

**1997**

« Structure nucléaire : un nouvel horizon »  
Maubuisson, 16<sup>ème</sup> session, 8-13 septembre 1997

Table des matières détaillée

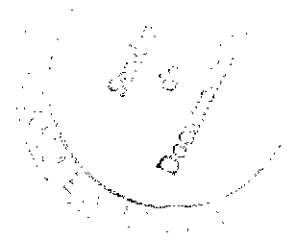
Avant-propos Y. Abgrall	p. i
I - Le problème à N-corps : approches relativistes J.-F. Mathiot	p. 2
II - Le problème à N-corps : approches non relativistes J.-P. Balizot	p. 25
III - Le modèle en couches : vers une description unifiée de la structure nucléaire A. Poves	p. 43
IV - Corrélations d'appariement dans des conditions extrêmes P.-H. Heenen	p. 78
V - Collectives excitations in nuclei P. Chomaz	p. 107
VI - Noyaux exotiques : production, propriétés et spécificités P. Van Duppen	p. 183
VII - Noyaux exotiques : Haloes N. Orr	p. 205
VIII - Super et hyper déformation, du discret au continu, d'EUROGAM à EUROBALL B. Gall	p. 227
IX - The spectroscopy of fission fragments W.R. Phillips	p. 283
X - Détection des ondes gravitationnelles P. Hello	p. 297
Séminaires Jeunes	p. 337
Liste des participants	p. 341

**ECOLE INTERNATIONALE JOLIOT-CURIE**

**DE PHYSIQUE NUCLEAIRE**

Maubuisson, France

16<sup>ème</sup> session, 8-13 Septembre 1997



L'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules du CNRS

en collaboration avec

La Direction des Sciences de la Matière du CEA

et le Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique

**STRUCTURE NUCLEAIRE :**  
*un nouvel horizon*

*J.-F. MATHIOT*

*J.-P. BLAIZOT*

*A. POVES*

*P.-H. HEENEN*

*Ph. CHOMAZ*

*P. VAN DUPPEN*

*N. ORR*

*B. GALL*

*W.R. PHILLIPS*

*P. HELLO*

### **Conseil Scientifique**

Y. ABGRALL (CEN Bordeaux), N. ALAMANOS (CEA Saclay), F. AZAIEZ (IPN Orsay), J.-P. BLAIZOT (CEA Saclay) P. BONCHE (CEA Saclay), Ph. CHOMAZ (GANIL Caen), J. CUGNON (U Liège), G. DUCHÊNE (IReS Strasbourg), J.-P. DUFOUR (CEN Bordeaux), Y. EL MASRI (UC Louvain), R. FRASCARIA (IPN Orsay), J. GOSSET (CEA Saclay), D. GOUTTE (CEA Bruyères-le-Châtel), J.-Y. GROSSIORD (IPN Lyon), P.-H. HEENEN (UL Bruxelles), C. LE BRUN (LPC Caen), C. LECLERCQ-WILLAIN (UL Bruxelles), A. LEFEBVRE (CSNSM Orsay), M. LEWITOWICZ (GANIL Caen), J.-F. MATHIOT (LPC Clermont), J. MEYER (IPN Lyon), Ch. MIEHE (IReS Strasbourg), D. SANTOS (ISN Grenoble), F. SEBILLE (SUBATECH Nantes), C. SEMAY (U Mons), B. SILVESTRE-BRAC (ISN Grenoble), E. SURAUD (LPQ Toulouse).

### **Comité d'Organisation**

Y. ABGRALL, N. ALAMANOS, P.-H. HEENEN, Ch. MIEHE, E. SURAUD.

*Cours enseignés aux précédentes sessions de l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire :*

1982 : COLLISIONS NUCLEAIRES AUX ENERGIES VOISINES DE L'ENERGIE DE FERMI  
H. Flocard, J. Hüfner, J. Richert, B. Tamain, R. Babinet, J. Cugnon, D. Guerreau, C. Guet,  
J. Menet, H. Pirner

1983 : STRUCTURE NUCLEAIRE AUX FRONTIERES DE LA STABILITE  
J.-P. Blaizot, M. Epherre, C. Mahaux, M. Meyer, H. Sergolle, Z. Szymanski, S. Della Negra,  
J. Delorme, S. Gales, D. Gogny, B. Haas, J.-P. Vivien.

1984 : MESONS, BARYONS, QUARKS ET PHYSIQUE NUCLEAIRE  
B. Desplanques, B. Frois, U. Gastaldi, E. Pedrazzi, G. Ripka, J. Arvieux, J.-J. Aubert,  
M. Ericson, G. London, B. Vignon.

1985 : LA MATIERE NUCLEAIRE DANS TOUS SES ETATS  
P. Bonche, J. Cugnon, R. Babinet, J.-F. Mathiot, L. Van Hove, M. Buenerd, J. Galin, M.-C. Lemaire,  
J. Meyer.

1986 : SYMETRIES ET PHYSIQUE NUCLEAIRE  
P. Deponnmer, S. Gales, Nguyen Van Giai, P. Guichon, P. Schuck, D. Goutte, M. Vergnes,  
M. Avenier, P. Hubert, G. Girardi, B. Loiseau.

1987 : AU-DELA DU CHAMP MOYEN  
K. Dietrich, G.-J. Wagner, C. Grégoire, X. Campi, B. Silvestre-Brac, S. Platchkov, B. Mayer,  
Y. Abgrall, O. Bohigas, P. Grangé, C. Signarbieux.

1988 : a/ INSTRUMENTATION EN PHYSIQUE NUCLEAIRE ET PHYSIQUE DES PARTICULES  
F. Sauli, V. Comparat, M. Suffert, J. Séguinot, P. Farthouat, R. Wigmans, B. Equer, D. L'Hôte,  
L. Fayard, H. Videau, J.-M. Durand, A. Boudart, H. Fanet, F. Bourgeois, D. Perret-Gallix,  
L. Gonzalez-Mestres (*en vente aux éditions de Physique, Paris*)

b/ LA RECHERCHE DU PLASMA DE QUARKS ET DE GLUONS : LES COLLISIONS  
D'IONS LOURDS ULTRARELATIVISTES - ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE  
J.-P. Blaizot, J.-N. Capdevielle, A. Capella, J. Gosset, G. Landaud, P. Lutz, A. Morel, B. Pire,  
D. Vautherin.

1989 : NUCLEONS DANS LE NOYAU, MAIS ENCORE...  
P. Grangé, J.-F. Mathiot, M. Ericson, H.-J. Pirner, M. Roy-Stephan, J. Delorme, R. Frascaria,  
S. Gales, A. Magnon, M. Arnould.

1990 : LA PHYSIQUE NUCLEAIRE DU LABORATOIRE AUX ETOILES  
N. Prantzos, M. Arnould, E. Schatzman, J.-P. Thibaud, P. Descouvemont, J.-P. Dufour,  
P. Quentin, E. Suraud, R. Schaeffer.

1991 : LES NOYAUX EN PLEINES FORMES  
Z. Szymanski, P.-h. Heenen, J.-F. Berger, K. Heyde, B. Haas, R. Janssens, D. Paya, D. Gogny,  
G. Huber, S. Bjørnholm, M. Brack.

1992 : MATIERE HADRONIQUE OU... AUJOURD'HUI ET DEMAIN AVEC LES ELECTRONS  
V. Breton, H. Fonvicille, B. Frois, R. Van de Vyver, G. Smadja, J. Martino, J.-P. Blaizot,  
J.-F. Mathiot, P. Vernin, X. Artru, J. Remillieux

- 1994 : **PHYSIQUE NUCLEAIRE INSTRUMENTALE** : *des éléments pour un bon choix*  
Ch. Bourgeois, J.-M. Brom, Y. El Masri, W. Mittig, D. L'Hôte, J.-P. Didelez, P. Desesquelles,  
F. Hannachi, G. Fournier, M. Maire, L. Valentin.
- 1995 : **NOYAUX EN COLLISIONS**  
R. Balian, B. Remaud, E. Suraud, D. Durand, A. Gobbi, J. Cugnon, O. Drapier, J. Govaerts,  
R. Prieels.
- 1996 : **PRODUCTION D'ENERGIE NUCLEAIRE ET TRAITEMENT DES DECHETS** : *des filières  
d'aujourd'hui aux solutions innovantes*  
J.-P. Dufour, G. Barreau, P. Reuss, J. Cugnon, J. Fréhaut, Y. Quéré, H. Métivier,  
J.-P. Schapira, J.-M. Cavedon, M. Delpech, J.-M. Loiseaux, J.-M. Lagniel, S. Leray.

*Ces cours peuvent être consultés dans les bibliothèques des laboratoires de l'IN2P3, du CEA, du FNRS belge et au CERN. Les cours 1989,1996 encore disponibles peuvent être obtenus sur demande auprès de :*

**Pascale CHAMBON**  
**CEN Bordeaux**  
**BP 120**  
**33175 GRADIGNAN Cedex - France**  
**☎ 05 56 89 18 00**  
*E-mail : [chambon@cenbg.in2p3.fr](mailto:chambon@cenbg.in2p3.fr)*

# TABLE DES MATIERES

## AVANT-PROPOS

Y. ABGRALL

## LE PROBLEME A N-CORPS : *Approches Relativistes*

J.-F. MATHIOT

1. Préambule.....	2
2. Les fondements théoriques de l'approche de champ moyen relativiste .....	2
1- Quelques faits expérimentaux et ordres de grandeur.....	2
2- Quelques rappels sur le potentiel nucléon-nucléon .....	4
3- Le modèle de champ moyen relativiste.....	8
3. Application à la structure microscopique des noyaux .....	11
1- Mécanisme de saturation de la matière nucléaire .....	11
2- Différents niveaux d'approximation.....	13
3- Interaction effective équivalente à la Skyrme.....	15
4- Corrections de portée finie.....	16
5- Dépendance en isospin.....	17
6- Masse effective relativiste et non-relativiste .....	17
4. Discussion critique des résultats récents.....	18
1- Mécanisme de saturation de la matière nucléaire .....	18
2- Dépendance en N-Z de l'interaction effective.....	19
5. Conclusions et perspectives .....	21
Références .....	22

## LE PROBLEME A N-CORPS : *Approches non Relativistes*

J.-P. BLAIZOT

1. Introduction .....	25
2. Noyaux et matière nucléaire.....	26
3. Gaz de Fermi. Liquide de Fermi .....	30
4. Théorie du champ moyen.....	33
5. Matière nucléaire calculée avec une force effective .....	34
6. Problèmes liés au cœur dur .....	37
7. Calculs exacts.....	38
Références .....	39

## LE MODELE EN COUCHES : *vers une description unifiée de la structure nucléaire*

A. POTES

1. Introduction .....	43
2. Basic notions of the spherical shell model.....	43
3. Realistic effective interactions .....	48
4. The solution of the secular problem.....	50
5. Spherical shell model and deformation .....	57
6. Shell model and nuclei far from stability .....	66
7. Conclusions .....	71
References .....	73

## CORRELATIONS D'APPARIEMENT DANS DES CONDITIONS EXTREMES

*P.-H. HEENEN*

I.	Introduction .....	78
II.	Les noyaux éloignés de la stabilité.....	81
	A- L'approximation BCS .....	81
	B- La transformation de Bogoliubov.....	81
	C- Les équations HFB .....	82
	D- La base canonique .....	83
	E- L'espace des coordonnées .....	84
III.	Le régime des corrélations d'appariement faibles .....	91
	A- Position du problème .....	91
	B- Variation après projection .....	95
	C- L'approximation de Kamlah .....	97
	D- La prescription de Lipkin-Nogami .....	99
	Références .....	104

## COLLECTIVES EXCITATIONS IN NUCLEI

*Ph. CHOMAZ*

1.	Introduction .....	107
2.	Phenomenology of giant resonances .....	108
	1- An example : the giant dipole resonance .....	108
	2- Other resonances .....	116
	3- Physical interpretation of angular distribution : diffraction effects.....	127
	4- Giant resonances built on excited states .....	127
3.	Theoretical descriptions .....	137
	1- Macroscopic models of surface vibrations .....	137
	2- Mean field approximation and beyond .....	140
	3- Boson expansion methods .....	156
4.	Conclusions and perspectives .....	163
5.	Appendix .....	164
	References .....	173

## NOYAUX EXOTIQUES : *production, propriétés et spécificités*

*P. VAN DUPPEN*

I.	Introduction .....	183
II.	The production of exotic nuclei .....	185
	1- Nuclear reactions to produce exotic nuclei.....	186
	2- Separating exotic nuclei.....	187
III.	The Physics .....	193
	1- Single-neutron states in $^{133}\text{Sn}$ .....	193
	2- Shape coexistence around $Z = 82$ .....	195
	3- $^{100}\text{Sn}$ and other exotics .....	197
	4- Coulomb excitation measurements .....	199
	5- And other reaction work .....	201
IV.	Conclusion and outlook.....	201
V.	References .....	202

## NOYAUX EXOTIQUES : *Haloes*

*N. ORR*

I.	Introduction .....	205
II.	General properties .....	209
III.	Conditions governing formation .....	213
IV.	Resonances and correlations ? .....	217
V.	Conclusions and perspectives .....	221
VI.	Further reading .....	223
	Bibliography .....	224

## SUPER ET HYPER DEFORMATION, DU DISCRET AU CONTINU, D'EUROGAM A EUROBALL

<i>B. GALL</i>	
Historique.....	227
I. Noyau superdéformé.....	228
1. Déformation nucléaire.....	228
2. Nombres magiques, influence de la déformation.....	229
3. Orbitales intruses.....	230
4. Excitation du noyau.....	230
5. Bandes de rotation.....	231
6. Mode de production.....	234
II. Moyens de détection.....	236
1. Notion de coïncidence.....	236
2. Analyse de données à haut fold.....	236
3. Grandeurs mesurables.....	238
4. Grandeurs dérivées.....	238
5. MultidéTECTEURS : de EUROGAM à EUROBALL.....	245
6. DéTECTEURS additionnels.....	252
III. Evidences expérimentales.....	254
1. Super et hyperdéformation à bas spin (A~240).....	254
2. Déformation et puits superdéformé (A~60, 80, 130, 150 et 190).....	254
3. Structures excitées.....	255
4. Routhians.....	255
5. Moment d'inertie dynamique.....	257
6. Croisements d'orbitales.....	259
7. Appariement nucléaire.....	261
8. Mesure de facteur gyromagnétique.....	265
9. Bandes identiques.....	267
10. Population des bandes superdéformées.....	270
11. Désexcitation vers des états de déformation "normale".....	272
12. Déformation et vibrations octupolaires.....	276
13. Symétrie C4.....	277
14. Bandes dipolaires.....	278
15. Terminaison de bandes.....	278
16. Polarisation du cœur.....	279
Conclusion.....	280
Bibliographie.....	281

## THE SPECTROSCOPY OF FISSION FRAGMENTS

<i>W.R. PHILLIPS</i>	
1. Introduction.....	283
2. Mass, charge and spin distributions.....	284
3. Experimental techniques.....	286
1- Directional correlations.....	287
2- Polarizations.....	288
3- Lifetimes.....	290
4. New spectroscopic results.....	292
1- Octupole correlations effects in nuclei near mass 100.....	292
2- Shape trends in the mass 100 region - Lifetime measurements.....	293
3- Two-phonons vibrational states.....	294
References.....	295

## DETECTION DES ONDES GRAVITATIONNELLES

<i>P. HELLO</i>	
1. Les ondes gravitationnelles et les sources astrophysiques.....	297
1- Les ondes gravitationnelles dans le cadre de la relativité générale.....	297
2- Effet d'une onde gravitationnelle.....	299



3-	Sources d'onde gravitationnelle et puissances rayonnées .....	300
4-	Sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles .....	302
2.	Détection des ondes gravitationnelles - Généralités .....	305
3.	Barres résonantes ou barres de Weber .....	306
1-	Les barres résonantes dans le monde .....	306
2-	Réponse d'une barre à une onde gravitationnelle.....	307
3-	Extraction du signal mécanique : le transducteur .....	308
4-	Bruits et bande passante .....	310
5-	Limite quantique .....	311
6-	Barres et astrophysique .....	312
4.	Détection interférométrique des ondes gravitationnelles.....	312
1-	Principe : phase minimale détectable.....	313
2-	Augmenter la longueur : cavités Fabry-Perot .....	316
3-	Augmenter la puissance : le recyclage.....	317
4-	Le bruit sismique et son filtrage .....	318
5-	Les bruits thermiques .....	320
6-	Les bruits du laser .....	322
7-	Autres bruits.....	323
8-	Limite quantique .....	324
9-	La collaboration VIRGO.....	325
5.	Perspectives pour l'astronomie gravitationnelle.....	328
	Appendice 1 : notion de bruit thermique.....	329
	Appendice 2 : les cavités Fabry-Perot.....	332
	Références .....	335
 <b>SEMINAIRES JEUNES .....</b>		<b>337</b>
 <b>LISTE DES PARTICIPANTS .....</b>		<b>341</b>

## Avant-propos

*Des progrès très significatifs dans la compréhension de la structure des noyaux ont été réalisés au cours de ces dernières années. Des informations importantes, quelquefois surprenantes, concernant le comportement des noyaux à grande énergie d'excitation, à haut spin ou loin de la stabilité ont ainsi été obtenues.*

*L'apparition très prochaine d'une nouvelle génération de faisceaux radioactifs, la mise à disposition de multidétecteurs sophistiqués, et parallèlement, la maîtrise d'approches théoriques de plus en plus performantes, vont permettre de poursuivre cette étape passionnante de l'étude de la structure nucléaire.*

*C'est précisément pour faire le point dans ce domaine et dégager les perspectives nouvelles qui se font jour, qu'était consacrée l'Ecole Joliot-Curie 97 qui s'est tenue à Maubuisson du 8 au 13 septembre.*

*Comme il est d'usage, une partie de la session a également été consacrée à un autre thème d'actualité de la physique, à savoir, la détection des ondes gravitationnelles.*

*Avec 75 participants, la fréquentation en 1997 se situe légèrement au-dessus de la moyenne de ces dernières années. La répartition, bien équilibrée entre jeunes physiciens et seniors, montre que l'Ecole remplit bien sa double mission de formation des jeunes chercheurs et d'approfondissement et/ou formation permanente pour les plus expérimentés.*

*Ce n'est pas sans regrets que nous voyons cette année Mlle J. Garrabos quitter le secrétariat de l'Ecole Joliot-Curie qu'elle assurait depuis sa création en 1982. Le succès de l'Ecole doit beaucoup à sa compétence, son dévouement et sa gentillesse. Qu'elle trouve ici l'expression de notre gratitude !*

*Nos remerciements iront également à Mme M. Furgolle du siège de l'IN2P3 et Mlle P. Chambon du CEN Bordeaux qui prend désormais en charge le secrétariat de l'Ecole.*

Y. ABGRALL

Pour le Comité d'Organisation



# LE PROBLÈME À N CORPS

## Approches relativistes

**Jean-François Mathiot**  
Laboratoire de Physique Corpusculaire  
Université Blaise Pascal, CNRS-IN2P3,  
F-63177 Aubière Cedex

### Abstract

Ce cours s'attachera dans un premier temps à expliciter les motivations physiques des approches relativistes, en en démontant les mécanismes élémentaires. La deuxième partie sera consacrée à la manière dont on peut comprendre dans ces approches la matière nucléaire, la structure des noyaux finis, et comment on peut déduire très facilement une interaction effective équivalente de type Skyrme. La troisième partie du cours passera en revue, d'un point de vue critique, les résultats les plus récents obtenus en structure nucléaire.

We shall detail in a first part the physical motivations of relativistic approaches, by investigating the underlying elementary mechanisms. The second part will be devoted to the understanding of nuclear matter and finite nuclei in these approaches. We shall see, in particular, how one can easily derive an effective interaction "à la Skyrme" from these relativistic approaches. We shall discuss, in the third part, some recent results obtained in nuclear structure.

# 1 Préambule

La compréhension de la structure microscopique des noyaux est un des objectifs majeurs de la physique nucléaire depuis maintenant plusieurs décennies. Il s'agit bien sûr, en premier lieu, de comprendre l'origine microscopique des différents termes de la formule de masse de Bethe-Weizsäcker donnant l'énergie de liaison d'un noyau en fonction de son numéro atomique  $A$  et de sa charge  $Z$  :

$$E = a_v A + a_s A^{1/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{A} . \quad (1)$$

Evidemment, cette description des noyaux ne peut s'arrêter là et l'on doit aussi comprendre ses propriétés plus fine comme le décalage spin-orbite des orbitales  $j = l \pm 1/2$ , ou la distribution spatiale des protons et neutrons dans le noyau (densité de charge et de matière).

Dans cette quête, nous pouvons distinguer deux approches complémentaires. L'une, plus macroscopique, consiste à décrire la structure nucléaire en terme de degrés de liberté macroscopiques tels que la densité de protons et de neutrons, leur densité de vitesse, ou encore le gradient de ces densités. Ces approches, basées sur les travaux de Skyrme [1, 2], ont donné lieu à d'innombrables publications, et à toute une succession "d'interactions de Skyrme" pour décrire des propriétés de plus en plus fine du noyau.

La deuxième approche, plus microscopique, consiste à décrire la structure nucléaire à partir de l'interaction élémentaire entre nucléons (interaction nucléon-nucléon, interactions à plus de deux corps, ...). Elle nécessite, entre autre, la maîtrise de techniques de résolution du problème à  $N$  corps particulièrement sophistiquées (voir le cours de J.-P. Blaizot). Citons, dans ce cadre, les calculs variationnels qui abordent maintenant des noyaux légers comme  $^{16}\text{O}$ .

Les approches de champ moyen relativiste dont nous allons parler dans ce cours sont à la fois macroscopiques puisqu'elles se restreignent à l'approximation de champs moyen ou Hartree-Fock, mais aussi microscopiques puisqu'elles gardent la trace de la structure élémentaire du potentiel nucléon-nucléon en terme d'échange de mésons.

L'objet de ce cours sera de démontrer les mécanismes élémentaires de ces approches relativistes, en essayant d'éviter toute discussion technique. Le lecteur intéressé par ces aspects techniques pourra trouver de nombreux cours et articles de revue sur ce sujet [3, 4]. Afin de simplifier les notations, nous prendrons dans ce cours  $\hbar = c = 1$ , et, pour les calculs de matière nucléaire infinie, nous considérerons un élément de volume unité.

## 2 Les fondements théoriques de l'approche de champ moyen relativiste

### 2.1 Quelques faits expérimentaux et ordres de grandeur

Il n'est heureusement pas nécessaire de rentrer dans les détails de la construction du potentiel nucléon-nucléon pour comprendre pourquoi il est indispensable de considérer

les corrections relativistes lorsque l'on s'intéresse à la structure des noyaux. L'existence même des noyaux en est une justification!

En effet, les noyaux sont constitués de protons et neutrons, et non pas de quarks et gluons! Cela nous indique, tout au moins en première approximation, que le potentiel nucléon-nucléon est répulsif à courtes distances, sans quoi les propriétés des noyaux seraient dominées par les propriétés à courtes distances du nucléon, et donc par sa sous-structure en quarks. Cette répulsion intervient typiquement pour des distances relatives entre nucléons inférieures à 0.8 fm.

D'autre part les noyaux sont aussi liés! Cela implique donc que le potentiel nucléon-nucléon est attractif à moyenne distance, typiquement pour des distances de l'ordre de 1 à 2 fm. Comme nous le verrons plus loin, il n'y a pas un mécanisme unique qui permette de comprendre cette répulsion à courte distance et cette attraction à moyenne distance, et cette non-unicité est à l'origine des fortes corrections relativistes que l'on doit observer dans certains processus. Nous reviendrons évidemment sur ce point dans la suite de ce cours.

D'où provient alors l'énergie de liaison d'un noyau fini? Tout le monde connaît par coeur la formule de Bethe-Weizsäcker que nous avons rappelé en préambule. Essayons d'aller un peu plus en détails, en suivant les remarques que nous venons de faire sur le potentiel nucléon-nucléon.

L'énergie de liaison par particule de  $\simeq -8 \text{ MeV}$  des noyaux finis provient d'une première annulation partielle entre l'énergie de liaison de la matière infinie ( $a_v \simeq -15 \text{ MeV}$ ) et des corrections de taille finie, de Coulomb, et d'asymétrie ( $\simeq 7 \text{ MeV}$ ). Cette énergie de liaison de la matière résulte ensuite d'une seconde annulation entre énergie cinétique (de l'ordre de  $\simeq 20 \text{ MeV}$  dans un modèle de champ moyen, mais de l'ordre de  $\simeq 35 \text{ MeV}$  lorsque l'on traite explicitement les corrélations à courtes portées), et énergie potentielle ( $\simeq -35 \text{ MeV}$  ou  $\simeq -50 \text{ MeV}$  suivant le type d'approximation fait). Enfin, comme nous venons de le rappeler, cette énergie potentielle est le résultat de l'annulation entre la partie répulsive du potentiel à courte distance ( $\simeq +150 \text{ MeV}$ ), et sa partie attractive à moyenne distance ( $\simeq -200 \text{ MeV}$ ).

Du fait de cette machination diabolique de la nature qui, pour obtenir une énergie de liaison par particule de  $-8 \text{ MeV}$  doit considérer des contributions d'énergie potentielle de l'ordre de  $-200 \text{ MeV}$ , il est clair qu'une correction aussi minime soit-elle, de l'ordre de quelque pour cent, sur l'énergie potentielle va engendrer de larges corrections, de l'ordre de 50 %, sur l'énergie de liaison. Les corrections relativistes sont précisément de cette ordre de grandeur puisque, pour un moment de l'ordre du moment de Fermi, le facteur  $1 - \gamma = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , avec  $\frac{v}{c} \simeq \frac{p_F}{M}$ , vaut environ 3 %. Cela implique ainsi une correction de l'ordre de 6 MeV sur l'énergie de liaison d'un noyau fini!

Comme nous le verrons plus loin, les corrections relativistes dépendent du mécanisme microscopique qui sont à l'origine des différentes contributions à l'énergie potentielle. Il n'est donc plus possible, pour pouvoir les estimer de façon réaliste, d'ignorer l'origine microscopique de la force effective dans les noyaux, comme cela est souvent le cas actuellement.

En résumé, nous pouvons dire que les corrections relativistes sont à la fois faibles et

fortes! Elles sont faibles par rapport aux contributions élémentaires à l'énergie potentielle, de l'ordre de quelque pour cent. Cela est important dans la mesure où il sera alors possible de les traiter par un développement perturbatif en  $\frac{p}{M}$ . Elles peuvent être aussi fortes selon l'observable que l'on considère, énergie de liaison ou potentiel spin-orbite par exemple. Dans la mesure où un développement perturbatif est théoriquement justifié, il est alors facile de voir qu'il sera possible de générer, dans les approches relativistes, une interaction effective de type Skyrme, ainsi que nous le verrons dans le chapitre suivant. C'est ainsi que l'on peut affirmer que ce qu'un calcul de champ moyen (ou même Hartree-Fock) relativiste peut faire, un calcul à la Skyrme doit aussi pouvoir le faire!

## 2.2 Quelques rappels sur le potentiel nucléon-nucléon

Suivant l'hypothèse de Yukawa, en 1935, prédisant que le potentiel d'interaction nucléon-nucléon était dû à l'échange de mésons  $\pi$ , notre compréhension de ce potentiel est maintenant arrivée à maturité. C'est ce que j'appellerai le modèle de référence de la structure microscopique des noyaux [5].

Comme nous l'avons vu en introduction, les degrés de liberté physiques dans les noyaux, à densité et température ordinaire, sont les états hadroniques. Parmi ceux-ci trois jouent un rôle tout à fait particulier. Tout d'abord le nucléon bien sûr, de nombre quantique  $J=1/2$ ,  $T=1/2$ , qui donne son numéro atomique au noyau. Il n'est pas tout seul dans la mesure ou, en première approximation, la résonance  $\Delta$  ( $J=3/2$  et  $T=3/2$ ) est dégénérée avec le nucléon. Une fois levée cette dégénérescence (échange de gluon entre quarks constituant le nucléon par exemple), la résonance  $\Delta$  acquiert une masse de 1232 MeV. Il conviendra donc d'en tenir compte, implicitement ou explicitement, dans les calculs microscopiques de la structure nucléaire dans la mesure où les énergies mises en jeu sont comparables à l'énergie d'excitation de cette résonance.

Le troisième état hadronique essentiel est le pion. Sa masse (138 MeV) est très faible, contrairement aux autres états mésoniques non-étranges, les résonances  $\rho$  (776 MeV) et  $\omega$  (783 MeV). Cela traduit le statut tout à fait particulier du pion. En effet, il est conçu, dans le cadre de la chromodynamique quantique [6], comme un état collectif quark-antiquark, dont les propriétés, et sa masse presque nulle, sont les conséquences de la brisure spontanée d'une symétrie essentielle de QCD à basse énergie: la symétrie chirale [7]: il est, dans le jargon théorique, un boson de Goldstone.

Ce choix de degrés de liberté n'est bien sûr pas un concept purement théorique, et plusieurs expériences permettent de "voir" les pions dans les noyaux. Nous indiquons sur la figure 1 la section efficace différentielle de l'électrodésintégration du deutéron près du seuil. Le couplage élémentaire du photon virtuel aux nucléons (approximation d'impulsion, figure 2.a) est indiqué par le trait pointillé. Il ne permet pas de comprendre, loin s'en faut, le mécanisme de diffusion d'électrons à des transferts d'impulsion même relativement faibles ( $Q^2 \simeq 0.5(\text{GeV}/c)^2$ ). Pour ces transferts d'impulsion, et au delà, la contribution dominante à la section efficace provient du couplage du photon aux mésons échangés entre nucléons, comme indiqué à la figure 2.b. La qualité des résultats expérimentaux, et la compréhension théorique des mécanismes d'échange de mésons à laquelle nous sommes arrivés sont tout à fait impressionnantes, d'autant plus que l'accord

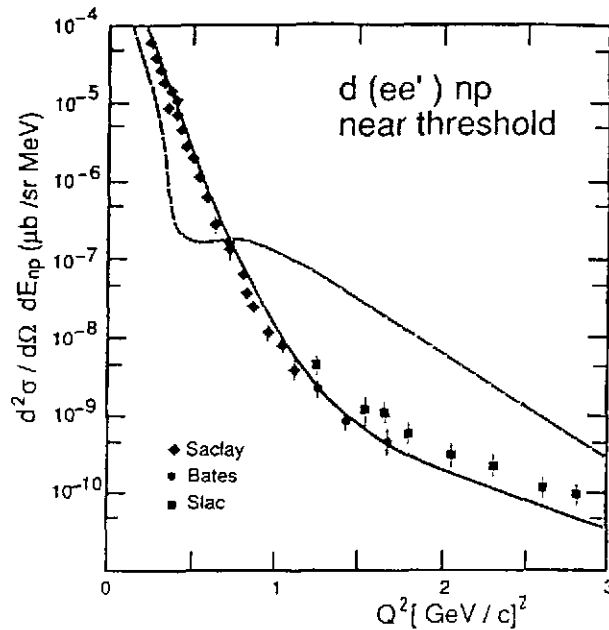


Figure 1: Section efficace d'électrodésintégration du deuteron

entre théorie et expérience persiste bien au delà du domaine de validité de ces modèles [5].

