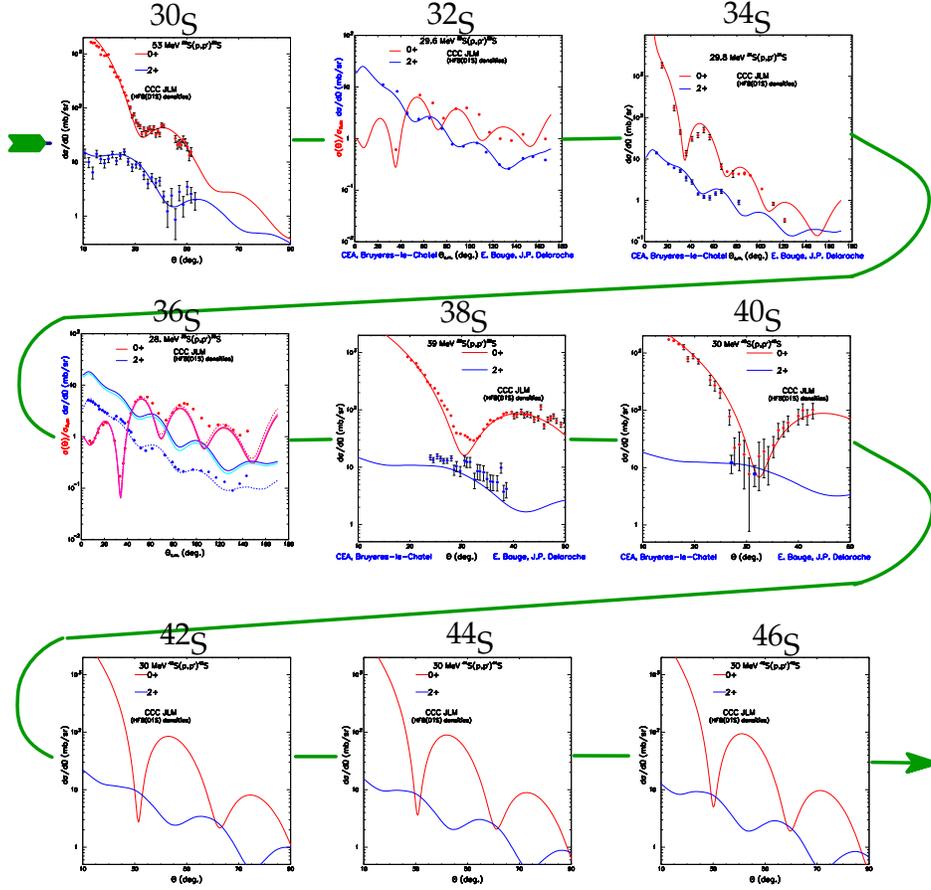


FIG. 9 – Calculs de diffusion élastique et inélastique (2_1^+) de proton sur les isotopes pairs du soufre depuis le ^{30}S jusqu'au ^{46}S . Les calculs (courbes) sont réalisés à l'aide du modèle optique JLM de [6], et les symboles représentent les données expérimentales disponibles.

type convolution.

6.3.2 Potentiel de Melbourne

Bien sûr, la construction décrite jusqu'ici n'est pas unique et il existe d'autres façons de relier le potentiel optique à la structure nucléaire. Par exemple, au lieu de calculer l'opérateur de masse dans la matière nucléaire et de passer par le LDA, on peut calculer l'opérateur de masse directement dans un noyau fini, toujours à partir d'une matrice g . Cette approche a été utilisée par [10] pour construire un potentiel optique non local à partir de la matrice densité de la cible et d'une matrice g . Le potentiel optique est alors de la forme :

$$U(\vec{r}, \vec{r}', E) = \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} (\phi_{\alpha}^*(\vec{r})g(\vec{r}, \vec{r}', E)\phi_{\beta}(\vec{r}) + \phi_{\alpha}^*(\vec{r}')g(\vec{r}, \vec{r}', E)\phi_{\beta}(\vec{r}')) \quad (32)$$

avec $\rho_{\alpha\beta}$ la matrice densité décrivant la cible sur la base des fonctions d'onde de particules indépendantes $\phi_{\alpha}(\vec{r})$, et $g(r, r', E)$ la matrice g . Ce potentiel optique est alors introduit dans l'EDS non locale suivante :