Une fois donc les acteurs bien identifiés, il est aisé, tout au moins d'un point de vue qualitatif, de comprendre quel sera la structure du potentiel nucléon-nucléon, en suivant l'hypothèse de Yukawa. Ce potentiel est représenté à la figure 3. Il provient des contributions d'échange de un pion, deux pions, trois pions, ..., combinées à l'infini. Du fait de la masse non-nulle du pion, la contribution de l'échange d'un nombre de plus en plus important de pions correspond à une portée de l'interaction de plus en plus petite. Ainsi, l'échange d'un seul pion correspond à une interaction de portée  $1/m_\pi \simeq 1.4 fm$ . C'est la partie à longue portée de l'interaction. La partie à moyenne portée correspond à l'échange de deux pions. Elle est attractive. L'échange de trois pions et plus est prépondérante pour

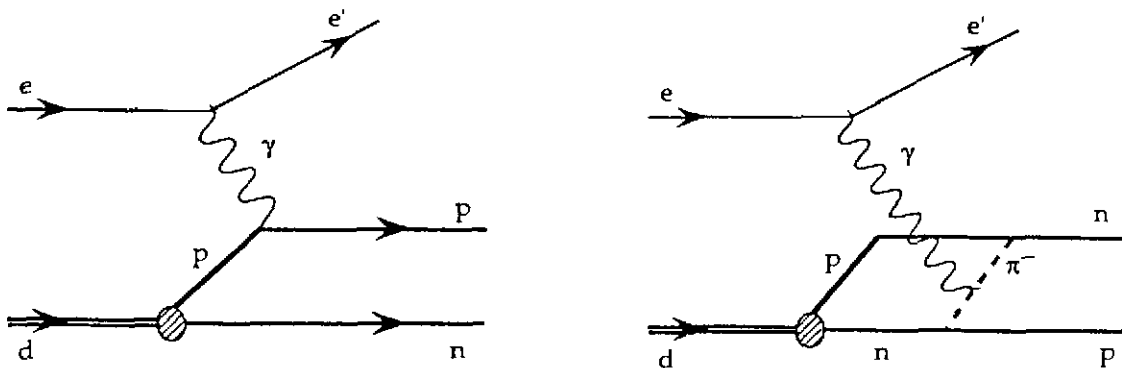


Figure 2: Processus élémentaires contribuant à l'électrodésintégration du deuteron près du seuil. a) Approximation d'impulsion; b) une des contributions de courant d'échange mésonique



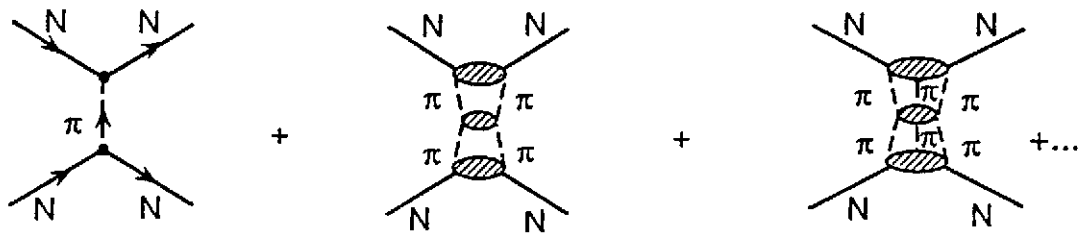


Figure 3: Représentation diagrammatique du potentiel d'interaction nucléon-nucléon

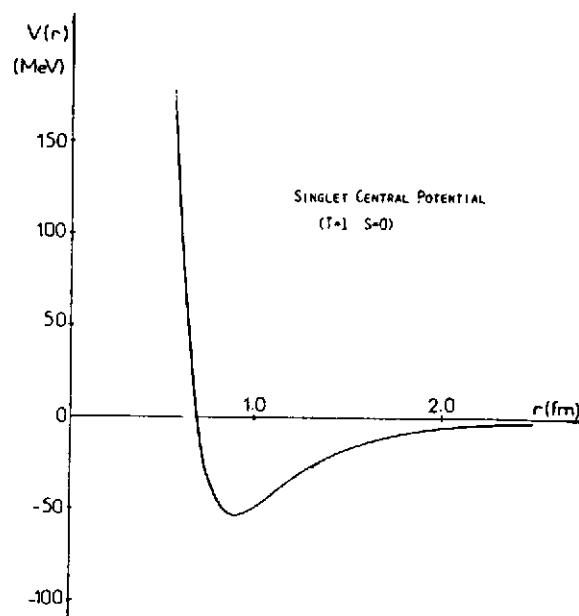


Figure 4: Potentiel nucléon-nucléon dans l'espace des coordonnées, pour une onde S

des distances relatives inférieures à 0.8 fm environ. Au niveau de l'échange de trois pions, cette partie est fortement répulsive. La forme générale du potentiel a ainsi l'allure indiquée sur la figure 4.

Plusieurs paramétrisations du potentiel nucléon-nucléon existent dans la littérature. Elles procèdent toutes des mêmes hypothèses que nous venons de rappeler très succinctement. Par contre, elles diffèrent sur la manière de les implémenter d'un point de vue pratique. Le potentiel dit de Paris [8] construit explicitement le potentiel par l'échange d'un, deux et trois pions. La partie à plus courte portée n'est en fait, d'un point de vue phénoménologique, que de très peu d'importance dans la mesure où la probabilité de trouver deux nucléons très proches l'un de l'autre est particulièrement faible, compte tenu de la contribution répulsive provenant de l'échange de trois pions (encore un autre miracle de la nature!).

Comme nous le verrons plus loin, cette représentation du potentiel nucléon-nucléon n'est cependant pas adaptée pour beaucoup d'applications, comme par exemple le calcul

des courants d'échange mésoniques, ou les approches de champ moyen relativiste. Dans ce cas, il est plus judicieux de se placer dans l'approximation d'échange de bosons [9, 10]. Dans cette approximation, la contribution d'échange de deux pions est représentée par l'échange de deux bosons. L'un, dans le canal ( $J=1, T=1$ ) correspond à la résonance  $\rho$  de masse 776 MeV. Le second, dans le canal ( $J=0, T=0$ ) est la "résonance"  $\sigma$ . Ce dernier boson n'est pas à proprement parlé une résonance, dans la mesure où il n'est pas détecté expérimentalement. Il doit être seulement interprété comme une paramétrisation simple du potentiel d'échange de deux pions dans ce canal. Sa masse est alors fixée à environ 500 MeV. Enfin, la contribution d'échange de trois pions, dans le canal ( $J=1, T=0$ ) correspond à l'échange de la résonance  $\omega$  de masse 783 MeV.

Dans cette approximation, qui a maintenant été testée dans de nombreux processus élémentaires, la structure du potentiel nucléon-nucléon est parfaitement déterminée par :

- Les constantes de couplage méson-nucléon,
- La masse des mésons échangés,
- Leur nombre quantique.

Nous indiquons ci-dessous la forme générale du potentiel qui en résulte [11], dans un développement en  $1/M$ :

$$V^{T=0,1}(\vec{r}) = V_C^T(r) + \mathbf{L.S} V_{LS}^T(r) + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 V_{SS}^T(r) + S_T^{12}(\vec{r}) V_T^T(r) , \quad (2)$$

où  $S_T^{12}$  est l'opérateur tensoriel:

$$S_T^{12}(\vec{r}) = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r} \cdot \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r} - \frac{1}{3} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 . \quad (3)$$

Les parties centrales ( $V_C^T$ ) et spin-orbite ( $V_{LS}^T$ ) proviennent essentiellement de l'échange de mésons  $\sigma$  et  $\omega$ , alors que les parties spin-spin ( $V_{SS}^T$ ) et tenseur ( $V_T^T$ ) proviennent de l'échange de mésons  $\pi$  et  $\rho$ . Les parties centrales et spin-orbite s'écrivent, à l'ordre dominant en  $1/M$ , où  $M$  est la masse du nucléon:

$$V_C^T(r) \simeq -\frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r} + \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r} \equiv V_{att} + V_{rep} , \quad (4)$$

$$V_{LS}^T(r) \simeq -\frac{1}{2M^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [V_{att} - V_{rep}] . \quad (5)$$

Nous pouvons déjà faire, au vu de ces expressions particulièrement simples, plusieurs remarques importantes. Tout d'abord nous vérifions sur l'expression de  $V_C^T$  l'annulation entre partie attractive du potentiel (notée  $V_{att}$ , négative) et partie répulsive (notée  $V_{rep}$ , répulsive). Alors que la valeur de chaque terme est grande, le potentiel central est relativement faible. Cette annulation par contre ne se produit pas au niveau du potentiel spin-orbite, comme nous le voyons sur l'expression de  $V_{LS}^T$ . Ceci explique la grande contribution du potentiel spin-orbite dans les noyaux. Cette contribution est néanmoins quantitativement relativement petite car elle est d'ordre  $1/M^2$  par rapport au potentiel

central. C'est donc à proprement parlé une correction d'ordre relativiste. Elle est connue depuis 1926 (précession de Thomas).

Nous aurons l'occasion de revenir sur la partie spin-orbite du potentiel nucléon-nucléon, mais notons déjà que cette correction est d'une certaine manière triviale dans la mesure où elle peut être incorporée simplement dans tout calcul non-relativiste basé sur l'équation de Schrödinger, avec le potentiel (2). Cette correction est dite "cinématique" par opposition aux corrections relativistes "dynamiques" dont nous parlerons plus loin. Ce potentiel est à la base de tous les calculs microscopiques de structure nucléaire [12].

## 2.3 Le modèle de champ moyen relativiste

### 2.3.1 L'onde plane relativiste

Nous nous restreindrons, dans un premier temps, à la description de la matière nucléaire infinie symétrique. Dans la limite non-relativiste, la fonction d'onde d'un nucléon de moment  $\vec{p}$  est une onde plane définie par:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \chi_s \chi_\tau, \quad (6)$$

où l'état du système est entièrement défini par  $\alpha=(\vec{p}, s, \tau)$ ,  $s$  et  $\tau$  caractérisant le spin et l'isospin du nucléon. Les états de spin ou isospin sont alors déterminés par:

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Cette onde plane est solution de l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2M} \nabla^2 \phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_p \phi_\alpha(\vec{r}), \quad (8)$$

avec  $\epsilon_p = \frac{p^2}{2M}$ .

L'onde plane relativiste sera solution de l'équation de Dirac suivante [4]:

$$[-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta M] \phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_p \phi_\alpha(\vec{r}), \quad (9)$$

où  $\vec{\alpha}$  et  $\beta$  sont les matrices de Dirac, et  $\phi_\alpha(\vec{r})$  a la forme suivante:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = u^0(\vec{p}, s) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \chi_s. \quad (10)$$

L'onde plane relativiste est ainsi entièrement déterminée par le spineur libre de Dirac  $u^0(\vec{p}, s)$  défini par :

$$u^0(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{\epsilon_p + m}{2\epsilon_p}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{(\epsilon_p + m)} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (11)$$

avec  $\epsilon_p = \sqrt{p^2 + M^2}$ . Ce spineur de Dirac est formé de deux composantes: la "grande composante" qui domine dans la limite non relativiste (elle est 1), et la "petite composante" qui s'annule dans cette limite. On retrouve alors l'onde plane non-relativiste.

### 2.3.2 L'approximation Hartree-Fock relativiste

L'approximation de champ moyen relativiste, et plus généralement l'approximation dite Hartree-Fock, sont tout à fait semblables aux mêmes approximations dans les approches non-relativistes [12]. L'état du noyau est représenté par un déterminant de Slater :

$$|\Phi_0\rangle = a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_A}^+ |0\rangle, \quad (12)$$

où  $a_{\alpha_i}^+$  est l'opérateur de création d'un nucléon dans l'état  $\alpha_i$ , et  $|0\rangle$  représente l'état de référence (le vide). On recherchera alors une solution sous la forme d'une onde plane, pour un milieu infini et uniforme, soit:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = u(\vec{p}, s) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \chi_\tau. \quad (13)$$

La forme générale du Hamiltonien s'écrira [4]

$$H = T + V \quad (14)$$

$$= \sum_{\alpha'\alpha} \bar{u}(\alpha') [\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta M] u(\alpha) a_{\alpha'}^+ a_\alpha \quad (15)$$

$$+ \sum_{\alpha'\alpha\gamma'\gamma} \bar{u}(\alpha') \bar{u}(\gamma') V(\vec{k}) u(\gamma) u(\alpha) a_{\alpha'}^+ a_{\gamma'}^+ a_\gamma a_\alpha. \quad (16)$$

Dans cette équation, on note  $\bar{u} = u^\dagger \beta$ , et  $\vec{k} = \vec{p}' - \vec{p}$ .

La contribution de l'énergie potentielle à l'énergie totale  $E = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle$  se décomposera de manière traditionnelle en terme direct ( $\alpha \equiv \alpha'$  et  $\gamma \equiv \gamma'$ ) et en terme d'échange ( $\alpha \equiv \gamma'$  et  $\gamma \equiv \alpha'$ ).

La forme finale de l'onde plane relativiste, c'est-à-dire la forme du spineur de Dirac  $u(\vec{p}, s)$ , sera alors déterminée par minimisation de l'énergie totale, compte tenu de la contrainte de normalisation de l'état du système,

$$\delta [E - \lambda \langle \Phi_0 | N | \Phi_0 \rangle] = 0, \quad (17)$$

où  $N$  est l'opérateur de normalisation. L'équation dont  $u(\vec{p}, s)$  sera solution est ainsi une équation de Dirac dans le milieu nucléaire, qui a la forme suivante:

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta M + \Sigma(\vec{p})] u(\vec{p}, s) = \epsilon_p u(\vec{p}, s), \quad (18)$$

ou  $\Sigma(\vec{p})$  est la self-énergie dans l'approximation de Hartree-Fock. Sa structure générale est donnée par:

$$\Sigma(\vec{p}) = \beta \Sigma_S(p) + \Sigma_0(p) + \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p} \Sigma_V(p). \quad (19)$$

Cette équation a la particularité de pouvoir se réécrire sous forme d'une équation de type libre :

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{p}^* + \beta M^*(p)] u(\vec{p}, s) = \epsilon_p^* u(\vec{p}, s), \quad (20)$$

avec :

$$M^*(p) = M + \Sigma_S(p), \quad (21)$$

$$\epsilon_p^* = \epsilon_p - \Sigma_0(p), \quad (22)$$

$$p^* = p + \Sigma_V(p). \quad (23)$$

On en déduit alors immédiatement la solution:

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{\epsilon_p^* + M^*}{2\epsilon_p^*}} \left( \frac{1}{(\epsilon_p^* + M^*)} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) \chi_s, \quad (24)$$

avec  $\epsilon_p^* = \sqrt{p^2 + M^{*2}}$ . La masse  $M^*$  est alors appelée masse effective relativiste du nucléon dans le milieu nucléaire.

Dans l'approximation de champ moyen (approximation Hartree), l'équation définissant la masse effective est simplement:

$$M^* = M + \Sigma_S = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp. \quad (25)$$

### 2.3.3 Approches microscopiques et phénoménologiques

Avant de continuer plus avant dans la discussion du contenu physique des approches relativistes, je voudrai faire quelques remarques sur les différentes façons de voir la structure nucléaire. Nous en avons déjà discerné trois:

- L'approche microscopique de la structure nucléaire est basée sur l'interaction élémentaire nucléon-nucléon et utilise les techniques du problème à N corps pour calculer les propriétés des noyaux. Actuellement, seuls les noyaux relativement légers ( $^{16}\text{O}$  par exemple) sont accessibles. Les résultats obtenus sont tout-à-fait encourageants [12]. Il faut cependant bien réaliser que cette approche est limitée à des précisions de l'ordre de quelques pour cent, pour les raisons que nous avons évoquées dans la section 2: une précision de 20 MeV sur l'énergie totale de  $^{16}\text{O}$  par exemple correspond à environ 1.5 MeV sur l'énergie par particule, et une précision inférieure à 1 % sur notre connaissance des différentes parties de l'interaction nucléon-nucléon élémentaire. C'est une précision qui ne pourra jamais être envisagée ! Cela bien sûr n'enlève en rien des qualités de cette approche, mais en fixe bien les limites intrinsèques.
- L'approche semi-phénoménologique que nous discutons dans ce cours. Elle garde la structure microscopique du potentiel nucléon-nucléon (échange de mésons  $\sigma, \omega, \pi, \rho$ ) mais considère les constantes de couplage et masses comme paramètres ajustables, dont le domaine de variation est tout de même contraint par les valeurs connues du potentiel élémentaire. De plus, l'approximation de champs moyen, ou plus généralement l'approximation de Hartree-Fock, est utilisée.
- L'approche phénoménologique basée sur l'interaction effective de type Skyrme. Elle permet de reproduire les propriétés globales du noyau. Elle ne peut cependant pas prétendre à être très prédictive en dehors du domaine dans lequel ses paramètres ont été ajustés.

### 3 Application à la structure microscopique des noyaux

#### 3.1 Mécanisme de saturation de la matière nucléaire

Une fois connue la solution générale de l'équation de Dirac dans le milieu nucléaire, il est facile de calculer la courbe de saturation de la matière nucléaire. L'énergie totale s'écrit:

$$E_T = \langle \Phi_0 | T | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle . \quad (26)$$

Comme dans le cas non-relativiste, la valeur moyenne de l'énergie potentielle se décompose en terme directe (dit de Hartree) et terme d'échange (dit de Fock). Nous reviendrons plus loin sur les différents niveaux d'approximation. Pour illustrer comment interviennent les différents échanges de mésons, nous nous limiterons dans un premier temps à l'approximation de Hartree.

Compte tenu de la sommation sur l'isospin, et pour de la matière nucléaire symétrique, seul l'échange des mésons isoscalaire  $\sigma$  et  $\omega$  contribue à l'approximation Hartree. Cette approximation est traditionnellement appelée aussi approximation de champ moyen. C'est aussi le modèle dit de Walecka. Dans l'approximation Hartree-Fock, l'échange des mésons isovectoriels  $\pi$  et  $\rho$  contribue aux termes d'échange, même dans le cas de la matière nucléaire symétrique [4].

Dans l'approximation de champ moyen, l'équation de Dirac dans le milieu se réécrit:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(M + \Sigma_S)] u(\vec{p}, s) = (\epsilon_p - \Sigma_0) u(\vec{p}, s) , \quad (27)$$

avec:

$$M^* = M + \Sigma_S = M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp , \quad (28)$$

$$\epsilon_p^* = \epsilon_p - \Sigma_0 = \epsilon_p - \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp . \quad (29)$$

Dans cette approximation, la self énergie vectorielle  $\Sigma_V$  est nulle, et les self-énergies scalaire ( $\Sigma_S$ ) et temporelle ( $\Sigma_0$ ) ne dépendent pas du moment du nucléon. Elles ne dépendent que du moment de fermi  $p_F$ , et donc de la densité du milieu. La courbe de variation de  $M^*$  en fonction de la densité est indiquée sur la figure 5. Comme cela est connu déjà depuis longtemps, la masse effective décroît en fonction de la densité.

Dans l'approximation de champ moyen relativiste, elle est de l'ordre de  $0.5M$  à densité ordinaire. Nous discuterons plus loin de la manière d'interpréter cette masse effective relativiste. On définira les densités baryonique  $n$  et scalaire  $n_s$  par:

$$n \equiv \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{2p_F^3}{3\pi^2} \quad (30)$$

$$n_s \equiv \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 \frac{M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp . \quad (31)$$

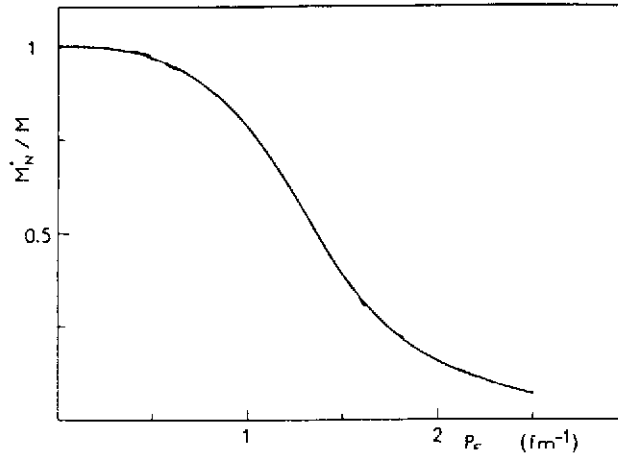


Figure 5: Masse effective relativiste en fonction de la densité

L'énergie totale s'écrit alors facilement:

$$E_T = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 \frac{p^2 + MM^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} dp + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_S^2. \quad (32)$$

On peut ainsi calculer la courbe de saturation de la matière nucléaire avec seulement deux paramètres  $\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}$  et  $\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}$ , pour deux conditions de saturation:  $a_v = (E_T/A)_0 - M \simeq -16 \text{ MeV}$  et  $n_0 \simeq 0.17 \text{ nucl}/f\text{m}^3$ . Cette courbe de saturation est indiquée sur la figure 6. A la saturation  $M^*/M \simeq 0.54$  et le paramètre d'incompressibilité est  $K \simeq 540 \text{ MeV}$ .

Avant de rentrer plus en détails sur les différents niveaux d'approximation, il est important de bien comprendre l'origine du mécanisme de saturation dans cette approximation simple de champ moyen relativiste. Pour cela, on peut calculer l'énergie totale dans deux approximation simples :

- Dans l'approximation purement non-relativiste où l'on ne garde que les termes dominants en  $p/M$ , l'énergie totale s'écrit simplement:

$$E_T = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp \left( \frac{p^2}{2M} + M \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) n^2. \quad (33)$$

Dans ce cas, la courbe de saturation est indiquée par la courbe en trait mixte de la figure 6. Comme cela est déjà bien connu dans les approches non-relativistes, il ne peut y avoir de saturation dans ce cas.

- Un premier type de correction relativiste est donné par les corrections dites "cinématiques" que nous avons déjà discutées dans la section 2. Dans cette approximation, on ne considère que les corrections relativistes provenant de la solution libre de l'équation de Dirac, c'est-à-dire en considérant le spineur libre  $u^0$  au lieu du spineur

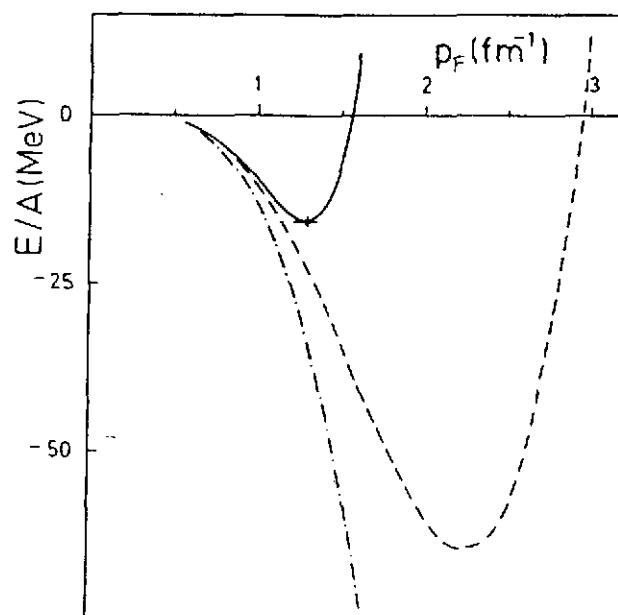


Figure 6: Courbe de saturation de la matière nucléaire

complet  $u$ . Dans ce cas, la courbe de saturation est indiquée par la courbe en trait pointillée sur la figure 6. Il existe un point de saturation, mais il correspond à une densité et à une énergie de liaison complètement irréaliste.

Comme nous pouvons le voir sur cette figure, le calcul complet dans l'approximation de champ moyen relativiste (trait plein) génère une très forte dépendance en densité, donnée par les corrections relativistes cinématiques et dynamiques. Cette dépendance en densité est même trop forte puisque le paramètre d'incompressibilité est particulièrement élevé ( $\approx 540$  MeV).

### 3.2 Différents niveaux d'approximation

Cette malencontreuse solution pose en fait plus de questions qu'elle ne semble en résoudre à première vue. Pour voir quelles sont les limitations des approches relativistes, il est indispensable de discuter les différents niveaux d'approximation que l'on peut considérer.

*i)* Comme nous venons de le voir, l'approximation de champs moyen ou approximation de Hartree est la plus simple. La forte dépendance en densité (répulsive) provenant des corrections relativistes est suffisante pour provoquer la saturation de la matière nucléaire. Dans cette approximation, seules les mésons isoscalaires  $\sigma$  et  $\omega$  contribuent. La masse effective est particulièrement faible  $M^*/M \approx 0.54$  et le paramètre d'incompressibilité particulièrement élevé ( $K \approx 540$  MeV). Nous verrons que ces quantités anormales sont en fait des conséquences directes de l'approximation de Hartree et ne remettent pas en cause la justification des approches relativistes elles-mêmes.

*ii)* Dans le cas de la matière nucléaire infinie asymétrique, le potentiel d'échange de méson  $\rho$  est non-nulle. Dans ce cas, la constante  $\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2}$  est ajustée pour reproduire



	$T$	$V_H$		$V_F$			
		$\sigma$	$\omega$	$\sigma$	$\omega$	$\pi$	$\rho$
$(\sigma, \omega)_H$	8.1	-201	+177				
$(\sigma, \omega, \pi, \rho)_{HF}$	9.2	-135	+131	26	-22	-7	-19

Table 1: Valeur moyenne (en MeV) de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, au point de saturation de la matière nucléaire, dans l'approximation Hartree (H) (ou champ moyen) et Hartree-Fock (HF), en fonction des mésons échangés dans la matière nucléaire infinie.

le paramètre d'asymétrie  $a_a$  dans la formule de Bethe-Weizsäcker. Encore une fois, il est malencontreux qu'une solution à cet ajustement existe. Toutefois, la constante de couplage  $g_\rho^2$  ainsi obtenue est supérieure à la valeur communément admise pour le potentiel nucléon-nucléon libre d'un facteur trois, ce qui n'est pas raisonnable. Le potentiel d'échange du pion ne contribue toujours pas par conservation de la parité.

*iii)* Dans l'approximation de Hartree-Fock, c'est-à-dire lorsque l'on considère les termes directe et d'échange dans le calcul de l'énergie potentielle, tous les échanges de mésons contribuent, même pour  $N = Z$ . Afin de conserver un nombre minimum de paramètres libres, il est raisonnable de fixer les constantes de couplage méson-nucléon, et les masses des mésons  $\pi$  et  $\rho$  à leurs valeurs physiques. La masse du méson  $\omega$  est aussi fixée à sa valeur physique, et les paramètres ajustables seront  $g_\sigma, g_\omega$  et  $m_\sigma$ . Dans cette approximation en effet, l'énergie totale dépend explicitement des constantes de couplage et des masses, et non plus de leur rapport. La masse du méson  $\sigma$  sera en fait déterminée afin de reproduire le rayon de charge d'un noyau fini, et les deux constantes de couplage restantes sont fixées pour reproduire le point de saturation empirique. Dans cette approximation, la masse effective dépend du moment du nucléon. Au niveau de Fermi, elle vaut  $M^*/M \simeq 0.56$  et le paramètre d'incompressibilité vaut  $K \simeq 460 \text{ MeV}$ . La masse effective est toujours relativement petite, et le paramètre d'incompressibilité relativement grand. Par contre, la répartition des énergies potentielles est tout-à-fait différente, ainsi que cela est indiqué dans le tableau 1

Comme on peut le remarquer dans ce tableau, l'énergie potentielle, dans l'approximation de Hartree-Fock, est presque essentiellement déterminée par les termes d'échange, compte tenu de l'annulation presque parfaite entre l'échange de  $\sigma$  et de  $\omega$ . Cette caractéristique est en accord avec les études non-relativistes.

*iv)* Enfin, il est maintenant possible d'aller au delà de l'approximation de Hartree-Fock, et d'inclure les corrélations à courtes portées, dans un calcul de type Brueckner-Hartree-Fock relativiste. Ces calculs sont là aussi tout-à-fait similaires aux calculs Brueckner-Hartree-Fock non-relativistes [12]. Dans ce cas, la masse effective au niveau de Fermi est de l'ordre de  $M^*/M \simeq 0.7$  et le paramètre d'incompressibilité est compris entre 200 et 250 MeV. Ces valeurs sont tout-à-fait en accord avec les estimations phénoménologiques actuelles.

### 3.3 Interaction effective équivalente à la Skyrme

Comme nous l'avons déjà vu dans l'introduction, les corrections relativistes sont intrinsèquement petites, de l'ordre de 3%, et donc un développement perturbatif en  $p/M$  est pertinent. Nous nous placerons, pour simplifier l'étude, dans la matière nucléaire infinie. L'énergie de liaison par particule pourra alors s'écrire:

$$a_v = \frac{4}{n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{H}(p) . \quad (34)$$

Dans un développement en  $p/M$ , la densité Hamiltonienne  $\mathcal{H}$  sera une fonction de la densité baryonique,  $n$ , et de la densité d'impulsion au carré,  $\tau$ , définie par:

$$\tau = 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 . \quad (35)$$

Dans l'approximation de champ moyen relativiste, on a simplement:

$$\mathcal{H}(p) \simeq \frac{p^2}{2M} + \left( -\frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) n \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{2M^2} \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) p^2 n + \frac{1}{2M^3} \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right)^2 n \tau + \dots \quad (37)$$

Si l'on se réfère à la nomenclature de l'interaction de Skyrme [1] le deuxième terme de cette équation contribue au terme en  $t_0$ , le troisième au terme en  $t_2$  (dépendance en impulsion), et le dernier au terme en  $t_3$ . Dans la matière nucléaire infinie, le troisième terme se comporte comme  $n^{5/3}$  et le dernier comme  $n^{8/3}$ . Ces deux termes sont des corrections relativistes. Le premier est une correction relativiste cinématique, le deuxième une correction relativiste dynamique. Elles contribuent typiquement pour 10 MeV et 6 MeV respectivement à l'énergie de liaison par particule à la densité de saturation.

On pourra remarquer sur ces expressions que les premières corrections relativistes, dans la matière nucléaire tout au moins, ne font intervenir que l'échange de mésons  $\sigma$ . Cela démontre, s'il en était encore besoin, qu'il est nécessaire, pour estimer les corrections relativistes, de connaître les mécanismes élémentaires qui génèrent le potentiel nucléon-nucléon.