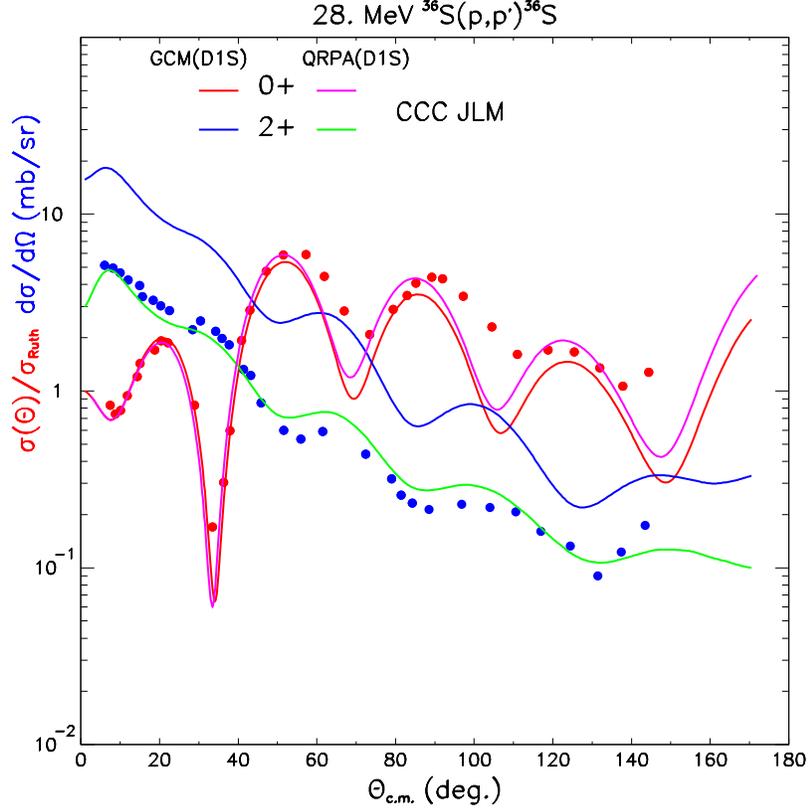


FIG. 10 – Calculs de diffusion élastique et inélastique (2_1^+) de proton sur le ^{36}S à 28 MeV. Les calculs (courbes) sont réalisés à l'aide du modèle optique JLM de [6], et les symboles représentent les données expérimentales disponibles.

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} - V_c(r) + E \right] \chi(\vec{r}) = \int U(\vec{r}, \vec{r}', E) \chi(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (33)$$

La diffusion inélastique peut être traitée en DWBA pour peu que le couplage ne soit pas trop important.

$$\frac{d\sigma(\vec{k}, \vec{k}')}{d\Omega} = \left| \langle \chi(\vec{k}) | \langle 0 | g | n_f \rangle | \chi(\vec{k}') \rangle \right|^2$$