Comme nous venons de le dire, le terme en  $p^2 n$  dans l'interaction effective provient de corrections cinématiques. Elles ont la même origine que le potentiel spin-orbite à deux corps que nous avons indiqué en (5). Le terme en  $n \tau$  quant-à-lui provient de corrections dynamiques qui n'interviennent pas au niveau du potentiel à deux corps, mais sont générées par le traitement à N-corps. Elles correspondent à la contribution à trois corps indiquée sur la figure 7. Cette contribution à trois corps, et toutes les autres contributions à trois corps que l'on doit considérer à cet ordre d'approximation, interviennent dans tous les calculs microscopiques non-relativistes (voir par exemple le cas des calculs de type Brueckner-Hartree-Fock [13]).

Les termes d'échange (termes de Fock) ne changent pas la forme de la dépendance en densité, tout au moins au premier ordre. Ils modifient seulement les coefficients.

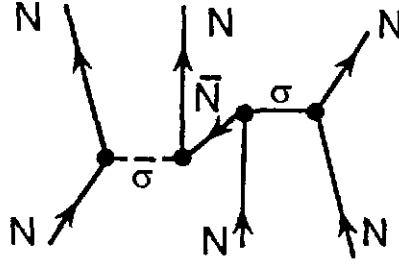


Figure 7: Correction relativiste dynamique interprétée comme contribution à trois corps

### 3.4 Corrections de portée finie

Afin d'étudier l'effet de la portée finie de l'interaction d'échange de mésons, il convient de regarder la solution de l'équation de Dirac dans un noyau fini. La forme générale du spineur de Dirac, pour un noyau sphérique, sera:

$$\phi_\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} iG_\alpha(r) \\ F_\alpha(r)\vec{\sigma}\cdot\vec{r} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_{ljm} \chi_\tau, \quad (38)$$

où  $\mathcal{Y}_{ljm}$  représente la partie angulaire traditionnelle de la fonction d'onde. Dans l'approximation de champs moyen relativiste, ce spineur de Dirac est solution de l'équation:

$$[-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta(M + \Sigma_S(r)) + \Sigma_0(r)] \phi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_\alpha \phi_\alpha(\vec{r}), \quad (39)$$

avec, pour calculer les self-énergie  $\Sigma_S$  et  $\Sigma_0$ ,

$$\vec{\nabla}^2 \Sigma_S(r) - m_\sigma^2 \Sigma_S(r) = g_\sigma^2 n_S, \quad (40)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Sigma_0(r) - m_\omega^2 \Sigma_0(r) = -g_\omega^2 n. \quad (41)$$

Pour un potentiel de portée nulle, c'est à dire pour un méson échangé de masse infinie (en pratique pour une masse plus grande que 1 GeV), on pourra négliger le terme de dérivé devant le terme de masse dans ces équations, et les self-energies sont proportionnelles à  $g^2/m^2$  comme dans le cas de la matière nucléaire infinie. Pour avoir la première correction de portée finie, il suffit de développer les équations (40,41) au premier ordre en  $1/m$ , c'est-à-dire:

$$\Sigma_0(r) \simeq \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \left( n + \frac{\vec{\nabla}^2 n}{m_\omega^2} + \dots \right), \quad (42)$$

et de manière similaire pour  $\Sigma_S$ . Le second terme dans l'expression des self-energies va donc induire, dans l'interaction effective, une dépendance explicite en gradient de la densité, combinée, pour les corrections relativistes, à une dépendance en vitesse. Ces dépendances sont parfaitement déterminées une fois les constantes de couplage et les masses fixées.

Dans l'approximation de Hartree, seuls les mésons  $\sigma$  de masse  $m_\sigma \simeq 500$  MeV et  $\omega$  de masse  $m_\omega \simeq 780$  MeV contribuent. Cela correspond à deux portées différentes, l'une

courte, pratiquement nulle, et l'autre intermédiaire. Pour les termes de Fock, et en plus de ces deux mésons, les mésons  $\rho$  de masse  $m_\rho \simeq 780$  MeV et  $\pi$  de masse  $m_\pi \simeq 138$  MeV contribuent. Cela correspond à un terme de portée pratiquement nulle pour le  $\rho$  et un terme de longue portée pour le  $\pi$ . Nous voyons donc que l'interaction effective, pour être parfaitement réaliste, devrait comporter des interactions correspondant à trois type de portées différentes: courte, intermédiaire et longue. C'est précisément le choix initial de l'interaction D1 dite de Gogny [14].

### 3.5 Dépendance en isospin

Nous finirons cette discussion de l'interaction effective dans les noyaux par la détermination de la dépendance en isospin de l'énergie par particule dans la matière nucléaire. Comme nous l'avons déjà répété plusieurs fois, cette dépendance, ainsi que l'interaction effective elle-même, est parfaitement déterminée par les nombres quantiques des mésons échangés, et leur couplage au nucléon [15]. Dans l'approximation de champ moyen relativiste, le paramètre d'asymétrie s'écrit:

$$a_a^H = \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\epsilon_p^*(p_F)} + \frac{1}{2} \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} n. \quad (43)$$

La première contribution à  $a_a$  est environ 20 MeV. Dans cette approximation simple, la constante  $g_\omega^2/m_\omega^2$  est déterminée pour reproduire la valeur communément admise pour  $a_a$  (environ 32 MeV). Dans l'approximation de Hartree-Fock, tous les mésons vont contribuer à l'asymétrie, et la contribution des termes de Fock au paramètre  $a_a$  s'écrit alors [15]:

$$\begin{aligned} a_{as}^F &= \frac{1}{A} \langle V_\sigma^F \rangle + \frac{1}{A} \langle V_\omega^F \rangle - \frac{1}{3A} \langle V_\pi^F \rangle - \frac{1}{3A} \langle V_\rho^F \rangle, \\ &= +26 \text{ MeV} - 22 \text{ MeV} + 2 \text{ MeV} + 6 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (44)$$

où  $\langle V_m^F \rangle$  représente la valeur moyenne de la contribution de Fock de l'énergie potentielle due à l'échange du méson  $m$ . Avec les valeurs des différentes contributions données en (44), on s'aperçoit que la contribution du terme de Fock est de l'ordre de 12 MeV, c'est-à-dire que la constante de couplage du méson  $\rho$  n'a pas besoin d'être très grande pour pouvoir reproduire les propriétés d'asymétrie des noyaux. C'est précisément ce qui est nécessaire au niveau du potentiel nucléon-nucléon.

Dans un noyau fini, il est à prévoir que ces termes de Fock seront d'autant plus importants que l'échange de  $\pi$  est de longue portée [16].

### 3.6 Masse effective relativiste et non-relativiste

Nous avons défini en (22) la masse effective relativiste par  $M^*(p) = M + \Sigma_S(p)$ . Comment cette masse effective se compare-t-elle à la masse effective non-relativiste définie par

$$M_{NR}^*(p) = p \left( \frac{\partial \mathcal{H}(p)}{\partial p} \right)^{-1} ? \quad (45)$$

Il est facile de voir cette correspondance dans l'approximation de champs moyen. Avec l'expression (25) de la masse effective relativiste, et au premier ordre en  $p/M$

$$M^* \simeq M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} n. \quad (46)$$

En reprenant la dépendance en vitesse de  $\mathcal{H}(p)$ , il est par ailleurs possible de calculer la masse effective non-relativiste générée par cette dépendance en moment, c'est-à-dire avec (45):

$$M_{NR}^*(p) = \frac{M}{1 + \frac{n}{M} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2}} \simeq M \left( 1 - \frac{n}{M} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right), \quad (47)$$

soit  $M_{NR}^*(p) \simeq M^*$ . La masse effective relativiste induit donc une contribution identique à la masse effective non-relativiste.

## 4 Discussion critique des résultats récents

### 4.1 Mécanisme de saturation de la matière nucléaire

Comme nous l'avons vu dans la section 3, le modèle de champs moyen relativiste, et cela est aussi vrai dans l'approximation Hartree-Fock, attribue tout le mécanisme de saturation à un effet relativiste. Il est clair que cela ne peut pas être physique dans la mesure où l'on sait maintenant depuis de nombreuses années que les corrélations à courtes portées, absentes dans l'approximation Hartree ou même Hartree-Fock, contribuent aussi au mécanisme de saturation [12].

On sait en fait prendre en compte ces corrélations à courtes portées, dans une approche non-relativiste mais aussi relativiste, par exemple par l'approximation Brueckner-Hartree-Fock [12]. Comme nous l'avons déjà mentionné, la masse effective est alors de l'ordre de  $M^*/M \simeq 0.7$  et la compressibilité de l'ordre de  $K \simeq 250$  MeV. Ces calculs sont actuellement parmi les plus réalistes que l'on puisse avoir pour décrire la structure microscopique de la matière nucléaire: ils tiennent compte de la structure microscopique du potentiel nucléon-nucléon, des corrections relativistes à l'énergie potentielle et cinétique, et des corrélations à courtes portées. Les corrections relativistes sont ici indispensables pour pouvoir reproduire correctement le point de saturation de la matière nucléaire, et sortir de la courbe de Coester [12, 13].

D'un point de vue pratique, et compte tenu du fait que les calculs Brueckner-Hartree-Fock relativistes sont particulièrement longs et délicats, il est souvent utile de redéfinir une interaction effective nucléon-nucléon, à utiliser dans les calculs Hartree-Fock relativistes, et déterminée pour reproduire les mêmes propriétés de la matière nucléaire que le calcul complet (en particulier toutes les self-énergies  $\Sigma_S, \Sigma_0, \Sigma_V$  en fonction du moment et de la densité). Pour ce faire, il est suffisant de donner une dépendance en densité aux constantes de couplage méson-nucléon, et aux masses des mésons [17]. Il n'est ainsi plus nécessaire de recourir à des modèles ad-hoc de couplage non-linéaire entre mésons  $\sigma$  pour avoir de bonnes propriétés de la matière nucléaire.

## 4.2 Dépendance en N-Z de l'interaction effective

Nous avons déjà brièvement parlé dans la section 3.4 des calculs relativistes dans les noyaux finis. Nous reviendrons plus particulièrement ici sur la contribution du potentiel spin-orbite aux énergies individuelles à une particule. Pour cela, il est nécessaire de partir de l'équation de Dirac pour un noyau fini, comme indiqué en (39). Avec la forme générale de la fonction d'onde à une particule (38), l'équation de Dirac est équivalente à un système couplé de deux équations à deux inconnues  $G(r)$  et  $F(r)$ . Ce système peut être résolu facilement [4]. Une manière de le faire est d'ailleurs d'éliminer la petite composante  $F(r)$  entre ces deux équations. On obtient alors une équation de type Schrödinger pour la grande composante  $G(r)$ :

$$\left[ -\vec{\nabla} \frac{1}{2\bar{M}(r)} \vec{\nabla} + V_C(r) + V_{LS}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \right] G_\alpha(r) = \epsilon_\alpha G_\alpha(r), \quad (48)$$

avec:

$$\bar{M}(r) = M + \frac{\Sigma_S(r) - \Sigma_O(r)}{2}, \quad (49)$$

$$V_C(r) = \Sigma_S(r) + \Sigma_O(r), \quad (50)$$

$$V_{LS}(r) = -\frac{1}{2\bar{M}^2(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [\Sigma_S(r) - \Sigma_O(r)]. \quad (51)$$

Rappelons que la self-énergie  $\Sigma_S$  provient de l'échange de méson  $\sigma$ . Elle est négative (attraction). La self-énergie  $\Sigma_O$  provient de l'échange de méson  $\omega$ . Elle est positive (répulsion). Pour  $\Sigma_S = -\Sigma_O$ , on a  $\bar{M} = M^* = M + \Sigma_S$ . Comme dans un noyau fini, nous avons en général  $|\Sigma_O| < |\Sigma_S|$ , alors  $\bar{M} > M^*$ . Rappelons aussi que ces self-énergies sont solution, dans l'approximation de champ moyen, des équations (40,41) et donc tiennent compte automatiquement de la portée finie de l'interaction nucléon-nucléon.

Le potentiel spin-orbit  $V_{LS}$  a une forme très simple dans l'approximation de champ moyen, et dans l'approximation de portée nulle:

$$V_{LS}(r) \simeq \frac{1}{2\bar{M}^2(r)} \frac{1}{r} \left[ \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right] \frac{dn}{dr}, \quad (52)$$

avec :

$$\bar{M}(r) \simeq M - \frac{1}{2} \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) n. \quad (53)$$

Il est important de remarquer à ce niveau que le potentiel spin-orbite dépend explicitement de la densité par le terme de masse effective  $\bar{M}$ , en plus de sa dépendance triviale en  $dn/dr$ . Cette dépendance en densité n'est pas implémentée en général dans les interactions effectives de type Skyrme.

Pour un noyau  $N \neq Z$ , il faut aussi tenir compte de l'échange de méson  $\rho$ . Dans l'approximation de champ moyen, le potentiel s'écrit alors explicitement:

$$V_{LS}^\tau(r) \simeq \frac{1}{2\bar{M}^2(r)} \frac{1}{r} \left[ \left( W + \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \right) \frac{dn^\tau}{dr} + \left( W - \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \right) \frac{dn^{\tau' \neq \tau}}{dr} \right], \quad (54)$$

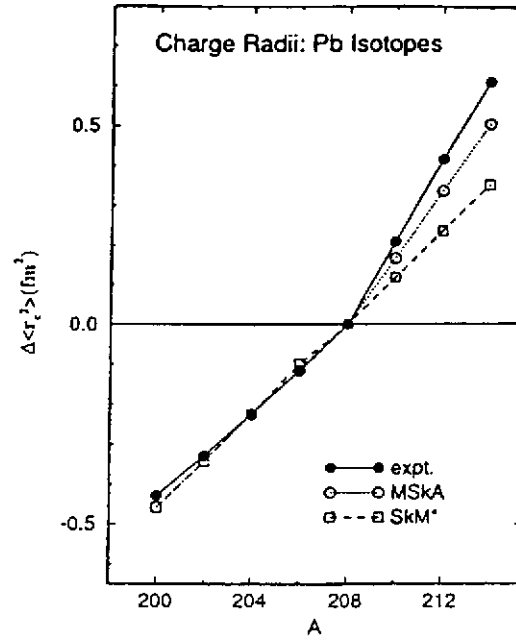


Figure 8: Rayon carré moyen de plusieurs isotopes du Pb

avec :

$$W = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} . \quad (55)$$

On notera par ailleurs  $W_1 = W + g_\rho^2/m_\rho^2$  et  $W_2 = W - g_\rho^2/m_\rho^2$ . Cette dépendance en isospin, et en densité, du potentiel spin-orbite peut-être en fait testée expérimentalement. Nous avons indiqué sur la figure 8 la variation du rayon carré moyen de plusieurs isotopes du Plomb, en fonction de A [18]. La prédiction d'un calcul Hartree-Fock non-relativiste avec l'interaction de Skyrme SkM\* est indiquée par la courbe en trait pointillée sur la figure 8. Elle correspond à  $W_1/W_2 \simeq 2$ . La prédiction du champ moyen relativiste, indiquée par la courbe en points correspond à  $W_1/W_2 \simeq 1.1$ . Elle est en très bon accord avec les données expérimentales.

La prédiction d'un calcul relativiste dans l'approximation de Hartree-Fock pour cette même observable n'est pas encore connue. Il est probable que pour ce noyau lourd, les effets de taille finie de l'interaction soient faibles. Il est intéressant de ce point de vue d'étudier le comportement du potentiel spin orbite directement, dans un noyau plus léger. Nous avons indiqué dans le tableau 2 la différence des énergies à une particule de protons dans la couche  $1d_{3/2}$  et  $1d_{5/2}$  [19], dans l'approximation de champ moyen relativiste et dans l'approximation de Hartree-Fock. Il est clair que le potentiel spin-orbite diminue lorsque l'on s'éloigne de la vallée de stabilité, et que ce comportement est parfaitement reproduit dans l'approximation de Hartree-Fock, contrairement au modèle de champs moyen relativiste.

	$^{40}\text{Ca}$	$^{48}\text{Ca}$
Hartree	5.9	6.2
Hartree-Fock	8.0	4.1
Exp.	7.2	4.3

Table 2: Valeurs (en MeV) du splitting des énergies à une particule de protons pour les orbitales  $^1d_{3/2}$  et  $^1d_{5/2}$  dans  $^{40}\text{Ca}$  et  $^{48}\text{Ca}$ , pour différentes approximations, comparées aux valeurs expérimentales

## 5 Conclusions et perspectives

Nous avons démonté dans ce cours les mécanismes élémentaires au coeur des approches relativistes du problème à N corps. Les corrections relativistes générées par ces approches sont maintenant parfaitement bien comprises, dans l'approximation de champs moyen mais aussi dans l'approximation Hartree-Fock. Elles sont heureusement faibles par rapport aux contributions élémentaires à l'énergie potentielle, et peuvent ainsi être traitées en perturbation dans un développement en  $p/M$ . Par contre, les corrections obtenues ne sont pas faibles par rapport à l'énergie de liaison totale, ou aux énergies individuelles à une particule, et doivent donc être considérées, d'une manière ou d'une autre.

La connaissance des mécanismes dynamiques élémentaires au niveau du potentiel nucléon-nucléon (échange de mésons isoscalaires  $\sigma$  et  $\omega$ , et isovectoriels  $\pi$  et  $\rho$ ) permet de générer automatiquement plusieurs propriétés essentielles de l'interaction effective:

- Le potentiel spin-orbite,
- La dépendance en vitesse,
- La dépendance en isospin de l'énergie de liaison et du potentiel spin-orbite,
- La portée finie de chaque terme de l'interaction.

Ces prédictions dépendent d'un nombre très restreint de paramètres libres (3), eux-mêmes fortement contraints par les propriétés du potentiel nucléon-nucléon lui-même. Les résultats obtenus dans l'approximation Hartree-Fock relativiste sont en très bon accord avec l'expérience d'abord parce qu'ils conservent la trace de ces mécanismes. On sait maintenant incorporer les termes d'échanges, et les corrélations à courte portée.

Pour finir, nous voudrions faire quatre remarques générales.

En ce qui concerne les études phénoménologiques de l'interaction effective tout d'abord, il nous paraît indispensable, d'un point de vue physique, de prendre en considération les contraintes provenant des approches relativistes. Cela n'a que rarement été fait jusqu'à présent [20]

Les calculs de champ moyen relativiste (approximation Hartree) sont suffisants pour obtenir la saturation de la matière nucléaire. Cela ne veut hélas pas dire que cette approximation est physiquement justifiée. On sait maintenant que les corrélations de Pauli



(termes d'échanges) et les corrélations à courte portée provenant de la répulsion du potentiel nucléon-nucléon sont aussi importantes que les corrections relativistes à proprement parlé. Ces corrélations doivent être considérés, et le sont déjà dans les calculs de type Brueckner-Hartree-Fock.

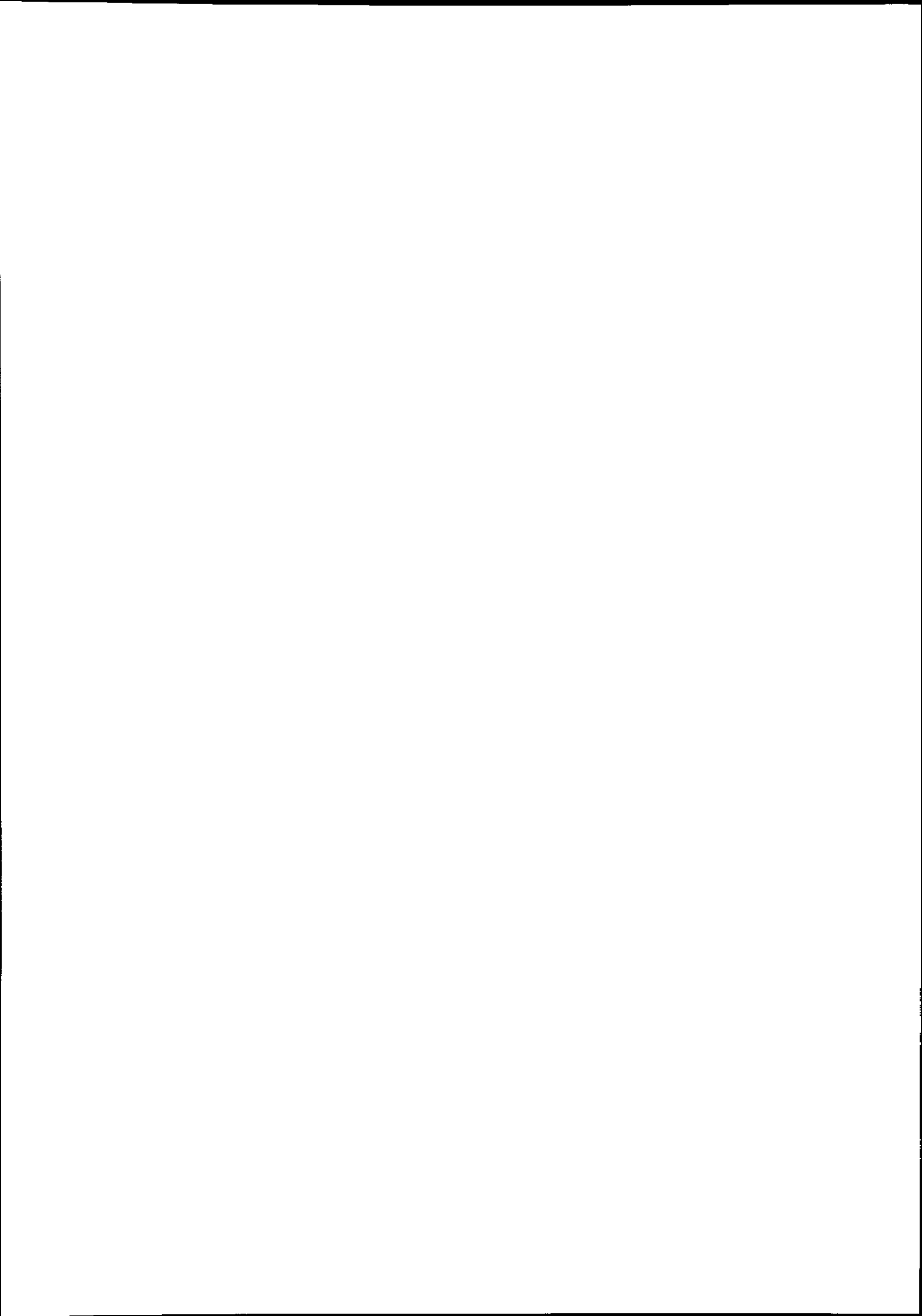
En ce qui concerne les programmes expérimentaux eux-mêmes, nous avons essayé de montrer dans ce cours qu'il était vain de vouloir opposer interaction effective à la Skyrme et approches relativistes. Il n'est donc pas question de pouvoir favoriser une approche plutôt que l'autre par une quelconque mesure expérimentale. Par contre, les programmes expérimentaux peuvent valider, ou invalider, le concept même d'interaction effective construite à partir d'un potentiel nucléon-nucléon élémentaire. Jusqu'à présent ce concept a montré toute sa puissance. Il n'y a aucune raison théorique pour que ce concept ne s'étende pas naturellement à toutes les nouvelles données issues des expériences avec des faisceaux exotiques.

Pour finir, je voudrais insister encore une fois sur le fait que les approches relativistes du problème à N corps sont maintenant connues depuis plus de 10 ans [3]. Elles ont été extensivement étudiées, à la fois dans le cas de la matière nucléaire mais aussi des noyaux finis, et ceci dans toutes les approximations traditionnelles du problème à N corps, comme nous avons essayé de le montrer dans ce cours. On en connaît tous les avantages, et tous les défauts.

## References

- [1] T.H.R. Skyrme, *Phil. Mag.* 1 (1956) 1043
- [2] D. Vautherin et D.M. Brink, *Phys. Rev. C*5 (1972) 626  
J.W. Negele et D. Vautherin, *Phys. Rev. C*5 (1972) 1472
- [3] J.D. Walecka, *Annals of Physics (N.Y.)* 83 (1974) 491  
B. Serot and J.D. Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* 16 (1985) 1
- [4] J.-F. Mathiot, cours de l'école Joliot-Curie 1985 et 1989
- [5] J.-F. Mathiot, *Annales de Physique, France*, 16 (1991) 527
- [6] J.-P. Blaizot, cours de l'école Joliot-Curie 1993
- [7] P. Guichon, cours de l'école Joliot-Curie 1986
- [8] M. Lacombe et al., *Phys. Rev. C*21 (1980) 861
- [9] R. Machleidt, *Adv. Nucl. Phys.* 19 (1989) 189
- [10] M.M. Nagels, T.A. Rijkenaard et J.J. De Swart, *Phys. Rev. D*17 (1978) 767, *D*20 (1979) 1633
- [11] J.-F. Mathiot, *Physics Reports* 173 (1989) 63

- [12] J.-P. Blaizot, cours dans ce volume (1997)
- [13] P. Grangé et al., Phys. Rev. C40 (1989) 1040
- [14] J. Dechargé et D. Gogny, Phys. Rev. C21 (1980) 1568
- [15] A. Bouyssy et S. Marcos, Phys. Lett. 127B (1983) 157
- [16] N. V. Giai et S. Marcos, en préparation
- [17] S. Marcos et al., Nucl. Phys. A600 (1996) 529
- [18] M.M. Sharma et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3744
- [19] A. Bouyssy et al., Phys. Rev. C36 (1987) 380
- [20] P.G. Reinhard et H. Flocard, Nucl. Phys. A584 (1995) 467



# LE PROBLÈME À N CORPS

## Approches non relativistes

Jean-Paul BLAIZOT \*

*Service de Physique Théorique<sup>†</sup>, CE-Saclay*

*91191 Gif-sur-Yvette, France*

**RESUME** Ce cours constitue un brève introduction à quelques unes des notions de base du problème à N corps nucléaire : matière nucléaire considérée comme un liquide de Fermi, notion de quasiparticule, approximation de champ moyen, corrélations et interactions effectives. Les nucléons sont traités comme des particules non relativistes.

**ABSTRACT** These lectures are a brief introduction to some of the basic concepts used in the nuclear many body problem: nuclear matter viewed as a Fermi liquid, quasiparticles, mean field approximation, correlations and effective interactions. Nucleons are treated as non relativistic particles.

## 1 Introduction

La "matière nucléaire" fait partie avec le gaz d'électrons et l'hélium liquide des systèmes de référence pour lesquels ont été élaborées de nombreuses méthodes du "problème à N corps" [1-5]. Par problème à N corps on entend cet ensemble de techniques, issues en partie de la théorie quantique des champs et de la mécanique statistique, qui permettent de décrire les propriétés des systèmes quantiques constitués d'un grand nombre de particules en interaction. Dans les systèmes considérés, les interactions sont fortes (c'est le cas de l'hélium ou de la matière nucléaire) ou de longue portée (gaz d'électrons). De ce fait, l'usage de la théorie de perturbation est limitée, et d'autres schémas d'approximation ont du être inventés, conduisant parfois à des concepts nouveaux. Par ailleurs, avec les progrès récents des ordinateurs, il est devenu possible d'envisager des calculs menant à des solutions pratiquement exactes de l'équation de Schrödinger pour  $N$  particules. Par exemple, on peut maintenant calculer avec une excellente précision l'énergie de l'état fondamental de l'hélium liquide à partir du potentiel d'interaction entre deux atomes d'hélium. Et il en est de même en ce qui concerne la matière

---

\* Affiliated to CNRS

<sup>†</sup>Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Énergie Atomique

nucléaire (avec toutefois une complication liée au fait que le potentiel d'interaction nucléon-nucléon ne suffit pas à expliquer les propriétés de la matière nucléaire, et qu'il faut prendre en compte en particulier l'effet d'interactions à trois corps).

En toute rigueur, la matière nucléaire n'existe pas en tant que système physique observable. Il s'agit en effet d'un système idéal constitué d'un grand nombre de neutrons et de protons sans charge électrique. La charge électrique est ignorée parce que l'on veut construire un système modèle possédant une bonne limite thermodynamique (et l'énergie coulombienne d'un système chargé ne possède pas une telle limite, puisqu'elle croît comme le carré du nombre de charges). Par ailleurs, l'énergie totale des gros noyaux est dominée par l'interaction forte, l'interaction coulombienne ne représentant qu'une petite correction. Ainsi, la matière nucléaire représente approximativement l'état de la matière à l'intérieur des gros noyaux, et on peut déduire ses propriétés de l'étude de ces gros noyaux.

Cela étant, la matière nucléaire partage avec l'hélium 3 la propriété d'être un système de fermions interagissant avec des forces à courte portée, qui sont répulsives à courte distance et attractives à plus grande distance. De tels systèmes sont, à basse température, des "liquides quantiques" bien décrits par la théorie des liquides de Fermi [5] : leurs excitations élémentaires sont constituées de "quasiparticules" et de modes collectifs. Cette image de liquide de Fermi permet de comprendre le succès des approximations de champ moyen utilisées pour décrire les noyaux.

Il est bien évident qu'il n'est pas possible en si peu de temps d'aborder tout l'éventail des méthodes utilisées dans le problème à  $N$  corps (même en restant dans le cadre de la physique nucléaire). Mon objectif est de mettre l'accent sur quelques concepts importants : notions de liquide de Fermi et de quasiparticule, approximation de champ moyen, corrélations et interactions effectives. Dans ce cours, nous considérerons neutrons et protons dans la matière nucléaire comme des particules *non relativistes*. Ce cours est complémentaire de celui de J.-F. Mathiot qui, lui, abordera l'étude des effets relativistes.

## 2 Noyaux et matière nucléaire

L'idée de matière nucléaire repose sur deux observations simples. Tout d'abord, lorsque'on étudie l'énergie de liaison des noyaux :

$$E = M(N, Z) - Nm_N - Zm_P, \quad (1)$$

où  $N$  est le nombre de neutrons (de masse  $m_N$ ),  $Z$  le nombre de protons (mass  $m_P$ ), et  $M$  la masse du noyau (dans le système d'unités où  $c = 1$ ), on constate qu'en première approximation, cette quantité est proportionnelle au nombre total de nucléons  $A = N + Z$ , et non, comme on aurait pu s'y attendre pour un système qui interagit avec des forces à deux corps, comme  $A^2$  c'est à dire comme le nombre de paires de nucléons. Une étude plus fine conduit à paramétrer la variation de l'énergie de liaison sous la forme suivante (formule de masse de Bethe-Weizsäcker) :

$$E = -a_{vol}A + a_{surf}A^{2/3} + a_{coul}\frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym}\frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (2)$$

Ainsi, à la limite des gros noyaux,  $E/A$  tend vers une limite,  $a_{vol} \approx -16$  MeV.