Dans cette équation les $\chi(\vec{k})$ sont solution de (33), g est la même matrice g que dans (32), $|0\rangle$ est l'état fondamental initial et $|n_f\rangle$ l'état excité final calculé par le même modèle de structure qui donne les $\rho_{\alpha\beta}$ et $\phi_\alpha(\vec{r})$ de (32). Au final, on a une description cohérente de la diffusion élastique et inélastique, basée sur l'information de structure tirée de modèles. De plus, la matrice g de [10] est directement tirée de calculs de matrice g à partir d'une interaction nucléaire réaliste, sans aucun ajustement phénoménologique : ce potentiel est complètement microscopique. La figure 11 montre quelques résultats de calculs de sections efficaces élastiques et inélastiques de diffusion de proton sur du ^{208}Pb . L'accord est excellent, surtout si l'on considère qu'aucun paramètre n'a été ajusté pour ce calcul. De plus, sur la partie gauche de cette figure on peut voir deux types de courbes : une courbe pointillée correspondant à un calcul de structure en champ moyen pur (Hartree-Fock) et une courbe pleine correspondant à un calcul de RPA qui contient des corrélations qui vont bien au-delà de la description en termes de particules indépendantes. Sur cette figure, on peut voir que la description RPA de la structure permet une restitution des données légèrement meilleure que

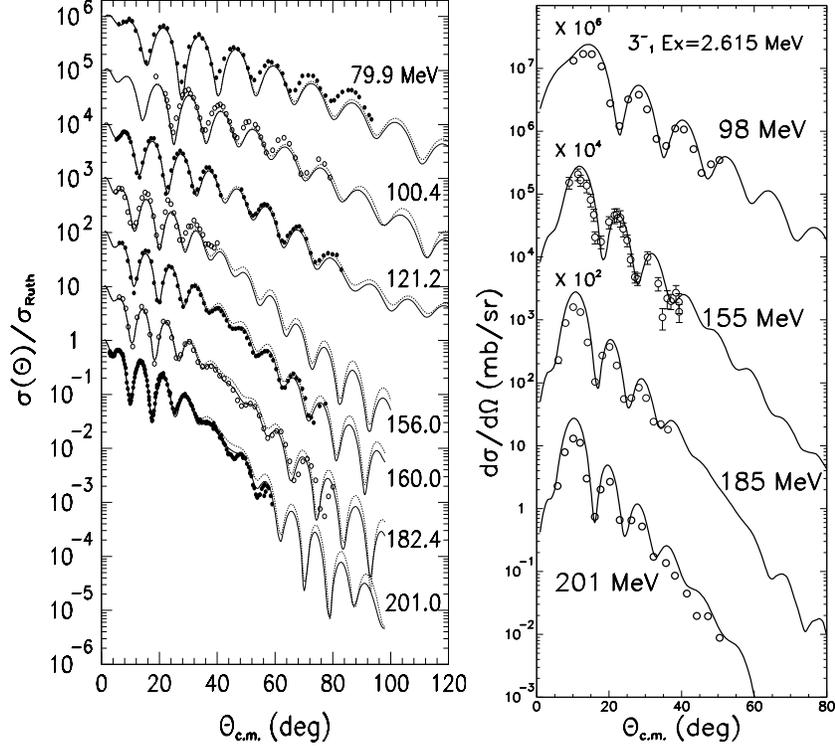


FIG. 11 – Calculs de diffusion élastique (à gauche) et inélastique (3_1^- à droite) de proton sur le ^{208}Pb . Les calculs (courbes) sont réalisés à l'aide du modèle optique de [10], et les symboles représentent les données expérimentales disponibles.

la description HF : c'est un autre exemple où la diffusion de nucléons permet de discriminer entre deux modèles de structure nucléaire.

6.3.3 Potentiel dans l'espace des impulsions

Le potentiel optique peut aussi se calculer dans l'espace des impulsions, c'est d'ailleurs ainsi qu'est écrit l'opérateur de masse dans l'équation (30). Une expression générale du potentiel optique dans l'espace des impulsions est

$$U(\vec{k}, \vec{k}') = \int \langle \vec{k}' \vec{p}' | T | \vec{k} \vec{p} \rangle \rho(\vec{p}', \vec{p}) d\vec{p} d\vec{p}'$$

avec $\rho(\vec{p}', \vec{p})$ la densité non locale du noyau cible, et $\langle \vec{k}' \vec{p}' | T | \vec{k} \vec{p} \rangle$ l'élément de matrice non local d'une interaction effective g dépendante de la densité entre un projectile (\vec{k} et \vec{k}') et une cible (\vec{p} et \vec{p}'). Dans cet élément de matrice se cache encore une intégration sur l'espace, le calcul de ce potentiel optique sans approximation nécessite donc d'évaluer une intégrale de dimension 9! Ce calcul exact n'a jamais été réalisé sans approximation. Différentes approximations de ce calcul comme [11] ou [12] ont été utilisées dans le passé, mais sans véritable contrôle de ce qui est négligé dans ces approximations. Or, en supposant que la dépendance en densité de l'interaction effective g est de symétrie sphérique on peut réduire [13] cette expression du modèle optique à

$$U(\vec{k}, \vec{k}') = \int \rho(\vec{q}, \vec{P}) g_\infty d\vec{P} + \int \rho(\vec{Q}, \vec{P}) \int_0^\infty \frac{j_1(Z|\vec{Q} - \vec{q}|)}{|\vec{Q} - \vec{q}|} \frac{\partial g_z}{\partial Z} Z^3 dZ d\vec{P} d\vec{Q} \quad (34)$$

avec $\vec{P} = (\vec{p} + \vec{p}')/2$, $\vec{Q} = \vec{p}' - \vec{p}$, $\vec{K} = (\vec{k} + \vec{k}')/2$, $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$, j_1 la fonction de Bessel sphérique d'indice 1, et g_z l'interaction effective évaluée à la densité correspondant au rayon Z en fonction des coordonnées d'impulsion P , K , q et Q . g_∞ est l'interaction effective libre à $Z = \infty$. Dans le premier terme de cette expression qui ne fait apparaître que l'interaction libre g_∞ , on peut reconnaître le potentiel de [12], c'est-à-dire que l'approximation de [12] néglige la dépendance en densité de l'interaction effective. Le second terme est plus compliqué (intégrale de dimension 7) et cette correction à [12] réintroduit la dépendance en densité. Comme l'interaction effective varie dans l'espace en fonction de la densité radiale, on peut alors écrire :

$$\frac{\partial g_z}{\partial Z} = \frac{\partial g_z}{\partial \rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial Z}.$$

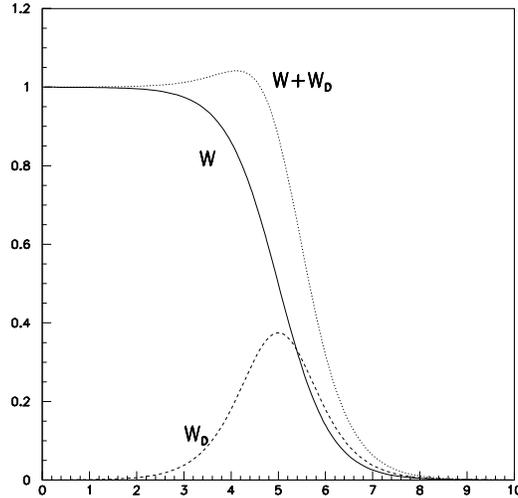
Lorsque cette expression est réintroduite dans (34), on voit que l'influence de la dépendance en densité de l'interaction effective g_z est modulée par la dérivée de la densité radiale, c'est-à-dire que la dépendance en densité de l'interaction effective ne "s'exprime" que lorsque la densité varie fortement, c'est-à-dire essentiellement à la surface des noyaux. Cette modulation explique le succès rencontré par l'approche de [12] à haute énergie où la diffusion de nucléons est majoritairement sensible au volume du noyau qui est bien approximé par le premier terme de (34). A basse énergie cependant, lorsque le projectile ne pénètre que faiblement la cible, le second terme de (34) devient important et la dépendance en densité de l'interaction est testée finement.