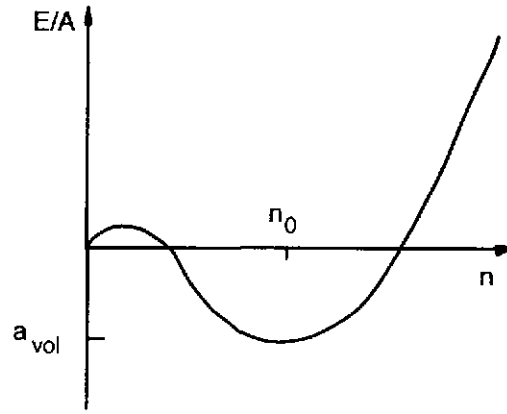


Figure 1: L'énergie de liaison par nucléon en fonction de la densité.  $n_0$  est la densité de "saturation", et  $a_{vol}$  l'énergie de liaison par nucléon de la matière nucléaire à l'équilibre.

La seconde observation concerne la densité des nucléons à l'intérieur des gros noyaux, qui reste approximativement constante lorsqu'on augmente le nombre de nucléons. Ainsi, le rayon d'un gros noyau est donné à une bonne approximation par la formule:  $R = r_0 A^{1/3}$  avec  $r_0$  constant.  $r_0 \approx 1.2$  fm.

Ces deux observations (que l'on résume parfois sous le vocable de "saturation des forces nucléaires") suggèrent que la matière à l'intérieur des gros noyaux est dans un état lié pas trop différent de ce qu'il serait si le système était constitué d'un nombre infini de nucléons, et abstraction faite de l'interaction coulombienne. Pour mieux le voir, écrivons l'énergie de cette matière nucléaire sous la forme:

$$E(\Omega, A) = \Omega \mathcal{E}(n) \quad n = A/\Omega, \quad (3)$$

où  $\Omega$  est le volume, et  $n$  la densité de nucléons. A l'équilibre (encore appelé point de saturation), on a :

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \Omega} \right|_A = 0 = -P(n_0) = \mathcal{E}(n_0) - n_0 \left. \frac{d\mathcal{E}}{dn} \right|_{n_0}, \quad (4)$$

où  $n_0$  est la densité d'équilibre. L'état d'équilibre, pour lequel la pression est nulle, est caractérisé par les conditions:

$$\left. \frac{d(E/A)}{dn} \right|_{n_0} = \left. \frac{d(\mathcal{E}/n)}{dn} \right|_{n_0} = 0. \quad (5)$$

Notons qu'à l'équilibre, le potentiel chimique  $\mu$  est égal à l'énergie de liaison par nucléon:

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_{\Omega} = \left. \frac{dE}{dn} \right|_{n_0} = \left. \frac{E}{A} \right|_{n_0}. \quad (6)$$

Ainsi, l'état d'équilibre peut être relié à l'existence d'un minimum dans la courbe donnant l'énergie de liaison par nucléon,  $E/A$  en fonction de la densité  $n$  (nous verrons plus loin comment une telle courbe peut être obtenue). Cette courbe a typiquement l'allure indiquée sur la figure

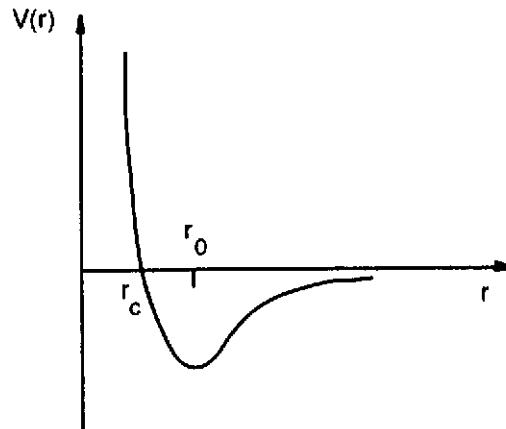


Figure 2: Représentation schématique du potentiel d'interaction nucléon-nucléon, montrant la forte répulsion à courte distance ( $r_c$  est le rayon du "cœur dur"), et l'attraction à longue distance.

2. L'augmentation à basse densité est facile à comprendre : elle résulte du principe de Pauli. Lorsque la densité continue d'augmenter, les forces attractives finissent par l'emporter et lier le système qui s'effondrerait sur lui-même en l'absence d'interactions répulsives. Ces interactions répulsives déterminent le comportement de  $E/A$  à haute densité.

C'est ce minimum de  $E/A$  qui correspond à l'état d'équilibre des noyaux. Une variation du nombre de nucléons, ou encore la perturbation causée par l'interaction coulombienne, modifie légèrement la densité d'équilibre. Mais comme la matière nucléaire est difficilement compressible, cette densité d'équilibre en fait varie peu d'un noyau à l'autre, et est également peu différente de ce qu'elle serait dans la matière nucléaire infinie.

La forme de la courbe donnant  $E/A$  en fonction de  $n$  reflète les propriétés de l'interaction nucléon-nucléon. Cette interaction peut-être modélisée par un potentiel à deux corps  $V(r)$  fonction de la distance  $r$  entre les nucléons. Ce potentiel, que l'on peut déduire de l'analyse des déphasages dans la diffusion nucléon-nucléon, et de l'étude des propriétés du deuteron, est très répulsif à courte distance, présentant ce que l'on appelle un "cœur dur". L'existence de ce cœur dur engendre des corrélations à courte portée entre les nucléons et complique de façon essentielle les calculs de matière nucléaire. Nous y reviendrons. A grande distance le potentiel d'interaction est attractif, et est dominé par l'échange de mésons  $\pi$ . Le potentiel d'interaction dépend également des spins et isospins des nucléons. On peut le construire explicitement à l'aide d'échanges de mésons. Je renvoie au cours de J.-F. Mathiot pour plus de détails [6].

Je terminerai cette discussion par une remarque d'ordre général. La matière nucléaire est un système infini de fermions interagissant par des forces à deux corps attractives à grande distance et très répulsives à courte distance. De ce point de vue la matière nucléaire ne se distingue pas d'autres systèmes de fermions comme l'hélium 3. Et de même que l'hélium 3 est liquide à basse température, on s'attend à ce qu'il en soit de même pour la matière nucléaire. Il est bon de rappeler le rôle essentiel joué ici par la mécanique quantique. Si les nucléons étaient des particules classiques, ils se trouveraient, dans l'état fondamental de la matière nucléaire, à des distances relatives correspondant au minimum ( $r_0$ ) de leur potentiel d'interaction : la matière nucléaire serait alors solide. Cependant l'énergie de point zéro associée à la localisation

d'un nucléon dans une région de taille  $r_0$ , de l'ordre de  $\hbar^2/Mr_0^2$ , est grande devant l'énergie d'interaction  $V_0$ . A titre de comparaison, le paramètre  $\hbar^2/(Mr_0^2V_0)$  vaut approximativement 0.5 pour la matière nucléaire, 0.2 pour  ${}^3\text{He}$ , et 0.06 pour  $\text{H}_2$  et 0.007 pour  ${}^{20}\text{Ne}$ . L'hélium est liquide, et a fortiori aussi la matière nucléaire ; l'hydrogène et le néon sont solides. (On pourra trouver une discussion très intéressante de cette question dans la référence [7]).

Le fait que la matière nucléaire soit un liquide de Fermi a d'importantes conséquences. En particulier, ses excitations élémentaires, appelées quasiparticules, sont très voisines de celles d'un système de particules libres. Nous allons revenir sur ce résultat, mais auparavant nous allons faire une rapide digression pour rappeler quelques éléments de seconde quantification, un langage commode pour discuter les propriétés des systèmes à  $N$  corps.

### Digression: seconde quantification.

La seconde quantification permet de prendre en compte de façon commode l'antisymétrie des états de  $N$  fermions. Désignons par  $\alpha$  l'ensemble des nombres quantiques qui caractérisent l'état d'une particule, et notons cet état  $|\alpha\rangle \equiv a_\alpha^\dagger|0\rangle$  où  $a_\alpha^\dagger$  est appelé *opérateur de création* d'une particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ , et l'état de référence  $|0\rangle$  est appelé vide. Un état antisymétrique à deux particules sera noté de la même manière :  $|\alpha\beta\rangle \equiv a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger|0\rangle$ . La propriété d'antisymétrie est assurée par la *relation d'anticommutation* :  $\{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger + a_\beta^\dagger a_\alpha^\dagger = 0$ . On définit de même des *opérateurs d'annihilation*  $a_\alpha$  en prenant l'hermitique conjugué des relations ci-dessus. Par exemple,  $\langle\alpha| \equiv \langle 0|a_\alpha$ . On pourra vérifier que la relation d'orthogonalité  $\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$  est satisfaite lorsque les opérateurs  $a_\alpha$  et  $a_\beta^\dagger$  obéissent à la règle de commutation :  $\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = a_\alpha a_\beta^\dagger + a_\beta^\dagger a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ . Par ailleurs l'opérateur  $a_\alpha$  correspond bien à la destruction d'une particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ . On pourra vérifier en effet que son action sur un état à une particule donne un état proportionnel à l'état de référence qui ne contient pas de particule :  $a_\alpha a_\beta^\dagger|0\rangle = -a_\beta^\dagger a_\alpha|0\rangle + \delta_{\alpha\beta}|0\rangle = \delta_{\alpha\beta}|0\rangle$ .

Plus généralement un état antisymétrique à  $N$  particule est de la forme  $a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\alpha_N}^\dagger|0\rangle$ . L'ensemble de tous ces états obtenus lorsque  $\alpha_i$  parcourt l'ensemble des états à une particule et  $N$  varie de 0 à l'infini, constitue une base de l'espace de Fock.

Considérons maintenant un *opérateur symétrique à une particule*. C'est un opérateur de la forme :  $F_N = \sum_{i=1}^N F^{(i)}$ , où  $F^{(i)}$  agit sur la particule ( $i$ ). Pour une particule, on peut écrire :  $F = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|F|\beta\rangle\langle\beta|$ . Cette écriture de l'opérateur  $F$  permet d'obtenir sans effort (bien entendu la démonstration de ce résultat exige un peu de travail) la forme de l'extension de l'opérateur  $F$  dans l'espace de Fock, c'est à dire dans l'espace des états à nombre arbitraire de particules. Nous noterons (provisoirement)  $\hat{F}$  cette extension. On a :

$$\hat{F} = \sum_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger \langle\alpha|F|\beta\rangle a_\beta. \quad (7)$$

On pourra vérifier par exemple que l'*opérateur nombre de particules* est donné par  $\hat{N} = \sum_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha$ . Une autre forme commode des opérateurs à un corps est obtenue en remarquant que le choix de la base  $\{\alpha\}$  des états à une particule est arbitraire, et on peut changer de base par transformation unitaire. On peut en particulier choisir comme états à une particule des états localisés au point  $\mathbf{r}$  :

$$|\alpha\rangle = \int d^3\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\alpha\rangle \quad \mathbf{r} = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\mathbf{r}\rangle, \quad (8)$$

où  $\langle\mathbf{r}|\alpha\rangle$  est la fonction d'onde de la particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ . Il est d'usage courant de noter les opérateurs de création et d'annihilation correspondant à ces états localisés  $\psi^\dagger(\mathbf{r})$  et  $\psi(\mathbf{r})$ , et de les appeler opérateurs de champ. Ils satisfont aux règles de commutation suivantes :

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \{\psi^\dagger(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9)$$



En termes des opérateurs de champ, l'opérateur nombre de particules s'écrit  $\int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$  et  $n(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$  est la densité de particule au point  $\mathbf{r}$ . De même, un opérateur *local* à un corps prend la forme :

$$\hat{F} = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r})F(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (10)$$

On remarque que l'expression de l'opérateur  $\hat{F}$  dans l'espace de Fock est formellement identique à celle de l'élément de matrice de l'opérateur à une particule  $F$  dans l'état décrit par la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$ . Autrement dit, pour obtenir l'expression de l'opérateur  $F$  dans l'espace de Fock, il suffit de réinterpréter ces fonctions d'onde comme des opérateurs de champ satisfaisant aux relations d'anticommutation (9). C'est là l'origine de la terminologie "seconde quantification".

Généralisons cette démarche au cas d'une interaction à deux corps,  $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(i, j)$  où  $V(i, j)$  est un potentiel d'interaction local, par exemple  $V(i, j) = V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ . Dans un premier temps, on peut exprimer l'énergie d'interaction à l'aide de la densité à une particule  $n(\mathbf{r})$  :

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')n(\mathbf{r})], \quad (11)$$

où le second terme élimine l'interaction de la particule avec elle-même. En utilisant l'expression donnée ci-dessus de la densité en terme des opérateurs de champ, on obtient aisément :

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (12)$$

où, dans la deuxième ligne, nous avons utilisé les relations d'anticommutation (9). En utilisant la transformation unitaire (8), on obtient l'expression équivalente :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (\alpha\beta|V|\gamma\delta) a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma. \quad (13)$$

### 3 Gas de Fermi. Liquide de Fermi

Nous reprenons maintenant notre discussion de la matière nucléaire et sa description en termes de liquide de Fermi. Rappelons tout d'abord les propriétés d'un système de fermions sans interaction, appelé encore gaz de Fermi. Dans un tel système, les états à une particule sont états propres de l'impulsion  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  et ont pour énergie  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$  où  $m$  est la masse du nucléon. Dans l'état fondamental, tous les états à une particule sont occupés jusqu'au *niveau de Fermi* caractérisé par l'impulsion  $\hbar k_F$ . La densité de particules est reliée directement à  $k_F$  :  $n = (1/6\pi^2)k_F^3$  (cette formule ne tient pas compte de la dégénérescence de spin-isospin de chaque état à une particule). L'énergie cinétique par particule est simplement  $T/A = (3/5)\epsilon_F$ , où  $\epsilon_F$  est l'énergie d'une particule au niveau de Fermi :  $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m$ . Les valeurs typiques de ces diverses grandeurs pour la matière nucléaire sont respectivement  $n \approx 0,17 \text{ fm}^{-3}$ ,  $k_F \approx 1,36 \text{ fm}^{-1}$ ,  $\epsilon_F \approx 38 \text{ MeV}$ ,  $T/A \approx 23 \text{ MeV}$ .

En utilisant la seconde quantification, on peut écrire l'état fondamental du gas de Fermi ainsi ( $p_F = \hbar k_F$ ) :  $|\Phi_0\rangle = \prod_{|\mathbf{p}| < p_F} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ . Les excitations élémentaires de ce système correspondent aux états dans lesquels on ajoute (état dit de "particule") ou l'on retranche (état dit de "trou") une particule à  $\Phi_0$ , et sont donc de la forme  $a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Phi_0\rangle$  et  $a_{\mathbf{p}}|\Phi_0\rangle$  respectivement, avec,

dans le premier cas,  $|\mathbf{p}| > p_F$  et, dans le second,  $|\mathbf{p}| < p_F$ . Les énergies de ces excitations, mesurées par rapport à l'énergie de l'état fondamental  $|\Phi_0\rangle$  sont respectivement  $\epsilon_p$  et  $-\epsilon_p$ . On peut aussi construire des excitations ayant même nombre de particules que l'état de base : ce sont les excitations "particule-trou", d'énergie  $\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \epsilon_p$ , avec  $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| > p_F$  et  $|\mathbf{p}| < p_F$ .

L'idée de base de la théorie des liquides de Fermi développée par Landau est que les états propres du système sans interaction se transforment en états propres du système en interaction lorsque l'on "branche" les interactions. Considérons ainsi l'état que l'on obtient en ajoutant une particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  à l'état fondamental exact  $|\Psi_0\rangle$ , c'est à dire l'état :  $a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Psi_0\rangle$ . L'état  $|\Psi_0\rangle$  est obtenu en tenant compte des interactions entre les particules qui le constituent. Par contre, l'état  $a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Psi_0\rangle$  est état propre d'un hamiltonien qui ne contient pas l'interaction de la particule ajoutée dans l'état libre d'impulsion  $\mathbf{p}$  et des autres particules de  $|\Psi_0\rangle$ . Comme l'état  $a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Psi_0\rangle$  n'est pas état propre de l'hamiltonien complet, si on le laisse évoluer, il va se mélanger avec d'autres états à  $N + 1$  particules d'énergies voisines. A l'instant  $t$  l'état du système est :

$$e^{-iHt} a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Psi_0\rangle, \quad (14)$$

où  $H$  est le hamiltonien complet du système, et inclut, entre autre, l'interaction de la particule supplémentaire avec les autres particules présentes dans l'état fondamental  $|\Psi_0\rangle$ . La probabilité que le système se trouve encore, à l'instant  $t$ , dans la configuration initiale  $a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Psi_0\rangle$  est mesurée par l'amplitude :

$$\langle\Psi_0|e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} a_{\mathbf{p}}^\dagger|\Psi_0\rangle = \langle\Psi_0|a_{\mathbf{p}}(t) a_{\mathbf{p}}^\dagger(0)|\Psi_0\rangle, \quad (15)$$

où  $a_{\mathbf{p}}(t) = e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt}$ . Le mélange de l'état initial avec d'autres états à  $N + 1$  particules conduit en général une décroissance exponentielle de l'amplitude :

$$\langle\Psi_0|a_{\mathbf{p}}(t) a_{\mathbf{p}}^\dagger(0)|\Psi_0\rangle \sim e^{-i\epsilon_p t} e^{-\gamma t}. \quad (16)$$

Si  $\gamma$  est petit ( $\gamma \ll \epsilon_p$ ), l'amplitude a un comportement oscillant en  $e^{-i\epsilon_p t}$  analogue à celui qu'on observerait dans un système sans interaction :  $\epsilon_p$  serait alors simplement l'énergie de la particule ajoutée. Ici  $\epsilon_p$  est une énergie qui tient compte des interactions entre toutes les particules du système. Cependant comme le comportement de l'amplitude (15) lorsque  $\gamma = 0$  est identique à celui d'une particule libre, on appelle l'excitation correspondante une *quasiparticule*. (Il convient de ne pas confondre cette notion avec celle introduite dans la description des propriétés d'appariement des noyaux dans le cadre de l'approximation BCS; voir le cours de P.-H. Heenen [9]). Le comportement oscillant de l'amplitude (15) est observé pour des temps  $t \lesssim \tau = 1/\gamma$ . On appelle  $\tau$  la durée de vie de la quasiparticule. Les quasiparticules sont bien définies, i.e. elles ont une grande durée de vie, si  $\gamma \ll \epsilon_p$ , i.e. si  $\tau \gg 1/\epsilon_p$ . Ainsi que nous allons le voir cette condition est réalisée pour des quasiparticules au voisinage de la surface de Fermi. L'énergie d'une quasiparticule au voisinage de la surface de Fermi peut se mettre sous la forme :

$$\epsilon_p = \epsilon_F + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_F) \cdot \mathbf{v}_F, \quad (17)$$

où  $\mathbf{v}_F = \mathbf{p}_F/m^*$ , et  $\epsilon_F$ , l'énergie d'une particule au niveau de Fermi contient ici la contribution des interactions. La quantité  $m^*$  est appelée *masse effective* de la quasiparticule.

Cette durée de vie peut être calculée approximativement en appliquant la règle d'or de Fermi :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f|V_{\mathbf{q}}|i\rangle|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (18)$$

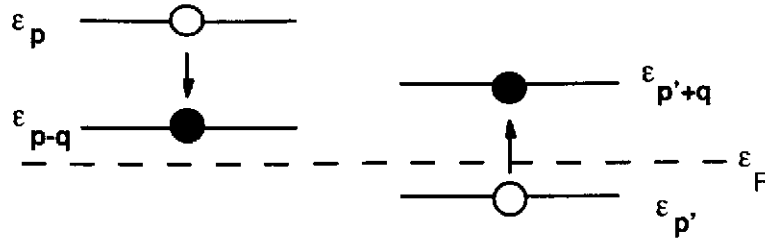


Figure 3: La particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  ( $\epsilon_{\mathbf{p}} > \epsilon_F$ ) fait une collision avec une particule de la mer de Fermi, d'impulsion  $\mathbf{p}'$  ( $\epsilon_{\mathbf{p}'} < \epsilon_F$ ). Par suite de cette collision, la particule d'impulsion  $\mathbf{p}$  perd l'énergie  $\omega = \epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$  au profit de la particule d'impulsion  $\mathbf{p}'$ , ce qui permet à cette particule d'aller occuper l'état d'impulsion  $\mathbf{p}' + \mathbf{q}$  à l'extérieur de la mer de Fermi.

où l'on a supposé que l'élément de matrice du potentiel d'interaction ne dépend que du transfert d'impulsion  $\mathbf{q}$ . Dans cette équation,  $|i\rangle$  est un état d'impulsion  $\mathbf{p}$  au dessus de la surface de Fermi :  $|i\rangle = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|\Phi_0\rangle$ ;  $|f\rangle$  est un état à deux particules et un trou:  $|f\rangle = a_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}'}|\Phi_0\rangle$ . On a donc:

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} |\langle V \rangle|^2 \sum_{\mathbf{p}'} \delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}) n_{\mathbf{p}'} (1 - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}) (1 - n_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}), \quad (19)$$

où  $n_p = 1$  si l'état  $\mathbf{p}$  est occupé, et  $n_p = 0$  sinon.

Il est commode de poser  $\omega = \epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{p}'}$ . On a  $0 < \omega < \epsilon_{\mathbf{p}} - \mu$  (voir la figure 3). Dans le régime où  $p \sim p_f$  et  $q \ll p_f$ , on a  $\omega \approx \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q} / m^*$ , où  $m^*$  est la masse effective de la quasiparticule, de telle sorte que  $0 < \omega < qv_f$ . Le calcul de l'intégrale ci-dessus conduit alors au résultat classique:

$$\frac{1}{\tau_p} \propto (\epsilon_p - \mu)^2. \quad (20)$$

Ainsi, dans un liquide de Fermi, une quasiparticule à la surface de Fermi a une durée de vie infinie. Ce résultat peut être regardé comme une conséquence du principe d'exclusion de Pauli qui limite l'espace de phase accessible pour la diffusion des particules à la surface de Fermi.

Ainsi une quasiparticule à la surface de Fermi se comporte, pendant un temps de l'ordre de  $\tau$ , comme un état stationnaire de l'hamiltonien complet. Il convient ici de faire deux remarques. La première est que ce résultat n'est valable qu'au voisinage de la surface de Fermi; lorsqu'on s'en éloigne, les collisions de la particule excédentaire avec les autres particules du système deviennent plus efficaces, et la configuration initiale se dilue très vite dans de multiples excitations compliquées : la durée de vie  $\tau$  devient petite et la notion de quasiparticule perd son sens. C'est ainsi par exemple qu'un état de trou "profond", d'énergie  $\epsilon_{\mathbf{p}} \ll \epsilon_F$ , se mélange facilement avec des configurations à  $n$  particules et  $n + 1$  trous et ne correspond pas à une excitation simple du système de type quasiparticule. La seconde remarque concerne la norme de l'état initial (ce qu'en physique nucléaire on appelle parfois le "facteur spectroscopique"). On peut écrire, en supposant  $|\Psi_0\rangle$  normé à 1,  $\langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} | \Psi_0 \rangle = 1 - \langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} | \Psi_0 \rangle$ . La quantité  $\langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} | \Psi_0 \rangle$  représente le nombre moyen de particules d'impulsion  $\mathbf{p}$  dans l'état  $|\Psi_0\rangle$ . Lorsqu'il n'y a pas d'interactions, ce nombre moyen est nul si  $|\mathbf{p}| > p_F$ . Ce n'est plus le cas en présence d'interactions. On en déduit que la norme de l'état  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |\Psi_0\rangle$  est plus petite que 1.

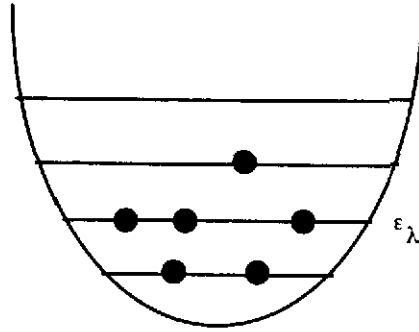


Figure 4: Dans l'image du champ moyen les particules occupent des niveaux d'énergie individuels. Les seules restrictions au remplissage de ces niveaux proviennent du principe d'exclusion de Pauli.

Les considérations précédentes, qui peuvent être rendues rigoureuses dans le cas des systèmes infinis, s'appliquent également aux noyaux (voir en particulier [10]) : les excitations de basse énergie des noyaux peuvent aussi être comprises comme des excitations de quasiparticules qui portent les nombres quantiques du système sans interaction (l'interaction entre quasiparticules, dont nous n'avons pas parlé ici pouvant donner naissance à des modes collectifs). Dans les noyaux cependant, le problème à une particule est beaucoup plus riche que dans la matière nucléaire (où il est essentiellement trivial : il s'agit du gaz de Fermi discuté plus haut). Les nombres quantiques des états à une particule reflètent l'arrangement du système tout entier (par exemple ils diffèrent selon que le noyau est sphérique ou déformé) et un grand nombre de propriétés des noyaux peuvent être déterminées sur la base d'un modèle où l'on suppose que les nucléons se déplacent dans le noyau comme des particules indépendantes placées dans un puits de potentiel qui résulte de leurs interactions mutuelles (fig. 3). C'est cette image que nous allons brièvement rappeler dans la section suivante.

## 4 Théorie du champ moyen

Les théories de champ moyen reposent sur une description du noyau à l'aide de fonctions d'onde de particules indépendantes. Un état de particules indépendantes est typiquement de la forme :

$$|\phi\rangle = a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger \cdots a_{\lambda_N}^\dagger |0\rangle. \quad (21)$$

Il est utile d'associer à cet état une matrice densité à un corps :

$$\rho_{ij} = \langle \Phi | a_j^\dagger a_i | \Phi \rangle \quad (22)$$

Dans la base  $\{\lambda\}$  on a :

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \langle \Phi | a_{\lambda'}^\dagger a_\lambda | \Phi \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} n_\lambda, \quad (23)$$

où  $n_\lambda = 1$  si  $\lambda$  repère un état occupé dans  $|\Phi\rangle$  et  $n_\lambda = 0$  sinon. Une autre écriture utile pour  $\rho$  est  $\rho = \sum_\lambda n_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|$ , montrant que la matrice  $\rho$  peut être interprétée comme le projecteur sur les états à une particule occupés dans  $|\Phi\rangle$ . Notons qu'une telle matrice densité satisfait les propriétés :  $\text{Tr}\rho = A$ ,  $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\rho^2 = \rho$ , la dernière propriété étant caractéristique d'un état de particules indépendantes.

La matrice densité à une particule permet d'exprimer sous forme très compacte les équations de champ moyen. Rappelons tout d'abord l'expression de l'énergie d'un état de particules indépendantes lorsque l'hamiltonien se compose d'un terme d'énergie cinétique  $T$  à un corps et d'un terme d'interaction à deux corps  $V$ . On a :

$$E[\rho] = \sum_{ij} T_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|V|kl\rangle \rho_{ki} \rho_{lj}. \quad (24)$$

La minimisation de cette quantité par rapport à toutes les variations de  $\rho$  qui satisfont les contraintes indiquées ci-dessus, conduit aux équations de champ moyen :

$$[h, \rho] = 0, \quad (25)$$

où  $h$  est le hamiltonien à une particule suivant :

$$h_{ij} = \frac{\delta E}{\delta \rho_{ji}} = T_{ij} + \sum_{kl} \langle ik|V|jl\rangle \rho_{lk}. \quad (26)$$

L'équation (25) montre qu'il existe une base d'états à une particule dans laquelle  $h$  et  $\rho$  sont simultanément diagonalisables. Dans cette base  $h|\lambda\rangle = e_\lambda|\lambda\rangle$ , avec :

$$e_\lambda = T_\lambda + \sum_{\lambda'} \langle \lambda\lambda'|V|\lambda\lambda'\rangle n_{\lambda'}. \quad (27)$$

Il est également utile d'écrire l'expression de l'énergie totale dans cette base. On a :

$$E = \sum_{\lambda} T_{\lambda} n_{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \langle \lambda\lambda'|V|\lambda\lambda'\rangle n_{\lambda} n_{\lambda'} = \sum_{\lambda} e_{\lambda} n_{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \langle \lambda\lambda'|V|\lambda\lambda'\rangle n_{\lambda} n_{\lambda'}. \quad (28)$$

**Remarque.** L'expression (28) donne l'énergie de l'état fondamental du système à l'approximation considérée, qui correspond à l'approximation de Hartree-Fock développée pour la première fois en physique atomique. Dans ce dernier cas,  $V$  est l'interaction coulombienne entre les électrons et le calcul variationnel conduit à une *borne supérieure* pour l'énergie : la valeur exacte de l'énergie de l'état fondamental est inférieure à la valeur calculée à partir de l'équation (28). Dans le cas des noyaux, la situation est plus compliquée. En effet, ainsi que nous le verrons dans la section 6, le calcul des éléments de matrice de  $V$  qui figurent dans l'expression (28) n'a pas de sens si  $V$  est le potentiel nucléon-nucléon  $V_{NN}$ , à cause du cœur dur. On peut cependant tenir compte de façon simple des corrélations induites par la forte répulsion à courte distance en définissant une *interaction effective* telle que (schématiquement) :

$$\langle \Psi|V_{NN}|\Psi\rangle = \langle \Phi|V_{eff}|\Phi\rangle, \quad (29)$$

où  $|\Psi\rangle$  est l'état corrélé et  $|\Phi\rangle$  un état de particules indépendantes. La relation entre  $V_{eff}$  et  $V_{NN}$  est compliquée et sera très brièvement esquissée dans la section 6. La propriété variationnelle de l'approximation de Hartree-Fock originale est perdue lorsqu'on travaille avec une interaction effective.

## 5 Matière nucléaire calculée avec une force effective.

Afin d'illustrer la méthode du champ moyen et revenir à la discussion sur la matière nucléaire, nous allons calculer les propriétés de la matière nucléaire à l'approximation du champ moyen, en

utilisant des interactions effectives. Dans ce cadre, la saturation n'est plus assurée par la forte répulsion à courte distance présente dans l'interaction libre, mais absente dans l'interaction effective. Comme nous allons le voir, d'autres mécanismes interviennent, qui dépendent de la façon dont est paramétrée l'interaction effective.

Considérons tout d'abord une force effective dépendant de la densité de la forme :

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \left\{ t_0 + t_3 n^d \left( \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \right\} \quad (30)$$

Le calcul de la densité d'énergie avec une telle interaction est facile et donne :

$$\mathcal{E}(n) = \frac{3\hbar^2 k_0^2 n_0}{10m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{5/3} + \frac{3}{8} t_0 n_0^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 + \frac{3}{8} t_3 n_0^{2+d} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{2+d}, \quad (31)$$

où  $n_0$  est la densité à la saturation, et  $\hbar k_0$  le moment de Fermi correspondant. Il est facile de voir que la courbe  $\mathcal{E}(n)/n$  a bien la forme indiquée sur la figure 2.