7 Aspects phénoménologiques du potentiel optique

Souvent on ne calcule pas le potentiel optique à partir de la théorie mais on se donne une forme fonctionnelle a priori pour la dépendance radiale du potentiel optique. Habituellement pour un potentiel optique $U = V + iW$ on prend :

$$V(r, E) = V(E)f(r, R_v, a_v) + 4V_D(E)f'(r, R_{vD}, a_{vD})$$

$$W(r, E) = W(E)f(r, R_w, a_w) + 4W_D(E)f'(r, R_{wD}, a_{wD})$$



avec :

$$f(r, R, a) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$f'(r, R, a) = \frac{d}{dr}f(r, R, a)$$

Sur la figure 12 on peut voir qu'une telle paramétrisation permet bien de rendre compte d'un potentiel optique calculé de façon plus microscopique.

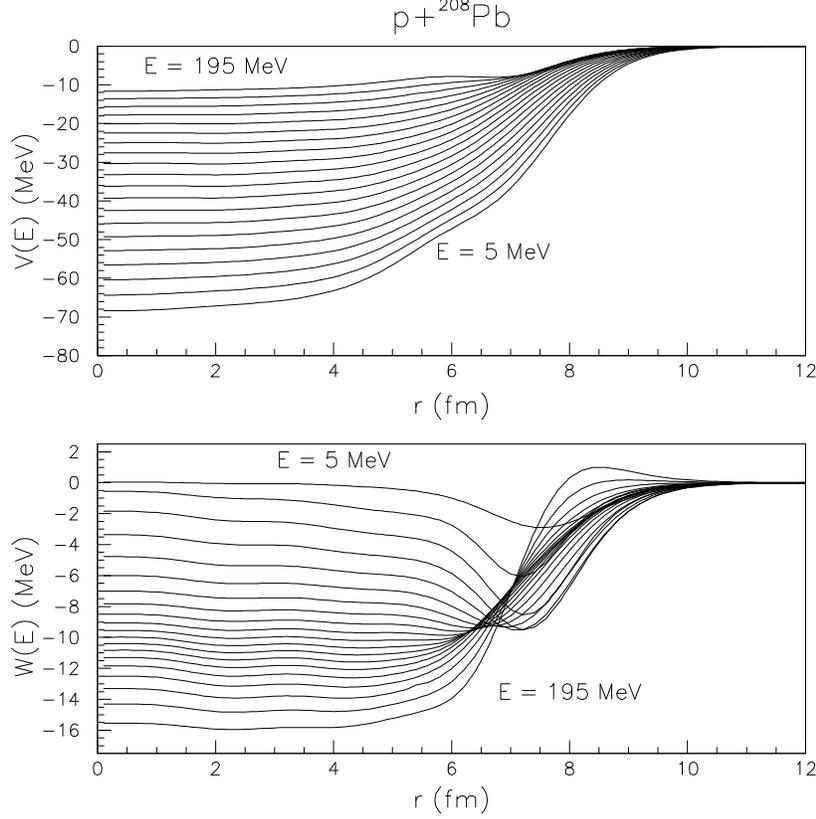


FIG. 12 – Potentiel optique p+²⁰⁸Pb calculé à partir d’une approche de convolution avec un potentiel optique dans la matière nucléaire calculé à partir d’une interaction effective.

Il suffit alors de varier les paramètres ($V(E)$, $W(E)$, ..., R_v, \dots , a_v, \dots) jusqu’à obtenir un bon accord avec les mesures des observables calculables à partir du potentiel optique (σ_{el} , $d\sigma/d\Omega$, σ_{tot} , σ_{reac}).

Il faut cependant remarquer qu’il est difficile d’apprendre quoi que ce soit de quantitatif sur la structure des noyaux dans une approche qui utilise une quinzaine de paramètres ajustés. Ces approches seront donc plus réservées aux applications car elles permettent une restitution quasi-parfaite des données expérimentales.

8 Anti-résumé

Les sujets que je n’ai pas abordés, faute de temps.

- Le potentiel spin-orbite pour la diffusion, et plus généralement la diffusion de particules avec spin. Très important, surtout si on s’intéresse aux observables de polarisation. Partiellement abordé dans le chapitre sur les couplages.