Un autre type d'interaction souvent utilisée est une interaction dépendant des vitesses. Les éléments de matrice d'une telle interaction sont donnés par :

$$(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | V | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) = \frac{1}{\Omega} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \left\{ t_0 + t_2 \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \frac{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4}{2} \right\}. \quad (32)$$

Notons que ce type d'interaction est utilisée dans des conditions où  $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \leq 2k_F$ . Elle ne saurait décrire l'interaction entre deux nucléons quelles que soient les valeurs des impulsions. Le calcul de la densité d'énergie avec une telle interaction est à nouveau élémentaire et donne :

$$\mathcal{E}(n) = \frac{3\hbar^2 k_0^2 n_0}{10m} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{5/3} + \frac{3}{8} t_0 n_0^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 + \frac{3}{16} t_2 k_0^2 n_0^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^{8/3}. \quad (33)$$

Notons que lorsque l'interaction dépend de la vitesse, le potentiel moyen dépend de l'impulsion de la particule, et l'on a :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(k), \quad (34)$$

avec pour l'interaction ci-dessus,  $U(k) = 3t_0 n/4 + 5t_2 n k^2/16 + 3t_2 n k_F^2/16$ . On peut réécrire  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  de la façon suivante :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( 1 + \frac{dU}{dT_k} \right) + U(0) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + U(0), \quad (35)$$

où  $T_k$  est l'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2/2m$ , et

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{dU}{dT_k} \right). \quad (36)$$

Notons que si l'interaction dépendant des vitesses doit assurer la saturation, on doit avoir  $t_2 > 0$ ,  $dU/dT_k > 0$ , et donc  $m^* < m$ . (Notons que lorsque le spectre des états à une particule est quadratique comme ici, i.e.  $\epsilon_{\mathbf{k}} \sim k^2$ , la définition (36) de la masse effective coïncide avec celle donnée plus haut (eq. (17)) pour les quasiparticules à la surface de Fermi.)

Les deux exemples ci-dessus utilisent deux mécanismes distincts pour assurer la saturation, c'est à dire garantir que la compétition entre forces attractives et répulsives conduise à un état d'équilibre à la densité  $n_0$ . Dans le premier cas, l'intensité des forces répulsives croit lorsque la densité croit. Dans le second cas une augmentation de la densité provoque une augmentation des vitesses relatives entre les nucléons ( $\sim v_F$ ), et donc à une augmentation de l'intensité de l'interaction répulsive correspondante. Notons que dans les deux cas, les forces répulsives doivent conduire à une dépendance de la densité d'énergie qui ne soit pas quadratique (i.e. en  $n^2$ ).

En fait, les deux mécanismes que nous venons de décrire sont présents à des degrés variables dans la plupart des modèles. De façon générale, on peut écrire :

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} + U(p) + R, \quad (37)$$

où  $R$ , appelée énergie de réarrangement, est engendrée par des forces dépendant de la densité. On suppose  $R$  indépendant de  $p$ . Si l'on suppose que l'énergie potentielle totale du système résulte de forces à deux corps uniquement (dépendant éventuellement de la densité), on peut écrire l'énergie de liaison totale ainsi (voir eq. (28)) :

$$\frac{E}{A} = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \frac{1}{2} \langle U(p) \rangle, \quad (38)$$

où la moyenne  $\langle \rangle$  indique une moyenne sur les impulsions dans la mer de Fermi. Or, comme nous l'avons vu plus haut,  $E/A$  à la saturation est égale au potentiel chimique (eq. (6)), ou encore à l'énergie de Fermi :

$$\frac{E}{A} = \frac{p_f^2}{2m} + U(p_f) + R. \quad (39)$$

En combinant les deux relations ci-dessus, on peut écrire :

$$-\frac{E}{A} = -\frac{1}{5} \frac{p_f^2}{2m} + U(p_f) - \langle U(p) \rangle + R. \quad (40)$$

Par conséquent, si  $R = 0$ ,  $U$  doit dépendre de  $p$ , sinon  $E/A$  est positif et le système n'est pas lié. Supposons qu'on puisse développer  $U(p)$  au voisinage de  $p = 0$  :

$$U(p) = U(0) + a \frac{p^2}{2m}. \quad (41)$$

Alors,

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} (1 + a) + U(0) + R = \frac{p^2}{2m^*} + U(0) + R. \quad (42)$$

Avec cette forme de  $U(p)$ , on peut faire explicitement la moyenne  $\langle U(p) \rangle$  sur les impulsions de la mer de Fermi, et obtenir la relation :

$$\frac{m}{m^*} = \frac{3}{2} - \frac{5m}{p_f^2} \left( \frac{E}{A} + R \right). \quad (43)$$

A titre d'exemple, si  $R = 0$ ,  $m^* = 0,4m$ . Si  $m^* = m$ ,  $R = 24$  MeV.

Mentionnons pour finir cette discussion qu'il existe une grandeur physique dont la valeur est très sensible au mécanisme de saturation. Il s'agit du coefficient d'incompressibilité [13] :

$$K = 9n_0^2 \frac{d^2(E/A)}{dn^2}. \quad (44)$$

On peut paramétrer la variation de la densité d'énergie  $\mathcal{E}(n)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{E} = a \left( \frac{n}{n_0} \right)^{5/3} + b \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 + c \left( \frac{n}{n_0} \right)^{d+2}, \quad (45)$$

où  $a = 3\hbar^2 k_0^2 n_0 / 10m$ . Les conditions :

$$\left. \frac{d(E/A)}{dn} \right|_{n_0} = 0 \quad \left. \frac{E}{A} \right|_{n_0} = -B \quad (46)$$

permettent de déterminer la valeur des coefficients  $b$  et  $c$  en fonction de  $B$  et  $n_0$ . On trouve :

$$b = -Bn_0 - a - \frac{1}{d} \left( Bn_0 + \frac{a}{3} \right) \quad c = \frac{1}{d} \left( Bn_0 + \frac{a}{3} \right). \quad (47)$$

Un calcul simple donne alors la valeur de  $K$  :

$$K = \frac{a}{n_0} + 9B + d \left( 9B + \frac{3a}{n_0} \right) \approx 167 + 212d, \quad (48)$$

où, pour obtenir les valeurs numériques, nous avons utilisé  $B = -16$  MeV, et  $n_0 = 0,17$  fm<sup>-3</sup>.

Il se trouve que l'on peut associer une valeur bien précise de  $d$  à chaque mécanisme de saturation utilisant l'approximation de champ moyen. Ainsi pour une force dépendant des vitesses on a  $d = 2/3$  et  $K = 308$  MeV (typique d'une force de Skyrme); pour une interaction dépendant de la densité comme  $n^{1/3}$  (comme par exemple l'interaction de Gogny), on a  $d = 1/3$  et  $K = 238$  MeV; une force de portée finie assurant la saturation grâce aux termes d'échange seuls conduit à  $d = -1/3$  et  $K = 96$  MeV; enfin les champs moyens relativistes discutés par J.-F. Mathiot conduisent (dans leur version la plus simple) à  $d = 5/3$  et  $K = 522$  MeV.

## 6 Problèmes liés au coeur dur

Ainsi que nous l'avons remarqué au début de ce cours, l'interaction nucléon-nucléon présente une très forte répulsion à courte distance qui rend impossible son utilisation dans un calcul de type champ moyen, l'élément de matrice d'un tel potentiel d'interaction entre états à une particule étant infini. (Dans la matière nucléaire, les fonctions d'onde à une particule sont des ondes planes, et le calcul des éléments de matrice de  $V$  fait intervenir l'intégrale sur tout l'espace de  $V_{NN}(r)$ . Cette intégrale diverge si  $V_{NN}(r) \rightarrow \infty$  plus vite que  $1/r^3$  lorsque  $r \rightarrow 0$ , ce qui est le cas). En fait la forte répulsion induit des corrélations à courte portée entre les nucléons dont il faut tenir compte (voir fig. 6) : ces corrélations assurent que la fonction d'onde relative de deux nucléons s'annule dans la région où le potentiel est très répulsif.

Considérons l'équation de Schrödinger pour une paire de nucléons dans la matière nucléaire :

$$(E - H_0)\psi(1, 2) = V\psi(1, 2), \quad (49)$$



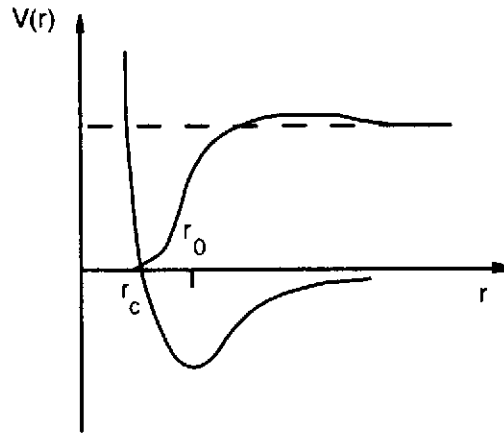


Figure 5: La fonction d'onde exacte décrivant le mouvement relatif de deux particules qui interagissent avec un potentiel fortement répulsif s'annule à l'intérieur du "coeur dur". Par contre, lorsque la distance entre les particules croît, la fonction d'onde tend vers la fonction d'onde du mouvement libre, représentée ici par la ligne horizontale pointillée.

où  $H_0 = T_1 + T_2$  est la somme des énergies cinétiques des deux nucléons, et  $V$  le potentiel d'interaction. Appelons  $\phi_n(1, 2)$  les états propres de  $H_0$ , tels que  $H_0\phi_n(1, 2) = E_n\phi_n(1, 2)$ , et posons  $(\phi_0|\psi) = 1$ . En projetant l'équation de Schrödinger sur ces états propres, et en séparant la contribution de l'état  $n = 0$ , on obtient aisément :

$$E - E_0 = (\phi_0|V|\psi)$$

$$\psi = \phi_0 + \sum_{n \neq 0} \phi_n \frac{1}{E - E_n} (\phi_n|V|\psi). \quad (50)$$

On en déduit le développement de l'énergie de la paire en puissance du potentiel  $V$ :

$$E - E_0 = (\phi_0|V|\phi_0) + \sum_{n \neq 0} (\phi_0|V|\phi_n) \frac{1}{E - E_n} (\phi_n|V|\psi). \quad (51)$$

L'itération de l'équation ci-dessus engendre la famille de diagrammes représentés sur la figure 6. Notons que le développement (51) est un développement formel : en effet chaque terme, pris individuellement diverge ; cependant la somme de tous les termes est finie.

On peut interpréter ce développement de la façon suivante :

$$E - E_0 = (\phi_0|V_{eff}|\phi_0). \quad (52)$$

où  $V_{eff}$  est l'interaction effective. Notons que la construction de cette interaction effective fait intervenir des sommes sur des états intermédiaires où les nucléons doivent, à cause du principe de Pauli, se trouver en dehors de la mer de Fermi. Cette restriction est une des origines de la dépendance en densité de l'interaction effective.

## 7 Calculs exacts.

Les progrès continuels des moyens de calcul numérique (en particulier le développement des calculateurs massivement parallèles) permettent d'envisager maintenant des solutions exactes

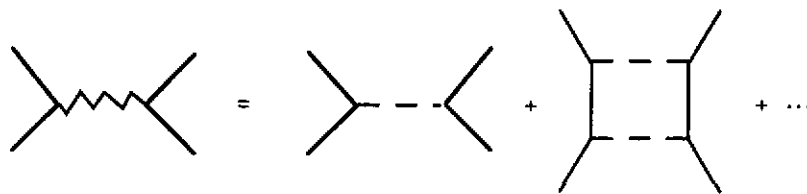
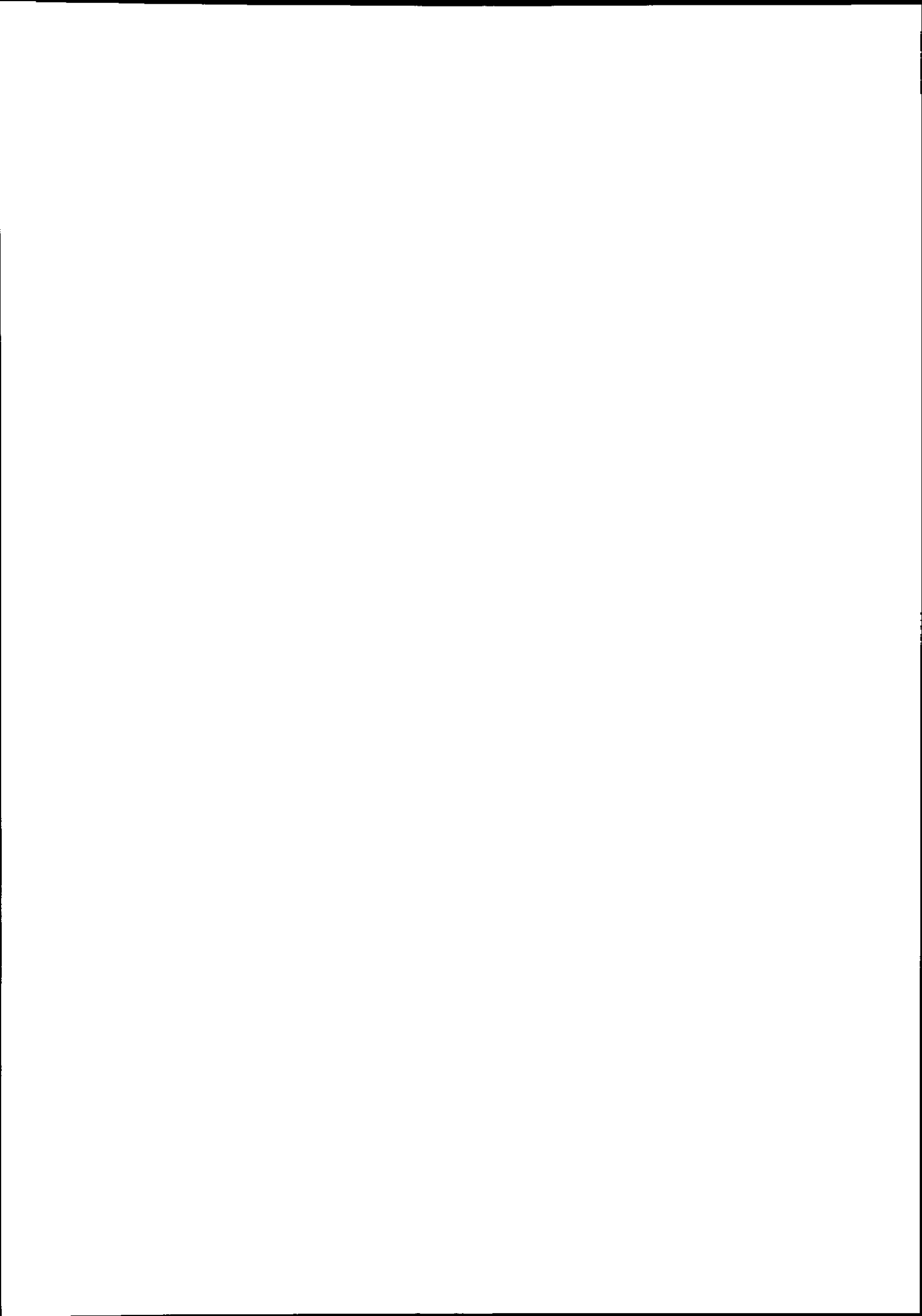


Figure 6: Représentation schématique du développement de l'interaction effective en puissance du potentiel d'interaction nucléon-nucléon. L'interaction effective est représentée par la ligne brisée, le potentiel nucléon-nucléon par la ligne pointillée.

du problème à  $N$  corps pour les noyaux. Par là on entend la résolution explicite de l'équation de Schrödinger pour un noyau dont les nucléons interagissent avec des forces à deux et trois corps, et la détermination de l'état fondamental et des premiers états excités. La mise en oeuvre d'un tel programme met en jeu un arsenal de techniques sophistiquées qu'il n'est pas possible de décrire ici. Pour avoir un aperçu de "l'état de l'art" dans ce domaine, on pourra se reporter à [14] où est présenté le calcul des noyaux légers ayant jusqu'à 7 nucléons.

## References

- [1] G.E. Brown. *Many Body Problems*, North Holland, 1972.
- [2] A. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, (McGraw Hill, New-York, 1971).
- [3] P. Ring et P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, (Springer-Verlag, New-York, 1980).
- [4] J.P. Blaizot et G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, (MIT Press, 1986).
- [5] P. Nozières. *Le problème à  $N$  corps* (Dunod. Paris, 1963).
- [6] J.-F. Mathiot, cours de l'Ecole Joliot-Curie 1997, ce volume.
- [7] B. Mottelson, Cours de l'Ecole de Physique des Houches 1997.
- [8] V.R. Pandharipande, I. Sick and K.A. de Witt Huberts, *Rev. Mod. Phys.***69** (1997) 981.
- [9] P.-H. Heenen, cours de l'Ecole Joliot-Curie 1997, ce volume.
- [10] A.B. Migdal, *Theory of Finite Systems and Applications to Atomic Nuclei* (Wiley Interscience 1967).
- [11] D. Vautherin et D. Brink, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 626; J.W. Negele et D. Vautherin, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 1472.
- [12] J. Dechargé et D. Gogny, *Phys. Rev.* **C21** (1980) 1568.
- [13] J.-P. Blaizot, *Phys. Repts.***64** (1980) 172.
- [14] B.S. Pudliner et al., "Quantum Monte Carlo calculations of nuclei with  $A \leq 7$ ", preprint nucl-th/9705009, mai 1997.



## LE MODÈLE EN COUCHES

(vers une description unifiée de la structure nucléaire)<sup>1</sup>

Alfredo Poves

*Departamento de Física Teórica, Universidad Autónoma  
Cantoblanco, 28049-Madrid (España)*

### RESUMÉ.

Nous présentons dans ce cours les fondements du modèle en couches sphérique, que l'on traite comme une approximation à la solution du problème séculaire complet. Nous introduisons les notions d'espace de valence, d'interaction effective et d'opérateur effectif. Nous analysons la structure des interactions effectives réalistes et nous associons la partie monopolaire de celles-ci avec le champ moyen sphérique. Le hamiltonien multipolaire est ramené à une forme universelle et simple contenant appariement (isoscalaire et isovectorel), quadrupole, octupole, hexadecapole et  $(\sigma \cdot \tau)$   $(\sigma \cdot \tau)$ . Les méthodes de résolution du problème séculaire sont décrites, en particulier la méthode de Lanczos. Nous appliquons le modèle à la description de la déformation nucléaire et nous le mettons en rapport avec les théories du champs moyen déformé. Nous proposons une nouvelle symétrie, "quasi"-SU3, pour aborder la déformation en base sphérique. Finalement nous étudions les noyaux très éloignés de la vallée de stabilité  $\beta$  en particulier en ce qui concerne la disparition de quelques unes des fermetures magiques que nous expliquons en termes d'états intrus.

### ABSTRACT

In this series of lectures we present the foundations of the spherical shell model that we treat as an approximation to the exact solution of the full secular problem. We introduce the notions of valence space, effective interaction and effective operator. We analyse the structure of the realistic effective interactions, identifying their monopole part with the spherical mean field. The multipole hamiltonian is shown to have a universal (simple) form that includes pairing (isovector and isoscalar), quadrupole, octupole, hexadecapole and  $(\sigma \cdot \tau)$   $(\sigma \cdot \tau)$ . We describe the methods of resolution of the secular problem, in particular the Lanczos method. The model is applied to the description of nuclear deformation and its relationship with the deformed mean field theories is studied. We propose a new symmetry, "quasi"-SU3, to understand deformation in the spherical basis. Finally we discuss the domain of nuclei very far from the valley of  $\beta$  stability, addressing the vanishing of some magic closures that can be explained in terms of intruder states.

<sup>1</sup>Lectures given at the Ecole Internationale Joliot-Curie, "Structure nucléaire: Un nouvel horizon", September 1997.

## SUMMARY

### 1.- Introduction

### 2.- Basic notions of the Spherical Shell Model.

The nucleus as a system of non-(explicitly)-relativistic nucleons. The nucleon-nucleon interaction. The independent particle model and the nuclear mean field. Regularizability of the nucleon-nucleon interaction in the nuclear medium. G-matrices and density dependence. The mean field as a basis for the occupation number space (Fock-space). Valence spaces; the secular problem. Examples of shell model valence spaces. The effective nuclear interaction written in second quantization formalism in  $jj$  coupling.

### 3.- Realistic effective interactions.

Monopole and multipole hamiltonians. The separation theorem. The monopole hamiltonian and the spherical mean field. Explicit expressions for the isoscalar and isovector monopole hamiltonian. What is right and what is wrong in the realistic effective interactions and how to cure it. An application; the quasi-particle gaps of  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{56}\text{Ni}$ . Randomness and coherence in the multipole hamiltonian.

### 4.- The solution of the secular problem.

How to choose the basis; coupling schemes (m-scheme, JJ, quasi-spin, etc) and truncations. The Lanczos method. Whitehead's prescription for the calculation of strength functions. Shell Model Monte Carlo. Some spectroscopic results in the  $pf$  shell.

### 5.- Spherical Shell Model and deformation.

Rotors around  $A=48$ . Comparison of mean field and shell model results. Alignment and back-bending. A word on neutron-proton pairing. The limit of strong spin-orbit; Quasi-SU3 and Pseudo-SU3.

### 6.- Nuclei far from stability.

Magic numbers (Shell closures) far from stability; do they stand? The reduction of the shell gaps and the role of correlations. Intruder states. From  $^{20}\text{Mg}$  to  $^{40}\text{Mg}$ .  $N=20$  and  $N=28$  in very neutron rich isotopes. The  $N=Z$  line. The region of deformation around  $N=Z=40$ .

### 7 - Conclusions.

## 1. INTRODUCTION

The nuclear shell model has been often considered to be of application only to those nuclear manifestations in which the single particle degrees of freedom are dominant. That in spite of the work of Elliott [1], already 40 years old, that demonstrated the possibility of explaining deformation in light nuclei using the SU3 properties of the quadrupole nuclear force in an harmonic oscillator basis. In recent times the advent of new computers and shell model codes has given access to new mass regions where collectivity shows up in a more conspicuous way, and the spherical shell model approach has proven to be able of coping with the new challenges, either close or far from the valley of stability, giving a unified description of the single particle and collective degrees of freedom of the nucleus. In this lectures we plan to guide the reader from the very basic starting points of the shell model description of nuclei to some of the latest applications. Our aim is to keep while possible the contact with the underlying free nucleon-nucleon interaction and when the link has to be broken to try to understand why. Many books exist that can serve as introduction to the subject, but we shall quote only the more recent or those that fully develop the mathematical formalism of the theory [2]. The last complete review of the shell model approach to nuclei is due to B. A. Brown and B. H. Wildenthal [3]

The original aspects of this presentation come from a long lasting collaboration with Etienne Caurier and Andres Zuker (Ires, Strasbourg), Joaquin Retamosa (UCM, Madrid), Frederic Nowacki (IPT, Strasbourg) and Gabriel Martinez-Pinedo (Caltech). Although adressed to a very different audience, there are two recent conference reports by A. Zuker that in some cases overlap and in others complement these notes [4].

## 2. BASIC NOTIONS OF THE SPHERICAL SHELL MODEL

We shall consider the nucleus as composed of  $Z$  protons and  $N$  neutrons, that interact via two-body forces and obey a non-relativistic (Schrödinger) equation. Therefore we will not consider explicitly meson or quark degrees of freedom nor shall we use relativistic kinematics. Recent advances in the relativistic mean field description of nuclei based on meson exchanges have shown that the main advantages of such an approach are that it accomodates the spin orbit interaction in a natural way, suggesting –perhaps– that its isospin dependence is different from what is assumed in the non-relativistic effective forces and that it provides a saturation mechanism for nuclear matter (see J. Mathiot's lectures in this volume). Many relativistic aspects are actually incorporated in the non relativistic approach via the nucleon-nucleon interaction in the vacuum that contains many terms of relativistic origin (spin-orbit, tensor etc). The problem of saturation can be solved in the non-relativistic approach by introducing three-body forces. In mean field effective interactions, density dependent terms take care of saturation. In the shell model approach the size of the underlying mean field potential is adapted to the size of the nucleus, although some problems originating in the regularization of the nucleon-nucleon interaction may show up in the spectroscopic calculations too.

The starting point is the nucleon-nucleon interaction  $V_{NN}$ . As it corresponds to a derived interaction it is not simple. It contains all kinds of terms, central, spin-orbit, tensor, spin-spin etc. At long distances it has a Yukawa form, while at short distances

it shows an extremely repulsive core. The short range repulsion is at the origin of most of the theoretical and technical problems that the nuclear many-body theories have to solve. Actually, the very idea of a shell model for the nucleus may seem contradictory with this strong correlation because it rudely breaks the independent particle picture. However, very early, experimental evidence of a shell model like behaviour was available – magic numbers, single particle energies, magnetic moments etc – that led to the empirical construction of the nuclear mean field, a surface corrected harmonic oscillator, whose main novelty was the very strong spin-orbit splitting needed to explain the experimental magic numbers.

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + Dl^2 + Cl \cdot \vec{s}$$

The success of the independent particle model implies that the bare nucleon-nucleon interaction can be regularized in the nuclear medium. Therefore an effective interaction can be found such that

$$H_{eff}\Psi_{eff} = H_{bare}\Psi_{correlated}$$

This effective interaction can be aimed to be used in mean field calculations along the periodic table and then it has to incorporate density dependent terms or for configuration mixing calculations, in this case its comes under the name of G-matrix. The main problem of the regularization procedures based on Brueckner theory is that they fail to reproduce the saturation point of nuclear matter (the Coester line problem). This is something to be recalled when using realistic G-matrices.

The use of a regularized interaction implies that what we are dealing with in a shell model description are quasiparticles in Landau's sense. This will show up in observables such as spectroscopic factors in  $(d, p)$  or  $(e, e' p)$  reactions, Gamow-Teller strengths or partial shell occupancies as measured by electron scattering (the best know being the  $3s_{1/2}$  orbit in lead isotopes). For a fully updated and accesible discussion of these points see ref [5] and J. P. Blaizot's lectures in this volume.

Once we adopt a regularized interaction that is compatible with the experimental mean field (magic numbers) we can proceed using the spherical mean field orbits as the basis for the occupation number space (Fock space). We have states  $i, j, k, \dots$  with energies  $\epsilon_i, \epsilon_j, \epsilon_k, \dots$  that bunch in shells and give rise to magic numbers when the energy difference between them is large enough. The relevant operators create or annihilate a particle in a generic state "i" and second quantization formalism appears as the natural one.

A "formal" solution to the A-body problem can be sketched as follows:

i) We start by choosing a single particle basis,  $a_i^\dagger |0\rangle$ ,

ii) then, we build the A-particle wavefunctions,

$$a_{i_1}^\dagger \dots a_{i_A}^\dagger |0\rangle = |\phi_\alpha\rangle$$

iii) in terms of which, the physical states are expressed as:

$$|\Phi\rangle = \sum_\alpha C_\alpha |\phi_\alpha\rangle$$

iv) The solution of the secular problem

$$H |\Phi\rangle = E |\Phi\rangle$$

v) is given by the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$\langle \phi_\alpha | H_{eff} | \phi_\alpha \rangle$$

What we call spherical shell model description is an approximation to this formal solution, using a finite number of many-particle states. The many-particle wavefunctions must have the quantum numbers associated to the symmetries of the Hamiltonian

$$\Psi(J,T)^\pi(N,Z)$$

The effective interaction  $H_{eff}$  can be written in  $jj$  coupling as:

$$\sum_i t_i + \sum_{ijkl} W_{ijkl}^\Gamma (a_i^\dagger a_j^\dagger)^\Gamma (a_k a_l)^\Gamma$$

with  $\Gamma$  representing the pair  $J,T$  and  $W_{ijkl}^\Gamma = \langle ij(JT) | V_{eff} | kl(JT) \rangle$

The spherical mean field provides a basis and a zeroth order view of the nuclear dynamics. The regularized interaction is two-body and will govern the detailed behaviour of nuclei. For the mean field picture to have a sense, we expect that it will survive to the incorporation of the full interaction, at least in most of the cases, in other words, the separation between major shells will not collapse when the interaction is switched on. These constraints define the natural valence space (set of orbits) for a given class of nuclear properties. Let's be more precise on this point. For a given nucleus  $(N,Z)$  the mean field dictates which states are occupied (those below the Fermi level) and which are empty (those above). But other states can be close enough in energy or have such an structure that the residual two-body interaction can mix all of them and produce correlated states, deformed, superfluid or whatever. Therefore, the infinite set of mean field orbits will be divided in three parts:

- a) **Inert core**, the orbits that are forced to be always full. Imagine that the core consists of  $N_c$  neutrons and  $Z_c$  protons, thus if we are studying a nucleus  $(N,Z)$  there will remain  $n_v = N - N_c$  valence neutrons and  $z_v = Z - Z_c$  valence protons.
- b) **Valence space**, the orbits available to the valence particles, that will partially occupy them according to the dictates of the effective interaction.
- c) **External space**, the remaining orbits that are always empty .

It is the task of the theory to find the valence spaces that contain the relevant degrees of freedom for a given problem as demanded by the effective interaction. In figure 1. we have sketched the spherical mean field at the stability valley for  $A \leq 100$ . The safer valence spaces for shell model calculation are those comprised between magic closures. We shall examine several typical ones and see which properties they can accommodate and which not.

**p-shell** [1p3/2,1p1/2]. Calculations in this valence space can describe the behaviour of nuclei with  $2 < N, Z < 8$  ( only positive/negative parity states in even/odd nuclei).

**sd-shell** [1d5/2,2s1/2,1d3/2]. Positive parity states of nuclei  $8 < N, Z < 20$ .

**pf-shell** [1f7/2,2p3/2,2p1/2,1f5/2]. Although this valence space would naturally cover nuclei with  $20 < N, Z < 40$ , the strong spin orbit term of the spherical mean field breaks the harmonic oscillator ordering and beyond  $N, Z = 32$  the orbit 1g9/2 has to be explicitly included.