- Le potentiel Coulombien, ce potentiel de longue portée vient compliquer les calculs de diffusion, mais ne change pas fondamentalement la physique décrite dans ce cours.

- Approche relativiste : on peut aussi écrire le potentiel optique dans une approche relativiste. Les calculs se font alors à l'aide de l'équation de Dirac (au lieu de Schrödinger). Le potentiel SO vient alors naturellement. Voir par exemple [14].

- Partie du potentiel dépendante de l'isospin : sensibilité au type (n ou p) des nucléons. Important pour les noyaux exotiques très asymétriques.

- Le potentiel optique noyau-noyau : il faut non seulement prendre en compte les excitations virtuelles de la cible (comme dans le potentiel optique nucléon-noyau) mais aussi celles du projectile.

- Relations de dispersion (voir Annexe et [15]).

9 Annexe : Relations de dispersion

On peut voir les relations de dispersion comme une conséquence de la causalité : la réponse (effet) ne peut précéder l'excitation (cause).

On part de l'EDS :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + u(E) - E \right) \psi_E(r) = 0$$

avec :

$$u(E) = v(E) + iW(E).$$

Par transformée de Fourier :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int u(E) e^{iEt} dE$$

$$\psi(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int \phi_E(r) e^{iEt} dE$$

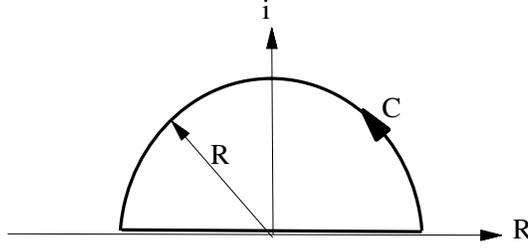
avec $u(t)$ qui peut être considéré comme l'excitation et $\psi(r, t)$ comme la réponse à cette excitation. L'EDS dans l'espace t devient :

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-t') \psi(r, t') dt' = i\hbar \frac{d}{dt} \psi(r, t).$$

Cette équation peut se comprendre ainsi : la réponse ($\psi(r, t)$) est due à une superposition de causes à plusieurs instants. La causalité implique que $u(t-t') = 0$ pour $t < t'$.

Si on prend E complexe $E = E_r + iE_i$ avec $E_i > 0$, $u(E)$ est régulier dans le demi-plan supérieur (par TF inverse) :

$$u(e) = \int_0^{\infty} e^{-E_i t} u(t) e^{-iE_r t} dt$$



—

si il n'y avait pas la causalité il faudrait intégrer un $u(t)$ non nul entre $-\infty$ et $+\infty$ et l'intégrale de e^{-Eit} divergerait pour $t < 0$.

En se rappelant le théorème de Cauchy que l'on applique à un contour C, demi-cercle du demi-plan supérieur dont la partie rectiligne longe l'axe réel :

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{g(z')}{z' - z} dz'$$

et en faisant tendre R le rayon du C vers l'infini, seule la partie du contour longeant l'axe des réels compte pour l'intégrale :

$$g(z) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x')}{x' - z} dx'.$$

Cette intégrale présente un point singulier en x. En utilisant le théorème des résidus :

$$g(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{g(x')}{x' - z} dx' + \int_{x+\epsilon}^{+\infty} \frac{g(x')}{x' - z} dx' \right) + 1/2 g(x).$$

et on a finalement :

$$g(z) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x')}{x' - z} dx'$$

où P note la partie principale de l'intégrale.

En revenant à $u(E)$ on peut écrire :

$$u(E) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(E')}{E' - E} dE',$$

et pour $v(E)$:

$$v(E) = \text{Re}(u(E)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}(u(E'))}{E' - E} dE'$$

$$v(E) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(E')}{E' - E} dE' = \Delta v_w(E)$$

Cette équation montre qu'il y a une relation entre v et w . En fait, seule la partie Q du potentiel est soumise à la causalité :

$$V(E) = V_{HF}(E) + \Delta V_W(E)$$

avec $V_{HF}(E)$ la partie de V associée au sous-espace P, et $\Delta V_W(E)$ la partie de V associée au sous-espace Q.