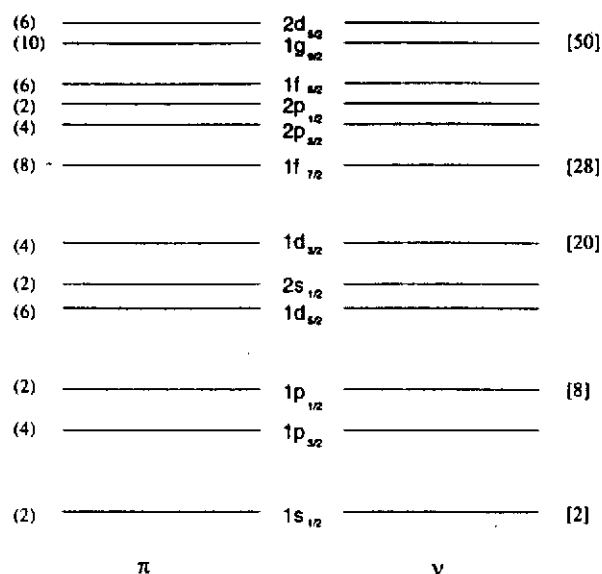


Figure 1: The spherical mean field close to the stability for  $A \leq 100$

It is evident that doubly magic nuclei and their neighbours play a central role in this description. At the same time, in these valence spaces, they are represented by a single Slater determinant and if we were aiming to a description of their excited states, another valence space containing orbits from two major shells had to be chosen. As an example, the first and second excited states of  $^{16}\text{O}$  a  $3^-$  (octupole vibration) and a  $0^+$  (head of a deformed rotational band) at around 6 MeV excitation energy can be described in the valence space  $[1p_{1/2}, 1d_{5/2}, 2s_{1/2}]$  [6]. When the valence space allows for excitations into different major oscillator shells, one has to pay attention to the appearance of spurious states of the center of mass, kind of very disturbing guests that may destroy the calculation if not under full control.

Far from stability or for heavy nuclei, the proton and neutron valence spaces may have no common orbits. For instance for the very neutron rich ( $N > 20$ ) Al, Si, P, S, Cl, and Ar isotopes, a reasonable valence space is the sd-shell for the protons and the pf-shell for the neutrons.

The rapid increase in the size of the basis limits the number of orbits that can be active. Notice that for a number of valence particles  $n_v$ ,  $z_v$  the number of different Slater determinants that can be built in a given valence space goes as the product of the combinatorial numbers made with the degeneracy of the space and the number of active particles. This gives

$$\binom{6}{n_v} \cdot \binom{6}{z_v}; \quad \binom{12}{n_v} \cdot \binom{12}{z_v}; \quad \binom{20}{n_v} \cdot \binom{20}{z_v}$$

for the p, sd and pf shells respectively. Therefore there will always be properties excluded

from the description, as for instance negative parity states in an *sd*-shell calculation. Giant resonances would demand at least two contiguous major shells in the valence space which is not usually the case. Only spin-like giant resonances –magnetic dipole and Gamow-Teller– are naturally contained in  $0\hbar\omega$  valence spaces. Clustering phenomena can be tagged in simple shell model calculations but again the full spatial correlation will demand huge valence spaces.

**An example.** We want to study the low energy spectrum of  $^{12}\text{C}$ . We limit ourselves to positive parity states. The natural valence space is therefore the *p*-shell and we have an “alpha particle” core. The number of active particles is four protons and four neutrons. The two orbits of the *p*-shell are  $1p_{3/2}$  and  $1p_{1/2}$ . The interaction is defined by the single particle energies of these two orbits in  $A=5$ , that we can extract from experiment, and 15 two body matrix elements  $\langle ij(JT)|V_{eff}|kl(JT) \rangle$ , where *ijkl* may be any of the two orbits above. For instance if  $i = j = k = l = 1p_{3/2}$ , *JT* can take the values 01,10,21 and 30.

Let's focuss now in the  $0^+ T=0$  states of  $^{12}\text{C}$  (these are the experimental quantum numbers of the ground state, but the same procedure holds for any other values of the total angular momentum and isospin). We can build such a state in five different ways corresponding to different particle distributions among the shells and different intermediate angular momentum and isospin couplings.

- 1.-  $(1p_{3/2})^8 (J=0, T=0) (1p_{1/2})^0 (J=0, T=0)$
- 2.-  $(1p_{3/2})^6 (J=0, T=1) (1p_{1/2})^2 (J=0, T=1)$
- 3.-  $(1p_{3/2})^6 (J=1, T=0) (1p_{1/2})^2 (J=1, T=0)$
- 4.-  $(1p_{3/2})^5 (J=1/2, T=1/2) (1p_{1/2})^3 (J=1/2, T=1/2)$
- 5.-  $(1p_{3/2})^4 (J=0, T=0) (1p_{1/2})^4 (J=0, T=0)$

After that we compute the matrix of the Hamiltonian in this basis (better if you have a code to do all the angular momentum algebra cfp's etc), diagonalize and obtain eigenvalues and eigenvectors. Once this done for all the *JT* pairs you can draw the theoretical level scheme. With the wave functions you can compute the diagonal matrix elements of one body operators that give magnetic moments and quadrupole moments or the off diagonals whose squares represent the electromagnetic (or weak) reduced transition probabilities. Occupation numbers, spectroscopic factors and many other observables can also be obtained.

We have said nothing yet about the precise effective interaction to be used in the calculation. One way to proceed, that has been frequently used, is to determine empirically the two body matrix elements from a fit to selected energy levels (and in some, rare, cases also to transitions). For the *p*-shell this was done by Cohen and Kurath [7] while for the *sd*-shell there are different fits by Wildenthal [8]. Another is to try to keep as close as possible to realistic *G*-matrices. However, in this approach the empirical evidence is that some averages of matrix elements, actually those that associated to extensive operators as particle number or isospin are not well predicted in any *G*-matrix and have to be phenomenologically corrected. This kind of approach is discussed in detail in [9] and will be the subject of the next section.

### 3. REALISTIC EFFECTIVE INTERACTIONS

In this section we shall follow closely the work of M. Dufour and A. Zuker [10]. Their starting point is the so called separation theorem that states:

*The effective interaction can be split in two parts:  $H = H_m(\text{monopole}) + H_M(\text{multipole})$  where  $H_m$  contains all the terms that are affected by spherical Hartree-Fock variation and that, by this fact, are responsible for global saturation properties and spherical single particle behaviour.*

It has been shown in [10] that the monopole hamiltonian can be written as:

$$H_m = H_{sp} + \sum \left[ \frac{1}{(1 + \delta_{rs})} a_{rs} n_r (n_s - \delta_{rs}) + \frac{1}{2} b_{rs} \left( T_r \cdot T_s - \frac{3n_r}{4} \delta_{rs} \right) \right].$$

$H_{sp}$  is the single particle term generated by the core orbits, the  $a$  and  $b$  coefficients are defined in terms of the centroids

$$V_{rs}^T = \frac{\sum_J V_{rsrs}^{JT}[J]}{\sum_J [J]}$$

as:  $a_{rs} = \frac{1}{4}(3V_{rs}^1 + V_{rs}^0)$ ,  $b_{rs} = V_{rs}^1 - V_{rs}^0$ , and the sums run over Pauli allowed values.

This Hamiltonian gives the full energy when applied to closed shells and closed shells plus or minus a particle. In other words it determines the evolution of the single particle fields inside the model space. As commented before it is at this point that the defaults of the realistic G-matrices –probably related to their bad saturation properties– show up. Lets develop an example in the  $pf$ -shell. Starting with the experimental single particle energies of  $^{41}\text{Ca}$  and the G-matrix obtained by Kuo and Brown [11] it is possible to obtain the quasiparticle gap around  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{56}\text{Ni}$  in terms of the single particle energies and the centroids defined above, using the expressions:

$$\Delta(^{48}\text{Ca}) = -2B_e(^{48}\text{Ca}) + B_e(^{49}\text{Ca}) + B_e(^{47}\text{Ca}) = \varepsilon_p - \varepsilon_f + 8V_{fp}^1 - 7V_{ff}^1.$$

$$\Delta(^{56}\text{Ni}) = -2B_e(^{56}\text{Ni}) + B_e(^{57}\text{Ni}) + B_e(^{55}\text{Ni}) = \varepsilon_p - \varepsilon_f + 16a_{fp} - 15a_{ff} + \frac{3}{4}b_{ff}.$$

The results for the KB interaction are:

$$\Delta(^{48}\text{Ca}) = 2.06 \text{ MeV} \text{ and } \Delta(^{56}\text{Ni}) = 3.42 \text{ MeV}$$

while the experimental numbers are:

$$\Delta(^{48}\text{Ca}) = 4.81 \text{ MeV} \text{ and } \Delta(^{56}\text{Ni}) = 6.39 \text{ MeV}$$

similar numbers are obtained for the other G-matrices available. All of them give too much attraction between filled and empty shells reducing dangerously the gaps and driving the calculations to collapse. A very spectacular consequence of this unphysical reduction of the gap is that in a full  $pf$  shell calculation for  $^{56}\text{Ni}$  using KB, the ground state, instead of a closed shell is a 4-particles 4-holes state, with deformation  $\beta = 0.3$ , head of a rotational band.

In order to restore the correct physical picture, the  $T=1$  centroids of the interaction between the  $1f7/2$  orbit and all the others have to be made more repulsive of about 300 keV. Once this done the agreement with the large body of experimental data becomes

excellent. As a conclusion, a necessary condition for good shell model spectroscopy is to have a good spherical mean field. We will see later that if realistic G-matrices are used, it is also sufficient.

The multipole Hamiltonian  $H_M$  is what is left of  $H$  when it has been made monopole free. We expect it to contain pairing plus quadrupole, plus surely other terms. But whose are they? and how many?, can we expect to unveil some hidden simplicity out of the shell model interactions, that usually appear as long strings of numbers?

Lets start writing  $H_M$  in two different ways:

$$H_M = \sum_{r \leq s, t \leq u, \Gamma} W_{rstu}^\Gamma Z_{rs\Gamma}^+ \cdot Z_{tu\Gamma}, \quad \text{or}$$

$$H_M = \sum_{rstu\Gamma} [\gamma]^{1/2} \frac{(1 + \delta_{rs})^{1/2} (1 + \delta_{tu})^{1/2}}{4} \omega_{rtsu}^\gamma (S_{rt}^\gamma S_{su}^\gamma)^0,$$

where  $Z_\Gamma^+$  is the coupled product of two creation operators and  $S^\gamma$  the coupled product of one creation and one annihilation operator (see [10] for their precise definition). The matrix elements are related through,

$$\omega_{rtsu}^\gamma = \sum_\Gamma (-)^{s+t-\gamma-\Gamma} \left\{ \begin{array}{ccc} r & s & \Gamma \\ u & t & \gamma \end{array} \right\} W_{rstu}^\Gamma[\Gamma],$$

$$W_{rstu}^\Gamma = \sum_\gamma (-)^{s+t-\gamma-\Gamma} \left\{ \begin{array}{ccc} r & s & \Gamma \\ u & t & \gamma \end{array} \right\} \omega_{rtsu}^\gamma[\gamma].$$

Replacing pairs by single indeces  $rs \equiv x$ ,  $tu \equiv y$ ,  $rt \equiv a$  and  $su \equiv b$  in the above equations, we bring the matrices  $W_{xy}^\Gamma$  and  $f_{ab}^\gamma = \omega_{ab}^\gamma \sqrt{(1 + \delta_{rs})(1 + \delta_{tu})/4}$ , to diagonal form through unitary transformations  $U_{xk}^\Gamma$ ,  $u_{ak}^\gamma$ :

$$U^{-1} W U = E \implies W_{xy}^\Gamma = \sum_k U_{xk}^\Gamma U_{yk}^\Gamma E_k^\Gamma$$

$$u^{-1} f u = e \implies f_{ab}^\gamma = \sum_k u_{ak}^\gamma u_{bk}^\gamma e_k^\gamma,$$

and then,

$$H_M = \sum_{k,\Gamma} E_k^\Gamma \sum_x U_{xk}^\Gamma Z_{x\Gamma}^+ \cdot \sum_y U_{yk}^\Gamma Z_{y\Gamma},$$

$$H_M = \sum_{k,\gamma} e_k^\gamma \left( \sum_a u_{ak}^\gamma S_a^\gamma \sum_b u_{bk}^\gamma S_b^\gamma \right)^0 [\gamma]^{1/2},$$

which we call the  $E$  and  $e$  representations.

For the diagonalizations the KLS force [12] in two contiguous major shells was used because the matrix elements were easily generated, but no difference with other G-matrices is to be expected. For the  $E$  representation the density of eigenvalues is asymmetric with a long tail to the left, which is what to expect of an attractive force. For the  $e$  representation the result is shown in Fig. 2. When the contributions to  $H_M$  of the five largest peaks (in absolute value) are eliminated, the  $E$  histogram in Fig. 3 becomes symmetric, the residual skewness being associated with the three isolated peaks. French and Mon [13] have shown that a symmetric  $E$  distribution is all that is needed to characterize a

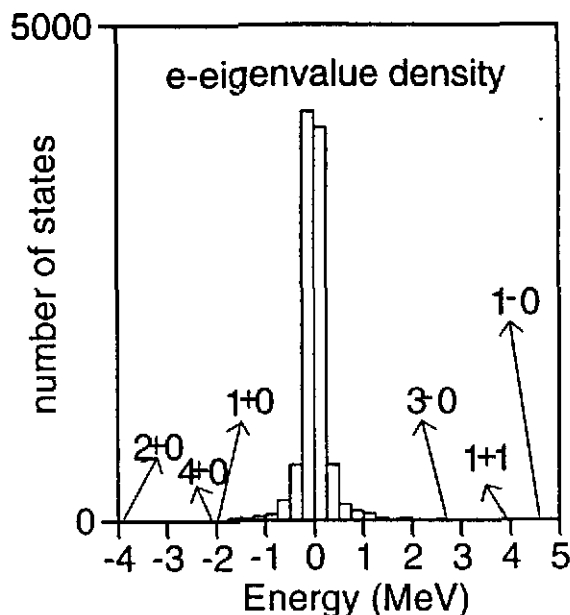


Figure 2:  $e$ -eigenvalue density for the KLS interaction in the pf+sdg major shells. The largest ones are shown by arrows.

random Hamiltonian. Therefore, we conclude that the five peaks extracted from the  $e$  distribution, plus the three big ones left in the  $E$  distribution design the candidates to a realistic collective Hamiltonian.

The rewarding aspect of this decomposition is that, not only the multipole hamiltonian can be reduced to a few terms, besides, these terms are simple ( pairing is  $L=0$  LS pairing, quadrupole is Elliott quadrupole  $\gamma=11$  is  $\sigma\tau \cdot \sigma\tau$  etc ) and universal in a double sense; they are nearly equal for all different effective interactions and their mass dependence is well understood.

#### 4. THE SOLUTION OF THE SECULAR PROBLEM

In large scale shell model calculations the strategy to build and diagonalize the secular matrix is a major issue. First one has to decide in which coupling scheme to work. The simplest one is the so called  $m$ -scheme, whose basis is formed by all the Slater determinants contained in the valence space. It has the advantage of eliminating all Racah algebra, cfps, etc. The inconvenient is that the full dimension of the basis has to be carried on. The other choice is to implement "a priori" the symmetries of the Hamiltonian in the construction of the many particle basis. The full matrix is then divided in blocks and for each ensemble of values of the pertinent quantum numbers the dimensions are smaller. This approach is called "coupled scheme". The drawback is that the computational simplicity of the  $m$ -scheme gets lost. Usually only the exact quantum numbers  $JT$  are explicitly shown, however, approximate symmetries can be implemented, for instance seniority, that can make truncation procedures much more efficient.

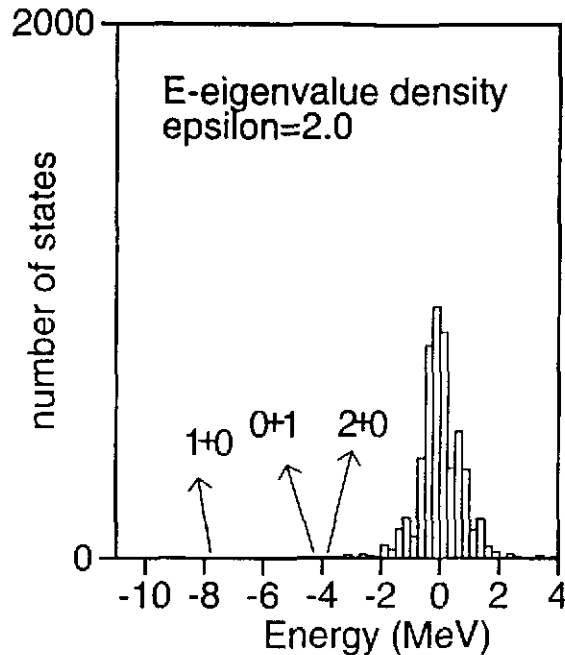


Figure 3:  $E$ -eigenvalue density for the KLS interaction in the pf+sdg major shells  $\hbar\omega = 9$ , after removal of the five largest multipole contributions. The largest ones are shown by arrows.

In order to obtain the relevant eigenvalues and eigenvectors two routes are available, either to build the full matrix and proceed by direct diagonalization or to use other methods as Lanczos' to obtain a part of the spectrum. For very large matrices the direct diagonalization approach is excluded due to computer size limitations, so we will concentrate in the Lanczos method. Let's mention however one of the first modern shell model codes, the Rochester Oak-Rigde MULTISHELL, a coupled, direct diagonalization code, based on the formalism of B. French [14]. Most of the present expertise in m-scheme Lanczos shell model codes has its roots in the Glasgow code made by Whitehead and collaborators [15].

In the Lanczos method the following iteration procedure is used:

- A starting vector ("pivot") is taken in the space. It can be chosen at random, be an approximation to the solution, a doorway etc. The choice of pivot influences the convergence properties of the procedure, but not the final results.
  - Denoting the pivot as  $|0\rangle$  we construct  $|1\rangle = [H - \langle 0|H|0\rangle]|0\rangle$  and normalize it to obtain  $|\bar{1}\rangle$ . This is the second state of the Lanczos basis and we can already build a  $2 \times 2$  matrix whose eigenvalues are approximations to the exact ones.
  - We continue adding vectors to the basis
- $$H|\bar{1}\rangle = H_{01}|0\rangle + H_{11}|\bar{1}\rangle + H_{21}|\bar{2}\rangle$$
- By construction at iteration  $N$  we have a tridiagonal  $N$ -dimensional matrix. The process has variational properties and the convergence for the lowest eigenvalues is very efficient.

Furthermore, the Lanczos method may be used to compute global properties of the spectra, even if approximate, via the calculation of strength distributions. The idea, due to Whitehead [16] is very simple. Suppose the ground state  $|G\rangle$  of a given nucleus has been obtained by the conventional Lanczos method. Let  $\Omega^\lambda$  denote the multipole operator we are interested in. Acting with  $\Omega^\lambda$  on  $|G\rangle$  we obtain the sum rule state (or the doorway). It is not a physical state if  $H$  do not commute with the multipole operator, but its norm is the sum rule or equivalently the total strength of the multipole operator in the ground state of the nucleus. Lets call its normalized version  $|\Lambda\rangle$  and develop it in energy eigenstates as:

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{N} \sum_E S(E) |E\rangle$$

where

$$N^2 = \sum_E S^2(E)$$

and  $S^2(E)$  is the strength function. The equality

$$\langle \Lambda | H^n | \Lambda \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_E S^2(E) E^n$$

shows that, taking  $|\Lambda\rangle$  as the pivot, each Lanczos iteration brings in the expectation value of two new powers of  $H$  on  $|\Lambda\rangle$ , therefore after  $N$  iterations we have  $2N$  moments of the strength function  $S^2(E)$ . Diagonalizing the Lanczos matrix after  $N$  iterations, the overlaps of the eigenvectors with  $|\Lambda\rangle$  give an approximation to  $S^2(E)$  which has the same lowest  $2N$  moments. In other words, one starts with a single peak that contains all the strength located at the centroid. Iteration after iteration it goes on fragmenting until the number of iterations equals the dimension of the basis. However, for a relatively small number of iterations we should have already a very good understanding of the global behaviour of the strength.

In figure 4. we give one example of this method in the case of the Gamow Teller strength function of  $^{48}\text{Ca}$ . We went to 700 iterations (the number of  $1^+ T=3$  states in  $^{48}\text{Sc}$  being 8590) and smoothed the peaks with gaussians of the experimental width to compare with the results of  $(p, n)$  experiments. Beyond the agreement and other matters, as the spreading of the experimental strength compared with the calculated one in the high energy region, due to the mixing with configurations outside the space, this is an illustration of the ability of the shell model approach to describe resonances in large valence spaces.

The problem of the size of the shell model spaces has motivated other -approximate- ways of solving the secular problem. The first one is the Shell Model Monte Carlo method, (see ref. [17] for a complete review) that treats the problem statistically introducing a partition function  $e^{\beta H}$  where  $\beta$  is the inverse of the temperature. The problem involving two body propagation is amenable to a superposition of one body propagations by using the Hubbard-Stratonovich transformation. The multidimensional integrals are then evaluated by Monte Carlo sampling. The advantage of the method is that, as the problem remains essentially that of one body dynamics, the dimensions of the basis are tractable. However the method demands many different extrapolations; first in temperature ( $T \rightarrow 0$ ), and then in some parameters added to the interaction in order to overcome the sign problem of the realistic interactions. It suffers also of limitations in the treatment of excited

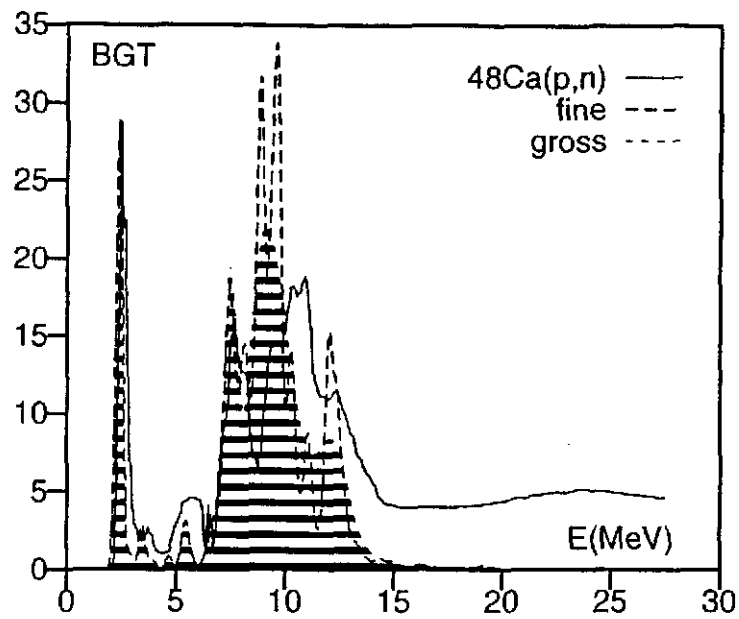


Figure 4:  $^{48}\text{Ca}(p,n)^{48}\text{Sc}$  cross section compared with the calculated Gamow Teller strength function using the Lanczos method

states because the cooling selects naturally the ground state. One final remark is that the method is very well suited to study finite temperature properties with the caveat, common to every shell model approach, that beyond some excitation energy the valence space will run out of states and the description will be unphysical.

Recently the same type of approach using the partition functions and Monte Carlo techniques has been applied in a quite different way in ref [18]. These techniques are used to sample the Hilbert space searching for an optimal, hopefully small, basis in which to diagonalize the full hamiltonian (Quantum Monte Carlo Diagonalization Method). The starting basis vectors are mean field solutions that break the symmetries, therefore projections have to be enforced and the method resembles to the GCM used since long in other contexts.

### Some spectroscopic results in the $pf$ -shell

In the last years it has been possible to tackle the shell model description of nuclei in the  $pf$  shell using the  $m$ -scheme code ANTOINE written by E. Caurier and a realistic effective interaction (KB3) obtained from the Kuo-Brown G-matrix [11] with the necessary monopole corrections [19] in line with what we have already discussed. The results are fully satisfactory and we shall only present here a couple of level schemes and a few tables that give an idea of the quality of the description. For a complete discussion of the  $pf$  shell see refs. [20, 21, 22, 23, 24].

In figures 5 and 6 the theoretical predictions are compared with the experimental results in the odd-odd nucleus  $^{48}\text{V}$  and in the even-odd  $^{49}\text{V}$  in both cases the agreement is excellent for the low spins and also for the high spin states. These are representative of the type of agreement obtained in all the cases studied

In tables 1,2 and 3 we have selected some electromagnetic and weak observables, mag-



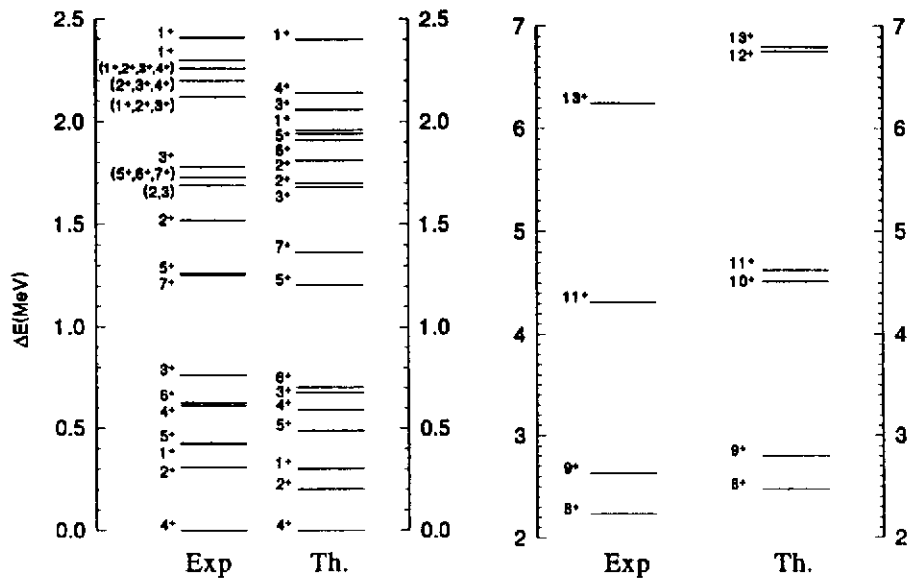
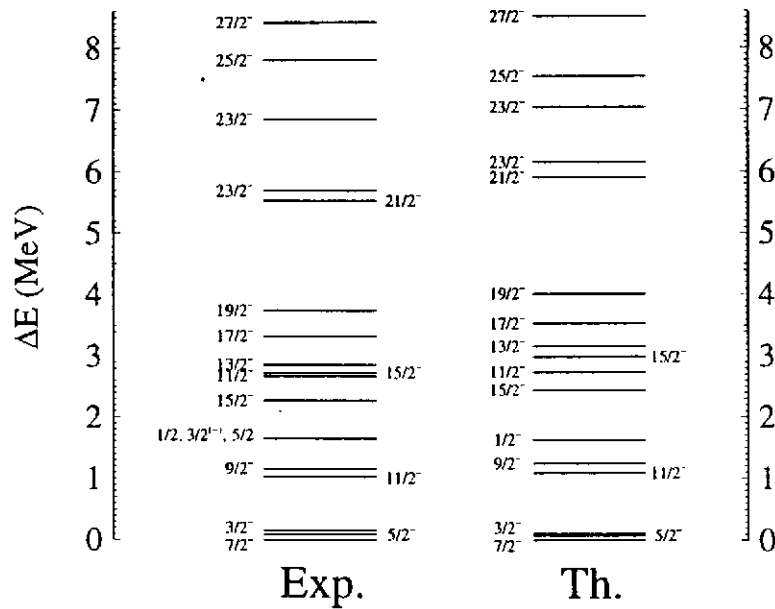
Figure 5: Energy levels of  $^{48}\text{V}$ Figure 6: Energy levels of  $^{49}\text{V}$

Table 1: Dipole magnetic moments and quadrupole electric moments of the  $A = 49$  isobars.

Nucleus	State	$\mu$ ( $\mu_N$ )		$Q$ ( $e \text{ fm}^2$ )	
		Expt.	Theor.	Expt.	Theor.
$^{49}\text{Ca}$	$3/2^-$ (g.s.)	-1.38(6)	-1.46		-3.95
$^{49}\text{Sc}$	$7/2^-$ (g.s.)		5.38		-19.3
$^{49}\text{Ti}$	$7/2^-$ (g.s.)	-1.10417(1)	-1.12	24(1)	22
$^{49}\text{V}$	$7/2^-$ (g.s.)	$\pm 4.47(5)$	4.37		-11.1
	$3/2^-$ (0.153)	2.37(12)	2.25		18.87
$^{49}\text{Cr}$	$5/2^-$ (g.s.)	$\pm 0.476(3)$	-0.50		36.1
	$19/2^-$ (4.365)	7.4(12)	6.28		-3.43
$^{49}\text{Mn}$	$5/2^-$ (g.s.)		-3.24		36.4

Table 2: Experimental *vs* theoretical half-lives in the isobaric multiplets  $A=47$  and  $A=49$ .

Nucleus	Half-Life		Fermi (%)	
	Expt.	Theor.	Expt.	Theor.
$^{47}\text{Ca}$	4.336(3) d	4.20 d		
$^{47}\text{Sc}$	3.3492(6) d	3.79 d		
$^{47}\text{V}$	36.6(3) m	20.7 m		
$^{47}\text{Cr}$	500(15) ms	480 ms	78.7	76.1
$^{47}\text{Mn}$		65.2 ms		54.1
$^{47}\text{Fe}$		18.7 ms		26
$^{49}\text{Ca}$	8.718(6) m	3.17 m		
$^{49}\text{Sc}$	57.2(2) m	41.4 m		
$^{49}\text{V}$	330(15) d	1088 d		
$^{49}\text{Cr}$	42.3(1) m	38.2 m		
$^{49}\text{Mn}$	382(7) ms	398 ms	72	75
$^{49}\text{Fe}$	75(10)	55 ms	61	42

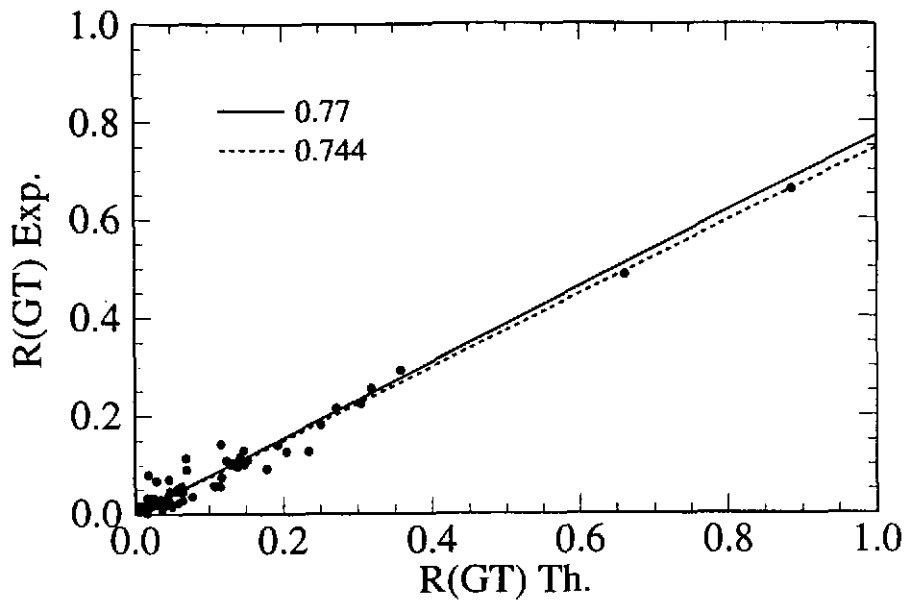


Figure 7: Individual Gamow-Teller reduced transition probabilities in the  $pf$ -shell, experiment *vs.* theory

netic and quadrupole moments and half-lives. In all cases the agreement with experiment is very good and we can safely make predictions for other cases in which there are no experimental measures.

Finally in figure 7 we have collected the Gamow-Teller matrix elements of many individual  $\beta$  decays for  $A=41$  to 52. Comparing with experiment an effective value for the weak axial constant  $g_A(\text{eff})=0.74 g_A(\text{bare})$  is found. This result is consistent with the value extracted from similar comparisons in the  $p$  and  $sd$  shells and point to an asymptotic value of the renormalization of 0.7.

## 5. SPHERICAL SHELL MODEL AND DEFORMATION

We have seen how successful can be the shell model description of nuclei, provided a good valence space and a good effective interaction are used. We are therefore in solid grounds to address the topic of the collective behaviour in nuclei. We shall proceed to examine the following key questions:

- Can we describe rotational motion within the spherical shell model, beyond the *sd*-cases to which Elliott's SU3 is applicable?
- Which are the minimal valence spaces that contain the relevant degrees of freedom?
- Is there anything like an intrinsic state in the shell model wavefunctions?
- How compares the (spherical) shell model description with the (deformed) mean field ones?

Some of these questions may sound rhetorical –and indeed they are!– but nonetheless their proper answers do not belong yet to the nuclear physics “common knowledge”.

The *pf*-shell mass region could a very good place to study these aspects because full  $0\hbar\omega$  calculations are still feasible and the mass and the number of active particles in the valence space make the link with heavy deformed nuclei much easier than in the very light cases. That, provided deformation shows up. But this is actually the case, as it is seen in figure 8 where the experimental level scheme of  $^{48}\text{Cr}$  [25] is compared with the shell model calculation [26]. Notice the rotor-like spectrum up to  $J=10$  and the backbending at  $J=12$ , reminiscent of the behaviour of heavier rotors. The E2 transition probabilities are fully collective and follow the Bohr-Mottelson prescription for a rotor in the strong coupling limit with a deformation  $\beta=0.3$  (see table 3 for the experimental data [27]). Therefore, considering the nearly perfect agreement between experiment and theory in fig. 8 and in table 3, we can claim that  $^{48}\text{Cr}$  is good candidate for a rotor amenable to a spherical shell model description. We want to be a bit more precise in our definition of a rotor and for that we shall rely in three indicators; i) the yrast band follows approximately a  $J(J+1)$  law, ii) the intrinsic quadrupole moment extracted from the  $B(E2)$  transition probabilities is constant for the different yrast states, ii) the intrinsic quadrupole moment extracted from the spectroscopic quadrupole moment is also constant for the yrast states and equal to the one extracted from the  $B(E2)$ . The connexion between intrinsic and laboratory frame is made by the formulae [28]:

$$Q_0 = \frac{(J+1)(2J+3)}{3K^2 - J(J+1)} Q_{spec}(J), \quad \text{for } K \neq 1$$

$$B(E2, J \rightarrow J-2) = \frac{5}{16\pi} e^2 |\langle JK20 | J-2, K \rangle|^2 Q_0^2.$$

(for  $K \neq \frac{1}{2}, 1$ )

For even-even nuclei this is about as far as we can go in deciding whether we are faced with a good rotor or not. When a particle is added or removed, the collective model description of its coupling to the rotor leads to some very precise predictions that make the comparison with microscopic calculations more stringent in particular in what

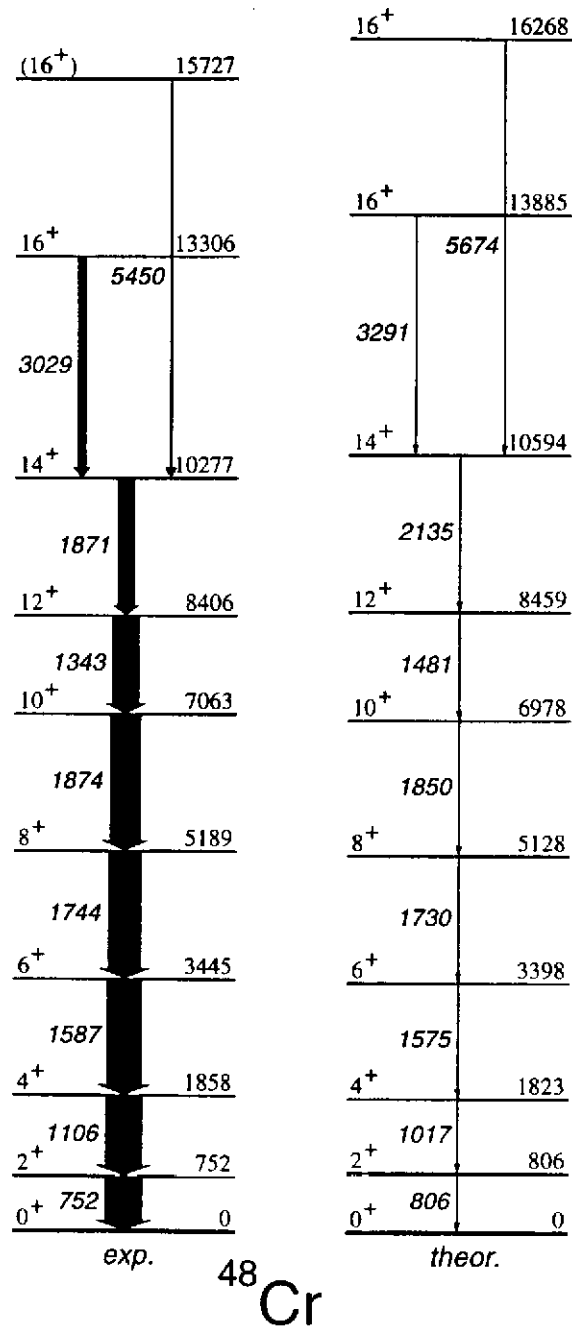


Figure 8:  $^{48}\text{Cr}$  level scheme, experiment *vs.* theory

Table 3: Quadrupole properties of the yrast band of  $^{48}\text{Cr}$ .  $B(E2)$  in  $e^2 \text{ fm}^4$ ,  $Q$  in  $e \text{ fm}^2$ . The  $Q_0$  values are extracted from the  $BE2$ 's or the  $Q_{spec}$  as indicated

J	$B(E2)_{exp}$	$B(E2)_{th}$	$Q_0(B(E2))$	$Q_0(Q_{spec})$	$Q_0[1f7/2, 2p3/2]$
2	321(41)	228	107	103	104
4	330(100)	312	105	108	104
6	300(80)	311	100	99	103
8	220(60)	285	93	93	102
10	185(40)	201	77	52	98
12	170(25)	146	65	12	80
14	100(16)	115	55	13	50
16	37(6)	60	40	15	40

concerns magnetic properties. This analysis has been carried out in ref. [21] and we will not discuss it here.

Table 3 contains the information we were after, as given by the calculations (we use effective charges 1.5 for protons and 0.5 for neutrons). We have listed the  $B(E2)$  values, and the intrinsic quadrupole moments extracted from those,  $Q_0(B(E2))$ , or from the spectroscopic quadrupole moments,  $Q_0(Q_{spec})$ . The requirements stated above are fulfilled up to the backbending, therefore we can conclude that  $^{48}\text{Cr}$  is a good rotor up to  $J=10$  where the backbending takes place. The intrinsic quadrupole moment that we obtain corresponds to a deformation  $\beta=0.3$  as we had anticipated. Notice that all the quadrupole properties of the full  $pf$ -shell calculation are reproduced (and even enhanced) if we reduce the valence space to the lowest two orbits,  $1f7/2$  and  $2p3/2$  ( $fp$  space). These results are shown in the last column of the table and give us the first hint on the minimal valence spaces that can accommodate deformed nuclei. The yrast band in the reduced space follows also the  $J(J+1)$  law although with a moment of inertia much larger than the experimental one.

Once the existence of a well behaved rotor is established, we can move around and ask ourselves what will happen if particles or holes are added to it. It has been shown in [21] that the mirror pairs  $^{47}\text{V}$ - $^{47}\text{Cr}$  and  $^{49}\text{Cr}$ - $^{49}\text{Mn}$  closely follow the semiclassical picture of a particle/hole strongly coupled to a rotor. When more particles or holes are added the collective behaviour starts disappearing, nevertheless even for  $^{52}\text{Fe}$  (the largest detailed spectroscopic calculation ever made) a rotor like band appears at low spin and an yrast trap at  $J=12^+$ , both are accounted for in the shell model calculation [29]. Another example is  $^{50}\text{Cr}$  that was predicted to be a double backbender in [30], prediction confirmed in a recent experiment [31] (see figure 9).

We have also the opportunity to compare the spherical shell model results with the deformed mean field ones, more precisely with the Cranked Hartree Fock Bogolyuvov calculations using the Gogny force [26]. The results for the yrast band are presented in figure 10. At first glance one could conclude that the CHF model is doing a rather poor job in view of the discrepancies. However a closer look tell us that in fact all the experimental trends are there except for a too large moment of inertia. Due to that the CHF  $E_\gamma$ 's are systematically smaller than the experimental ones. But, from our discussion of the results in the reduced  $fp$  space, we are aware of the fact that the quadrupole properties may be right and the moment of inertia wrong. We know also that

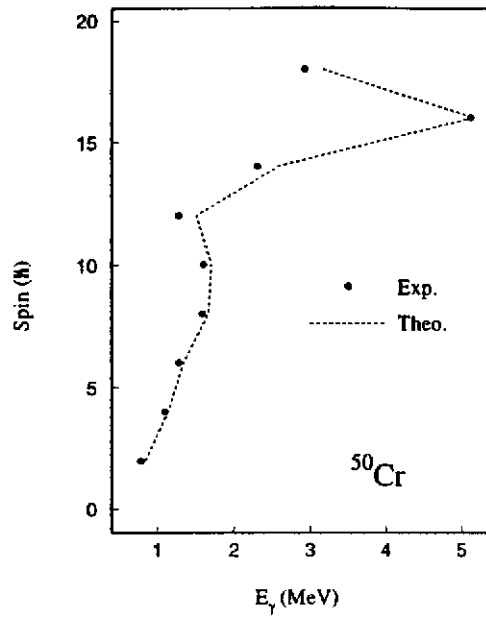


Figure 9: Backbending plot ( $J$  vs  $E_\gamma$ ) of the yrast band of  $^{50}\text{Cr}$

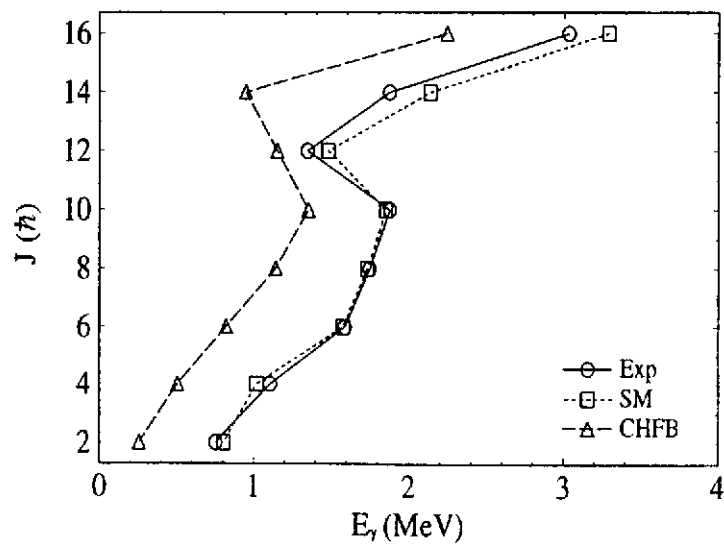


Figure 10: Backbending plot of the yrast band of  $^{48}\text{Cr}$ . Shell Model (SM), Mean Field (CHFB) and experiment

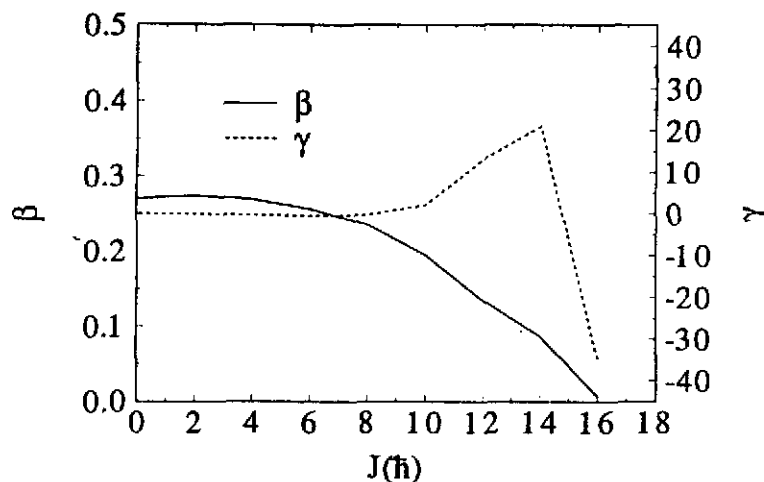


Figure 11: Deformation parameters  $\beta$  and  $\gamma$  as a function of  $J$  in the CHFb calculation

the decoupling of the quadrupole moment and the moment of inertia is a characteristic feature of the SU3 model of Elliott. So we go on with the comparison and in figure 11 we show the CHFb results for the intrinsic deformation parameters  $\beta$  and  $\gamma$ . We see that up to the backbending the nucleus is axially deformed with a deformation close to 0.3 that decreases slowly with  $J$  (0.2 at  $J=10$ ) in full agreement with the shell model results. Beyond the backbending the deformation continues to decrease and there are some excursions into triaxiality that are difficult to recast in collective terms. A very nice feature of the CHFb calculation is that it makes it possible to separate the contributions to the quadrupole moment coming from the core and from the valence orbits. The result, independent of  $J$ , is that both blocks contribute evenly, which is consistent with the effective charges we use in the shell model calculation.

In figure 12 we compare the fractional occupancies of the valence orbits in the two approaches. The similarities are striking and confirm the closeness of the wave functions obtained in the different descriptions. We learn from the figure that in the zone of the yrast band where the rigid rotor picture holds, the occupancy of the  $2p_{3/2}$  orbit is large and constant. At the backbending, the decrease in deformation is correlated with its decrease in occupation. Here again we have an indication of the role of the  $fp$  orbits in the onset and offset of deformation. Actually, at high spin the configurations with  $p$  particles are geometrically hindered and the quadrupole correlations cannot develop. Another subtle difference is that the occupancy of the  $1f_{5/2}$  orbit in the SM results is larger than in the CHFb ones, indicating a stronger pairing mixing.

Pairing *vs* quadrupole has been one of the classical themes in nuclear physics for ages. The advent of high spin physics and improved spectroscopic data in heavy  $N \approx Z$  nuclei has brought up again an old question; how does pairing evolve with angular momentum? and then a new one; which is the role of proton neutron pairing close to  $N=Z$ ? We shall examine these issues in what follows. To start with we select as our pairing  $T=0$  and  $T=1$  hamiltonians those extracted in ref. [10] from the realistic  $G$ -matrices (in this



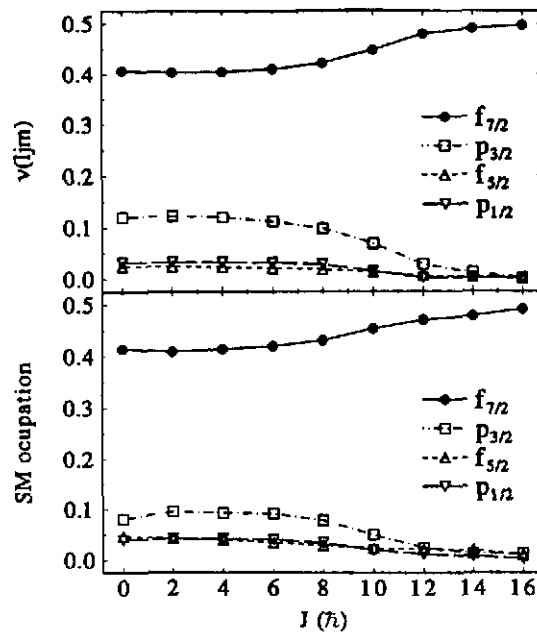


Figure 12: Fractional occupancies of the valence orbits in CHFB (upper panel) and SM (lower panel)

reference the analytical expressions –eq. 2.6– and the numeric values of the two body matrix elements –table I– can be found). We keep their notation and call  $P^{01}$  and  $P^{10}$  the isovector and isoscalar  $L=0$  pairing hamiltonians. In order to evaluate the effect of pairing, we subtract each pairing hamiltonian from KB3, make the calculations again and compare the results with the original ones.

The first, apparently unexpected, result is that for the states below the backbending – i.e. for those that can be viewed as proceeding of the same intrinsic, well deformed state– the wave functions with or without pairing have the same structure. To be more precise, their  $B(E2)$ 's and quadrupole moments are equal within a few percent and their overlaps are always better than 95%. This means that pairing does not affect the quadrupole properties that have somehow reached saturation in the deformed regime. This strongly suggest that:

- The differences between the CHFB and the SM results must be due to the deficiencies in the treatment of pairing in the mean field description.
- A calculation in the minimal valence space  $fp$  that reproduce the quadrupole properties can recover the correct moment of inertia including pairing in first order perturbation theory.

Having a look at figure 13, we realize that although the  $T=1$  contribution almost doubles the  $T=0$  one at  $J=0$ , it decreases more rapidly with increasing  $J$ , and already at  $J=6$  they become comparable. At  $J=8$  both reach a plateau and drop abruptly to zero at the band termination. Consequently  $T=0$  pairing has to be properly taken into account when approaching  $N=Z$ . The same for the neutron proton part of  $T=1$  pairing that amounts to one fourth of the total. To include them is not a very difficult task in the deformed regime, because, as we have just shown, perturbation theory will hold.

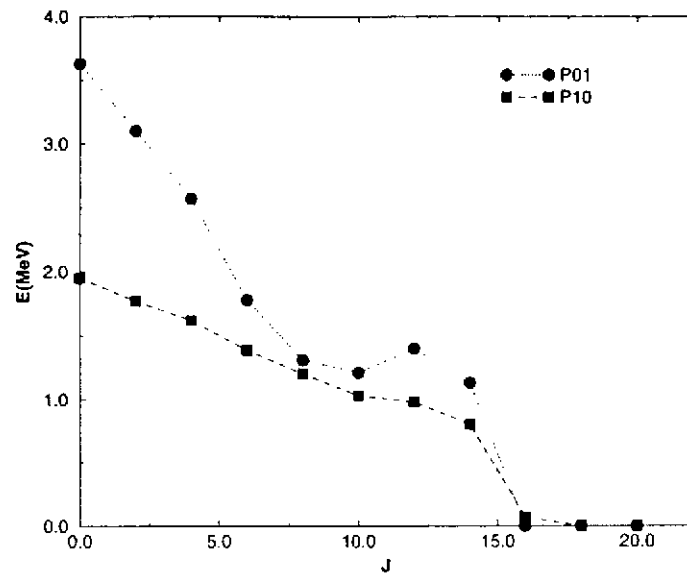


Figure 13: Isovector and isoscalar pairing contributions to the energy of the yrast states of  $^{48}\text{Cr}$

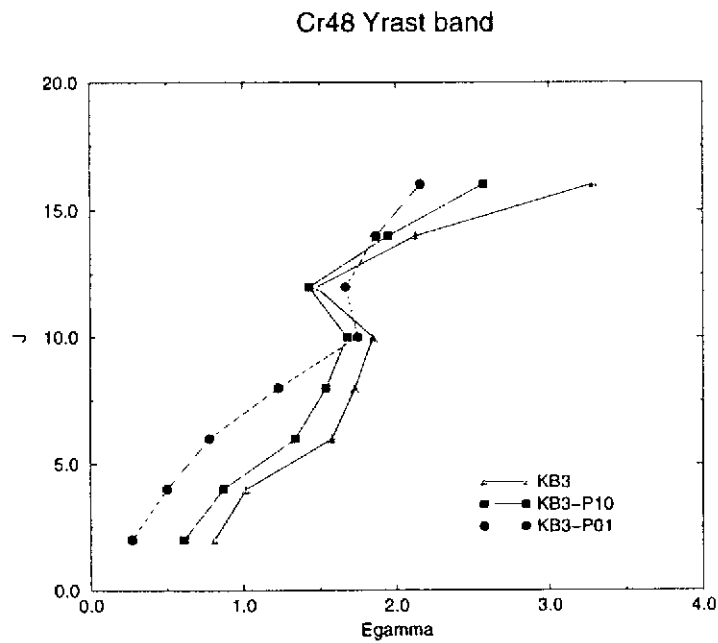


Figure 14: The effect of the isovector and the isoscalar pairing in the  $E_\gamma$ 's along the yrast line in  $^{48}\text{Cr}$

We can now move to fig 14 where we compare the KB3 results with the results without  $T=0$  and without  $T=1$  pairing, in a backbending plot. Remember that the KB3 results and the experimental data are nearly indistinguishable. The effect of  $T=0$  pairing is to make a parallel displacement of the KB3 line; the backbending stays at the same  $J$ , whereas the static moment of inertia is increased from the KB3 value  $7.5 \text{ MeV}^{-1}$  to  $10 \text{ MeV}^{-1}$ . Although the distortion of the  $E_\gamma$  plot above the backbending is stronger if we take out the  $T=1$  pairing, the same conclusions apply; backbending  $J$  unchanged, parallel displacement and increase of the moment of inertia to  $20 \text{ MeV}^{-1}$ . In view of these figures we can conclude that the difference in moment of inertia between the CHFB and the experiment is mostly due to the absence of neutron proton pairing in the Bogolyuvov description.

The indications coming from the study of these deformed nuclei have been used in [32] to investigate the symmetries underlying the development of rotational motion in nuclei. As we mentioned at the beginning, the SU3 model of Elliott gives a laboratory frame description of nuclear deformation that is exact if the spherical mean field is the harmonic oscillator without spin-orbit splitting and the two body interaction has a quadrupole-quadrupole form. In this case SU3 commutes with the hamiltonian and rotational bands appear that can be traced back algebraically to an intrinsic deformed state. Everything we wished!!

Lets consider the quadrupole force alone, taken to act in the  $p$ -th oscillator shell. It will tend to maximize the quadrupole moment, which means filling the lowest orbits obtained by diagonalizing the operator  $Q_0 = 2z^2 - x^2 - y^2$ . Using the cartesian representation,  $Q_0 = 2n_z - n_x - n_y$ , we find eigenvalues  $2p, 2p-3, \dots$ , etc., as shown in the left panel of Fig. 15, where spin has been included. By filling the orbits orderly we obtain the intrinsic states for the lowest SU(3) representations:  $(\lambda, 0)$  if all states are occupied up to a given level and  $(\lambda, \mu)$  otherwise. For instance: putting two neutrons and two protons in the  $K = 1/2$  level leads to the  $(4p, 0)$  representation. For four neutrons and four protons, the filling is not complete and we have the (triaxial)  $(8(p-1), 4)$  representation for which we expect a low lying  $\gamma$  band.

Next consider the influence of the spin-orbit splitting that will separate the subshells into two  $\Delta j = 2$  groups. For even  $p$  we have the sequences  $j = p + 1/2 \dots 1/2$  below and  $j = 3/2 \dots p - 1/2$  above, while for odd  $p$  we have the sequences  $j = p + 1/2 \dots 3/2$  below and  $j = 1/2 \dots p - 1/2$  above. Let us keep only the lowest sequence and diagonalize again the quadrupole operator  $Q_0$ . We can keep only  $\Delta j = 2$  sequences, because the  $\Delta j = 1$  matrix elements are strongly suppressed both for large and small  $m$ , i.e., which lead to the orbits with largest oblate and prolate deformations respectively. The  $\Delta j = 2$  matrix elements are practically identical to those in  $LS$  scheme if we make the identifications

$$l \longrightarrow j = l + 1/2 \quad m \longrightarrow m + 1/2 \times \text{sign}(m).$$

The correspondence is one-to-one and the resulting "quasi SU(3)" quadrupole operator respects SU(3) relationships, *except* for  $m = 0$ , where the correspondence breaks down. Still, it suggests that sequences  $j = 1/2, 5/2, 9/2 \dots$  or  $3/2, 7/2, 11/2 \dots$ , must have a behaviour close to that of the sequences  $l = 0, 2, 4 \dots$  or  $1, 3, 5 \dots$  that span the one particle representations of SU(3). The resulting spectrum for quasi- $Q_0$  is shown in the right panel of fig. 15. The result is not exact for the  $K = 1/2$  orbits but a very good approximation.

The way to use the approximate quasi-SU(3) symmetry is simply to reason with the right panel of fig. 15 as we would do with the left one. Then, both the four and eight particle "representations" for  $T = 0$  will be axial, while the ten particle  $T = 1$  ones

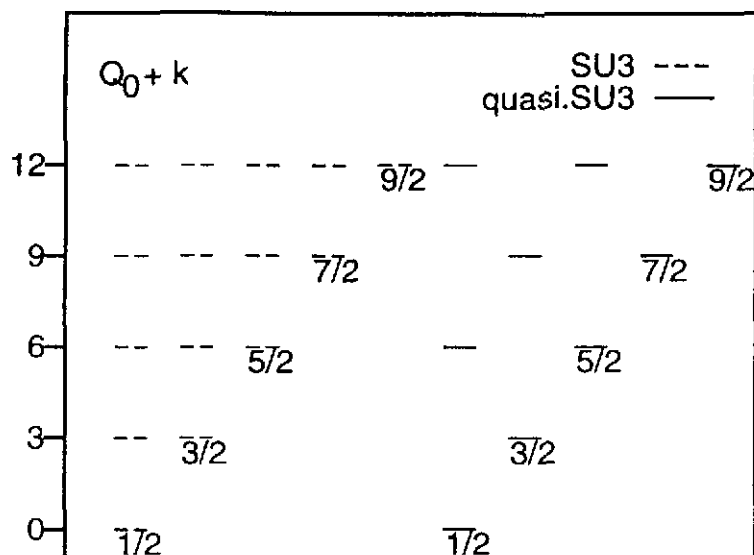


Figure 15: Nilsson orbits for SU(3) ( $k = 2p$ ) and quasi-SU(3) ( $k = 2p - 1/2$ ).

would be triaxial. At this point we note a positive indication in the absence of a  $\gamma$  band in  $^{48}\text{Cr}$  (its counterpart in the  $sd$  shell,  $^{24}\text{Mg}$ , is triaxial). It is then seen that the two lowest  $\Delta j = 2$  sequence of orbits, separated from the rest by the spin-orbit splitting, are sufficient to ensure quadrupole coherence.

In most of the cases, when deformation sets in, these  $\Delta j = 2$  groups are available, for instance,  $(1d5/2, 2s1/2)^4$  gives deformation in  $^{20}\text{Ne}$ ,  $(1d5/2, 2s1/2)^{4\pi} (1f7/2, 2p3/2)^{2\nu}$  is the configuration dominant in the ground state of  $^{32}\text{Mg}$ ,  $(1f7/2, 2p3/2)^8$  in  $^{48}\text{Cr}$ ,  $(1g9/2, 2d5/2, 3s1/2)^8$  in  $^{80}\text{Zr}$  etc. In the region of  $^{80}\text{Zr}$  and beyond we can put this in correspondence with the Nilsson deformed mean field, that states that when nuclei acquire a stable deformation, two orbits  $K=1/2$  and  $K=3/2$  become occupied and rephrase it in spherical terms saying that rotational motion sets in when four protons and four neutrons are promoted to  $\Delta j = 2$  blocks above the orbits normally filled. The normally filled orbits from which the particles are promoted turn out to form a Pseudo-SU3 sequence which reinforces the collectivity driven by Quasi-SU3. We have applied this extremely simple analytical model to the onset of deformation in the Nd, Sm, Gd and Dy getting  $B(E2)$  values in complete agreement with experiment without any extra parameter [32]. These QSU3-PSU3 combinations may be used to identify the spherical configurations responsible for superdeformation.

## 6. SHELL MODEL AND NUCLEI FAR FROM STABILITY

We have explained in detail that the two basic ingredients of the shell model description of nuclear dynamics are the effective interaction and the valence space. Furthermore, we have been able to get a better handle in the effective interaction by splitting it in the monopole and the multipole part. Which are the novelties to be expected when we try to describe nuclei far from stability? Let's avoid for the moment the very edge of the nuclear stability at the neutron rich side, the neutron drip line. For the other cases we use the same tools that we have developed close to the stability; first we determine the spherical mean field, that gives us the necessary hints on the choice of the valence space and then we plug in the realistic multipole hamiltonian and solve the secular problem. From the earlier discussion it must be clear that it is the first requirement which is problematic. Because as we have mentioned repeatedly, the monopole part of the realistic interactions is unreliable already at the stability. What make things worse in that the crucial data that are needed in order to fix the evolution of the spherical mean field are not yet available far from stability. This is the new challenge, to learn how the monopole hamiltonian evolves when the isospin has values that are much larger or much smaller than the values defining the line of  $\beta$ -stability. In order to reach this goal theory and experiment are bound to advance together.

There are already evidences of abnormal behaviour in the very neutron rich or very proton rich regimes that we can gather with the headline "vanishing of shell closures far from stability". It is however true that the cases presently known correspond only to semimagic nuclei. Let's start with the heavier example  $^{80}\text{Zr}$ . It is a proton rich  $N=Z=40$  nucleus.  $Z=40$  is a solid shell closure in the doubly magic  $^{90}\text{Zr}$ , however  $^{80}\text{Zr}$  turns out to be an strongly deformed nucleus. For that to happen, the harmonic oscillator shell closure 40 has to be completely broken. Actually, the experimental results can be very well understood if the yrast states of  $^{80}\text{Zr}$  are given by configurations with eight holes in the  $pf$ -shell and eight particles in the  $sdg$ -shell. These configurations build a Pseudo-SU3 block in the hole orbits and a Quasi-SU3 block in the particle orbits that maximize the quadrupole moment and the quadrupole correlation energy. The gain in correlation energy of this 8p-8h configuration relative to the harmonic oscillator closed shell is about 25 MeV, the loss of monopole energy is more difficult to evaluate, however the experiment tells us is that it is less than 25 MeV. The mechanism comes up in all its simplicity; the monopole field locate different configurations at different unperturbed energies and each configurations has its own correlation energy. The balance of both energy contributions determines which configuration will be lower and in particular whether a shell closure will stand or vanish.