Les corrections dues aux relations de dispersion sont importantes si l'on veut pouvoir reproduire les observables physiques avec une grande précision (moins de 1%).

Références

- [1] B. Frois, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **38**, 152 (1977).
- [2] D. Goutte, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **45**, 1618 (1980).
- [3] H. Scheit, *et al.* Phys. Rev. Lett. **77**, 3967 (1996).
- [4] E. Bauge, S. Hilaire, "Modélisation et évaluation de données", cours de l'école Joliot Curie 2006 "Le cycle électronucléaire : de la fission aux nouvelles filières", <http://www.cenbg.in2p3.fr/joliot-curie>.
- [5] *Many body theory of nuclear matter*, J.P. Jeukenne, A. Lejeune, C. Mahaux, Phys. Rep. **25C**, 87 (1976); J.P. Jeukenne, A. Lejeune, and C. Mahaux, Phys. Rev. C **16**, 80 (1977).
- [6] *Semimicroscopic nucleon-nucleus spherical optical model potential for nuclei with $A \geq 40$ up to 200 MeV*. Bauge, J.P. Delaroche, M. Girod, Phys. Rev. C **58**, 1118 (1998); *Lane-consistent semimicroscopic nucleon-nucleus optical model* E. Bauge, J.P. Delaroche, M. Girod, Phys. Rev. C **63**, 024607 (2001).
- [7] J.F. Berger, M. Girod, and D. Gogny, Comp. Phys. Comm. **63**, 365 (1990).
- [8] *Analysis of the scattering of nuclear particles by collective nuclei in terms of the coupled-channel calculation*, T. Tamura, Rev. Mod. Phys. **34**, 679 (1965).
- [9] E. Khan *et al.*, Nucl. Phys. **A694**, 103 (2001); F. Marechal *et al.*, Phys. Rev. C **60** 034615 (1999).
- [10] *Nucleon-nucleus scattering : a microscopic non-relativistic approach*, K. Amos, P.J. Dortmans, H.V. von Geramb, S. Karataglidis, J. Raynal, Adv. Nucl. Phys. **25**, Plenum (New York) ,2001.
- [11] H.F. Arellano, F.A. Brieva, W.G. Love, Phys. Rev. C **52** 301 (1995).
- [12] A. Kerman, H. McManus, R.M. Thaler, Ann. Phys. (N.Y.) **8** 551 (1959)
- [13] H.F. Arellano, E. Bauge, Phys. Rev. C **76** 014613 (2007).
- [14] *Global Dirac phenomenology for proton nucleus elastic scattering*, E.D. Cooper, S. Hama. B.C. Clark, R.L. Mercer, Phys. Rev. C **47**,297 (1993).
- [15] *Causality and the threshold anomaly of the nucleus-nucleus potential*, C. Mahaux, H. Ngo, G.R. Satchler, Nucl. Phys. **A449**, 354 (1986).
- [16] *The optical model of elastic scattering*, P.E. Hodgson, clarendon press (Oxford) 1963; *Nuclear reactions and nuclear structure*, P.E. Hodgson, Oxford University Press, 1971
- [17] *Direct Nuclear Reactions*, N.K. Glenderling, Accademic (New York) 1983.
- [18] J. Raynal, Phys. Rev. C **23**, 2571 (1981).
- [19] *Theory of nuclear reactions*, P. Frölich, R. Lipperheide, Clarendon Press (Oxford) 1996.
- [20] *Proceedings of the conference on nucleon-nucleus optical model up to 200 MeV*, 1996 OECD Paris (aussi à HTTP ://www.nea.fr/html/science/om200)