Long chains of isotopes from Ne to Ar are presently under experimental investigation. They give us the unique opportunity of exploring the behaviour of several magic closures in one single isotopic chain. We can also attempt to give a common description of the nuclei which show magic features and those in which the magicity disappears. We begin with the sulphur chain in which isotopes are known to be bound with  $N=10$  up to  $N=32$ . In this case we come close to crossing three magic neutron numbers. The natural valence space for the protons is the  $sd$ -shell; for neutron number  $N \leq 20$  the  $sd$ -shell is also the right valence space, whereas beyond, either the  $pf$ -shell alone or both  $sd$  and  $pf$  will be needed. In the calculations of ref [33] we showed that the first choice is good enough, except in a small area around  $^{31}\text{Na}$ . These calculations employed effective interactions for

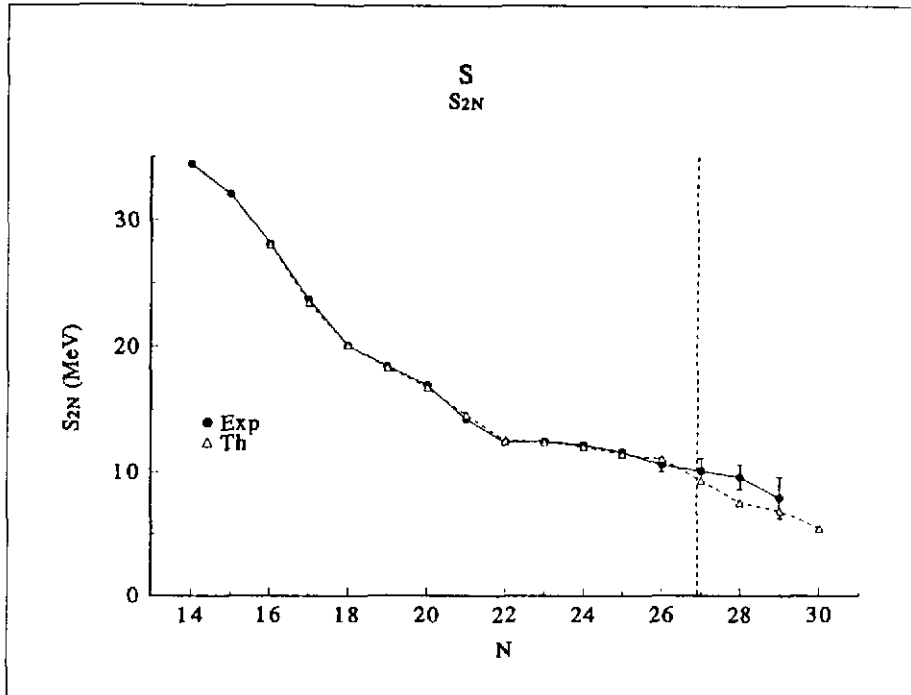


Figure 16:  $S_{2N}$  for the isotopes of sulphur

the two major shells that had been already tested in full  $0\hbar\omega$  spaces, therefore describing in a consistent way isotopic chains that cover two major shells.

We show in figure 16 the comparison of the theoretical two neutron separation energies ( $S_{2N}$ ) with the experimental results. Beyond the vertical line the experimental points are actually the extrapolated values from [34]. We see that the agreement is very satisfactory and do not deteriorates by crossing  $N=20$ , that appears to be a good closure for this isotope. At  $N=28$  the discrepancy with the values from the systematics increases, which can bear a relation with the issue of the vanishing of the  $N=28$  magic closure in the sulphur chain. This point was arisen by the mean field calculations of ref [35] that predicted deformation and shape coexistence in the sulphur isotopes around  $N=28$ . We discussed that in [33], arguing that the situation is better explained considering  $N=28$  as a strongly correlated closed shell, than by the much stronger statement of no shell closure at all. The reasons are the following; the leading neutron configuration in the ground state of  $^{44}\text{S}$  (that amount to 50% of the wave function) is  $(1f7/2)^8$ ; the average occupancy of the  $1f7/2$  orbit is 6.95 compared to the maximum value 8.0; the excitation energy of the  $2^+$  increases relative to  $N=26$  and  $N=30$  (see fig. 17) and the BE2 slightly decreases compared to  $N=26,30$ . Therefore, even if strong correlations are present we do not think the  $N=28$  shell closure has disappeared. Our calculated values agree with the results of recent experiments at MSU [36, 37] and GANIL [38].

The situation for  $Z \geq 13$  can be summarized as follows;  $N=20$  stands as a neat shell closure (see [39] for an experimental reference on  $^{34}\text{Si}$ ); at  $N=28$  the shell closure is eroded by the correlations and collective aspects show up in some cases, but this do not imply the vanishing of  $N=28$  as shell closure.

Things change radically when we move to the neutron rich isotopes of neon, sodium and magnesium with  $N \approx 20$ . It was pointed out many years ago that data on masses and

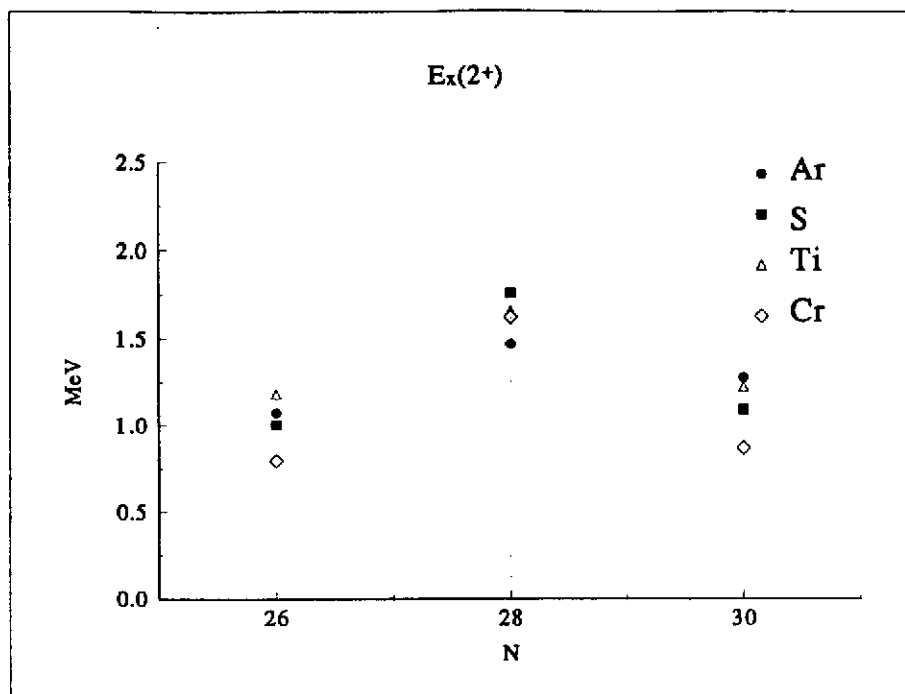


Figure 17: Excitation energy of the  $2^+$  states for several isotopic chains around  $N=28$

ground state spins were incompatible with the persistence of the  $N=20$  closure [40, 41]. Subsequent spectroscopic studies confirmed this hypothesis in particular because of the very low  $2^+$  in  $^{32}\text{Mg}$  [42], the long lifetimes of several isotopes and the very high density of levels at very low energy in  $^{31}\text{Mg}$  [43], in complete contradiction with the calculations that assumed  $N=20$  to be closed [44]. Early theoretical explanations were given using a deformed mean field approach [45]. Later on a shell model interpretation in terms of deformed intruders was proposed [46] that has been confirmed by other shell model calculations [47, 48]. A very recent coulex experiment on  $^{32}\text{Mg}$  [49] has measured a very large  $B(E2) 0^+ \rightarrow 2^+$  corresponding to  $\beta=0.5$ , in agreement with the theoretical predictions.

We have used the same effective interaction of [33] to push the shell model description to its limits, in order to settle the structure of these abnormal nuclei. We shall specialise our examples in the magnesium isotopes although we have results for all the nuclei in the region [50],

In figure 18 we compare the experimental  $S_{2N}$  with the predictions assuming  $N=20$  closed. The agreement with the data is excellent for the Al isotopes, comparable to what we had found for larger  $Z$ 's, but a clear discrepancy occurs at  $N=20$  for the lighter elements. The discrepancy amounts to saying that  $N=20$  is not bound enough. This was related to the breaking of the  $N=20$  magicity.

The physics behind the vanishing of the  $N=20$  shell closure far from stability is related to our discussion of the onset of deformation in section 5 and to our discussion on  $^{80}\text{Zr}$  at the beginning of this section. The closed shell is protected by its gap, i.e. the energy the system loses if particles are promoted above it. But it is also vulnerable, because the configurations reached by opening the closed shell have, in general, a much larger correlation energy. The final result depends solely on the local behaviour of the effec-

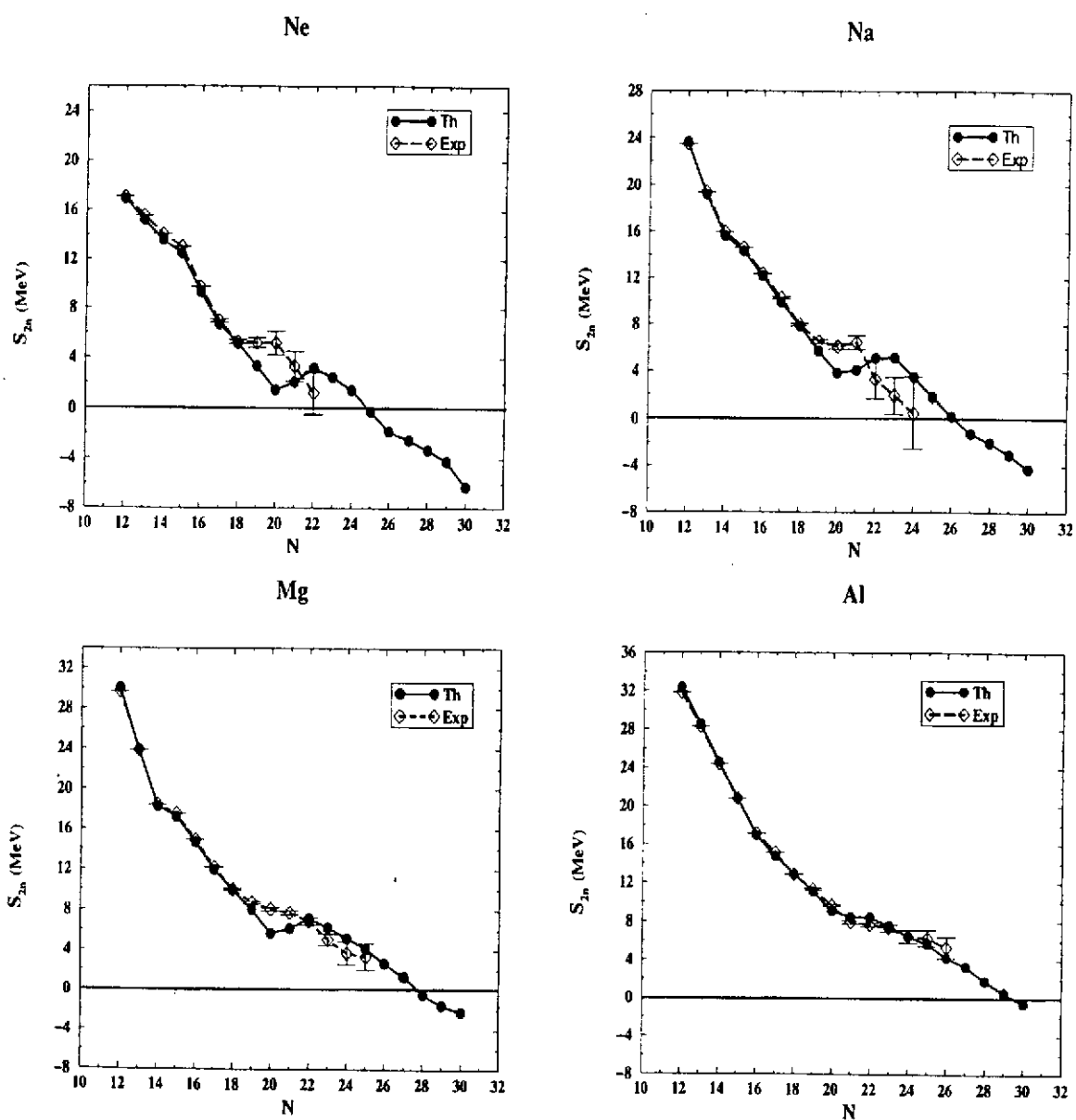


Figure 18: Two neutron separation energies, th. *vs* exp. , Ne, Na, Mg and Al isotopes



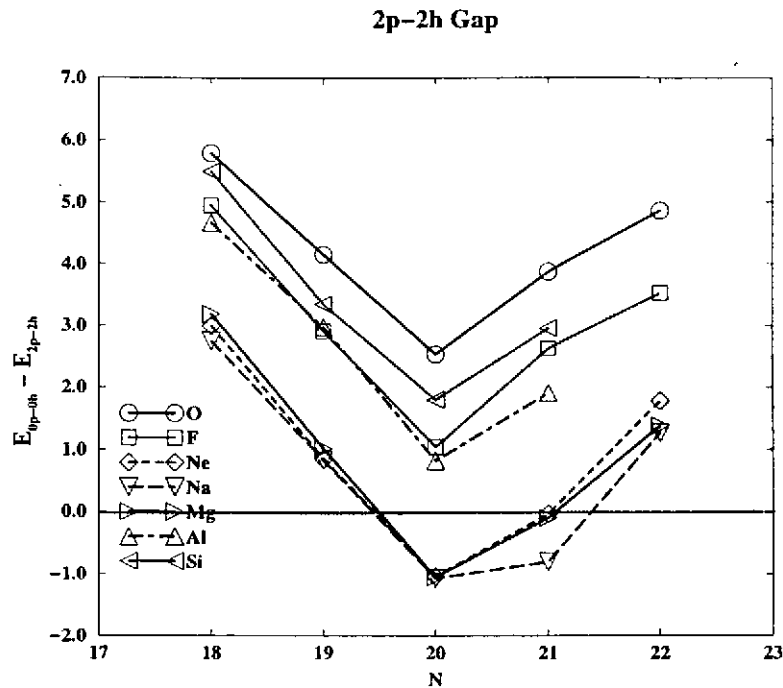


Figure 19: Energy of the 2p-2h intruders relative to the normally filled state

tive spherical mean field, that determines which are the "unperturbed" energies of the configurations that can maximize the correlations induced by the multipole hamiltonian, whose dominant terms, as we have seen in section 3, are pairing and quadrupole. Take  $^{32}\text{Mg}$ ; if we promote two neutrons to the  $pf$ -shell we open two new correlation channels; neutron-neutron pairing and proton-neutron quadrupole. This last one is particularly efficient because the orbits around the fermi level form Quasi-SU3 sequences.

In figure 19 we see the result of adding all these contributions. The intruder configurations are more bound in Ne, Na and Mg at  $N=20$ , for an amount that is roughly what is needed to restore the agreement with experiment in fig. 18. One can wonder, why not proton intruders? the reason is that the proton orbits are strongly bound due to the neutron excess, an extreme that we have verified explicitly. Another aspect is, why 2p-2h intruders and not 4p-4h intruders? Here we come back to the discussion of the balance between monopole and multipole. In short, in our calculation the extra gain of quadrupole energy in the 4p-4h intruder is not sufficient to compensate for the extra loss of monopole energy. It could be argued that this is interaction dependent, but we will show in a moment that the quadrupole properties strongly favour the 2p-2h intruder interpretation. If we mix properly the intruder and the normal configuration, the percentage of closed shell in the ground state is about 20% and we are entitled to speak of a shell closure that vanishes.

Lets focuss now on other known properties of  $^{32}\text{Mg}$ , the excitation energy of the  $2^+$  and the BE2 of the  $0^+ \rightarrow 2^+$  transition. The experimental values are  $\Delta E=0.89$  MeV [42] and  $\text{BE}2\uparrow=450$   $e^2\text{fm}^4$  [49]. The theoretical results with  $N=20$  closed are  $\Delta E=1.71$  MeV and  $\text{BE}2\uparrow=150$   $e^2\text{fm}^4$ . For the intruder state these values are  $\Delta E=1.01$  MeV and

$BE2\uparrow=500 e^2fm^4$ . The agreement is very good and if anything, we overshoot the  $BE2$ . This is normal because the mixing with the closed shell configuration will tend to reduce this number. This brings us to the question we had arisen on the role of 4p-4h intruders in  $^{32}Mg$ . For that we compute the  $BE2\uparrow$  in this configuration and find  $650 e^2fm^4$  which is far bigger than the experimental number. Moreover, the jump in  $BE2$  from the closed shell to the 2p-2h intruder is much larger than the jump from 2p-2h to 4p-4h. As the gain in quadrupole energy is roughly proportional to the  $BE2$  value, the 4p-4h configurations are higher in energy than the 2p-2h ones. Therefore we conclude that the breaking of the  $N=20$  shell closure is mainly the effect of 2p-2h intruders.

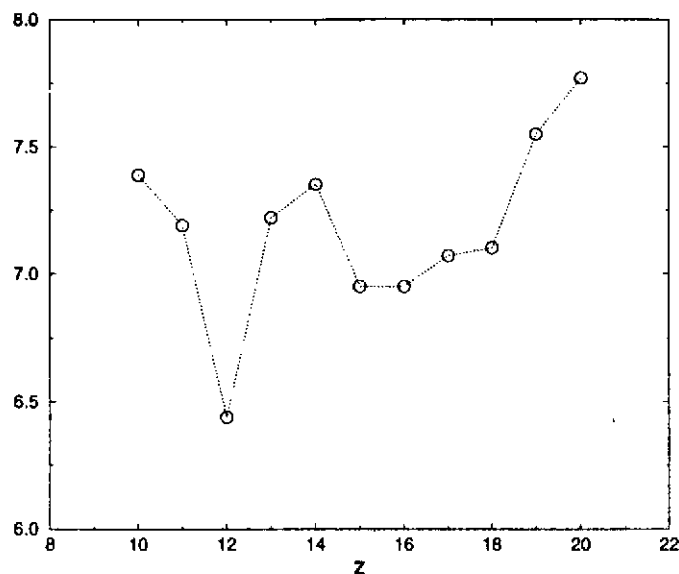
We can now proceed to see whether the intruders play a dominant role when neutrons are added or not. The answer is already seen in figure 19 where the intruders are not favoured energetically beyond  $N=21$ . The reason is that when we have particles in the  $pf$ -shell already in the normal filling, correlation channels that were not active at the closed shell are now open, therefore the relative correlation gain of the intruder is smaller, kind of what happened to the 4p-4h intruder at  $N=20$ . Thus the intruding region is limited to  $Z=10,11,12$  and  $N=19,20,21$ , however we expect that at  $N=22$  the "closed  $N=20$ " predictions will underestimate the collective properties.

We can extend our calculations until the neutron drip line is reached -actually we can overpass it without any problem beyond the conceptual one!-. We predict that  $^{38}Mg$  is definitely bound while  $^{40}Mg$ 's  $S_{2N} \sim 0$ , precludes any conclusion. Notice here that the Relativistic mean field calculations of [53] place the drip line at a much lower value of  $N$ . All  $Mg$  isotopes from  $N=20$  to  $N=28$  are deformed and bear similar quadrupole moments ( $70-60 e^2fm^2$ ) and  $B(E2)\uparrow$  ( $400-500 e^2fm^4$ ). The excitation energy of the first  $2^+$  remains also very constant at around 1 MeV. The mean field calculations of [51] using Skyrme forces give results very close to ours for the deformation and for the location of the drip line. However they cannot explain the onset of deformation at  $N=20$ . This fact can be better understood in the mean field calculations of ref. [52] using the Gogny force. The energy *vs* deformation curves obtained with both forces are very similar. They present a spherical minimum and a shoulder at  $\beta=0.5$ . It is only when the Bohr hamiltonian is solved in the  $(\beta, \gamma)$  plane that a deformed ground state is obtained, and this calculation is only available for the Gogny force [52]. A more detailed comparison between the shell model and mean field results is in progress.

$^{40}Mg$  represents a very special case in our results; it is the only  $N=28$  isotone in which the neutron shell closure is clearly broken. We have plotted in figure 20 the  $1f7/2$  occupancies from  $Z=10$  to  $Z=20$ . The effect of the  $Z=14$  and  $Z=20$  proton subshell closures in reinforcing the  $N=28$  neutron closure is clearly seen. In  $^{40}Mg$  we reach the minimum of the  $1f7/2$  shell occupation, and, what is more important, the closed shell configuration has lost its leading status in the wave function because the configuration with two neutrons in the  $2p3/2$  orbit has an equivalent weight (22% *vs* 28%). We must therefore admit that in our calculation  $N=28$  is not a closed shell at  $Z=12$ .

## 7. CONCLUSIONS

The spherical shell model provides a description of the nuclear dynamics that makes it possible to keep a connexion with the basic initial ingredients of the problem, i.e. nucleons selfbound in vacuum by its mutual -non relativistic, two body- interaction. In the

Occupation of the  $1f_{7/2}$  neutron orbitFigure 20: Occupation of the  $1f_{7/2}$  orbit at  $N=28$ 

route from the bare nucleon-nucleon to the prediction of the level scheme or decay properties of a particular nucleus, we have to pay many tolls; first, the bare interaction has to be regularized, and then, due to saturation problems, its monopole part fitted to the properties of the closed shells and closed shells  $\pm$  one nucleon. However, the separation of the effective interaction in monopole and multipole parts, and the realization that the multipole part of the realistic interactions is correct, paves the way to obtain an universal interaction for the shell model. Secondly, the valence spaces that contain the necessary degrees of freedom for a satisfactory description of the nuclear properties become exceedingly large for medium-heavy nucleus. Nevertheless, complete diagonalizations in the  $pf$ -shell, that have become recently available thanks to the impressive algorithmic advances of E. Caurier's codes, provide a realistic microcosmos in which many of the features of the heavier nuclei show up. In particular, collective deformed nuclei can be perfectly accounted for by the spherical shell model. Furthermore, sound indications on the symmetries or coupling schemes that will underlie the description of heavier nuclei are obtained, in the form of Elliott's  $SU_3$  variants. This approach has also proven to be able to encompass in the same framework the behaviour of nuclei far from stability, in spite of the increase of difficulty due to the lesser control that we have on the effective spherical mean field in very neutron (or proton) rich nuclei.

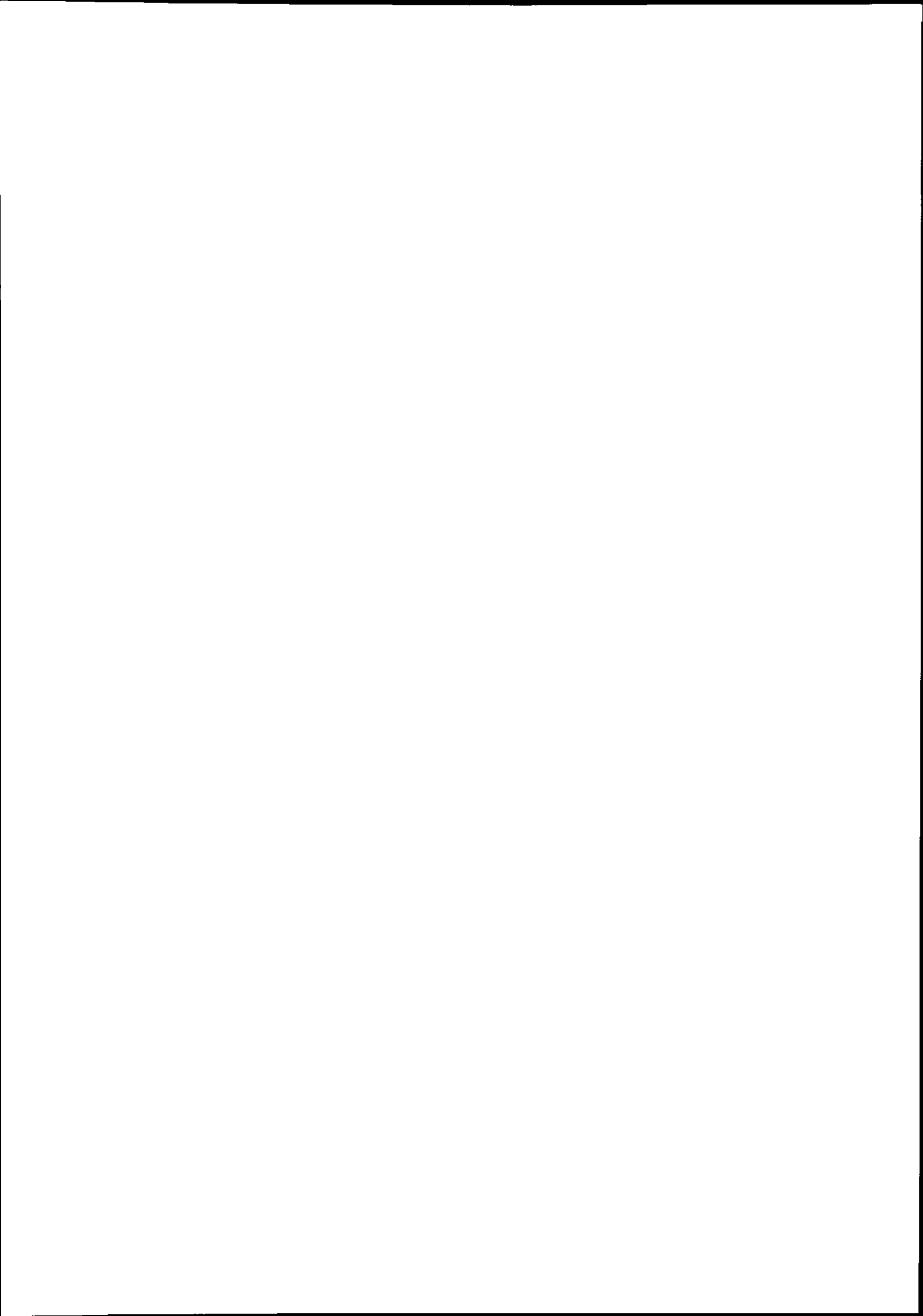
**Acknowledgements** I want to express my gratitude to the organizers of the Joliot-Curie school for their warm hospitality, with an special mention to Prof. Yvon Abgrall. I want to thank E. Caurier, A. Zuker, J. Retamosa, F. Nowacki, G. Martinez-Pinedo, L. M. Robledo, J. L. Egido and S. Lenzi for their collaboration. This work was supported by DGICYT (Spain) grant PB93-263.

## References

- [1] J. P. Elliott, Proc. Royal Soc. London **A245**, 128 and 562 (1958).
- [2] P. J. Brussaard and P. W. M. Glaudemans, "Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy" North Holland 1997.  
K. Heyde, "The Nuclear Shell Model" Springer 1994.  
J.B. French, in *International school of physics Enrico Fermi*, Course XXXVI, C. Bloch ed. (Academic Press, New York, 1966).
- [3] B.A. Brown and B.H. Wildenthal, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **38**, 29 (1988).
- [4] A. P. Zuker in "Contemporary Nuclear Shell Models" Lecture Notes in Physics, vol 482, p. 93. X. W. Pan *et al.* eds. Springer 1997.  
A. P. Zuker, in "Nuclear dynamics at short and long ranges", A. Gattone *et al.* eds. (World Scientific, Singapore) (To be published.)
- [5] V. R. Pandharipande, I. Sick and P. K. A. deWitt Huberts, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 981 (1997).
- [6] A. P. Zuker, B. Buck and J. B. McGrory *Phys. Rev. Lett.* **21**, 39 (1968).
- [7] S. Cohen and D. Kurath, *Nucl. Phys.* **73**, 1 (1965)
- [8] B.H. Wildenthal *Prog. Part. Nucl. Phys.* **11** (1984) 5
- [9] A. Abzouzi, E. Caurier et A. P. Zuker, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1134 (1991).
- [10] M. Dufour et A.P. Zuker, *Phys. Rev. C* **54**, 1641 (1996).
- [11] T. T. S. Kuo and G. E. Brown, *Nucl. Phys.* **A114**, 235 (1968).
- [12] S. Kahana, H.C. Lee and C.K. Scott, *Phys. Rev.* **180**, 956 (1969); *Phys. Rev.* **185**, 1378 (1969).
- [13] K.K. Mon and J.B. French, *Ann. Phys. (NY)* **95**, 90 (1975).
- [14] J. B. French *et al* *Adv. Nucl. Phys.* **3**, 193 (1969)
- [15] R.R. Whitehead *et al* *Adv. Nucl. Phys.* **9**, 123 (1977).
- [16] R.R. Whitehead, in *Moment methods in many fermion systems*, edited by B. J. Dalton *et al.* (Plenum, New York, 1980).
- [17] S. E. Koonin, D. J. Dean and K. Langanke, *Phys. Reports* **278**, 2 (1997).
- [18] M. Honma, T. Mizusaki and T. Otsuka, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3315 (1996)
- [19] A. Poves and A. P. Zuker, *Phys. Rep.* **70**, 235 (1981).
- [20] E. Caurier, A. P. Zuker, A. Poves, and G. Martínez-Pinedo, *Phys. Rev. C* **50**, 225 (1994).

- [21] G. Martínez-Pinedo, A. P. Zuker, A. Poves and E. Caurier, *Phys. Rev. C* **55**, 187 (1997).
- [22] G. Martínez-Pinedo, A. Poves, E. Caurier and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **53**, R2602 (1996).
- [23] E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, A. Poves and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **52**, R1736 (1995).
- [24] E. Caurier, A. Poves and A. P. Zuker, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1517 (1995).
- [25] S. Lenzi *et al.*, *Z. Phys.* **A354**, 117 (1996).
- [26] E. Caurier, J. L. Egido, G. Martínez-Pinedo, A. Poves, J. Retamosa, L. M. Robledo and A. P. Zuker, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2466 (1995).
- [27] F. Brandolini *et al*, *Heavy Ion Physics* **5** (1997).
- [28] A. Bohr and B. Mottelson, *Nuclear Structure* vol I (Benjamin, Reading, 1964).
- [29] C. A. Ur *et al*, submitted to *Phys. Rev. C*
- [30] G. Martínez-Pinedo, A. Poves, L. M. Robledo, E. Caurier, F. Nowacki, and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **54**, R2150 (1996).
- [31] S. Lenzi *et al* *Phys. Rev. C* **56**, 1313 (1997).
- [32] A. Zuker, J. Retamosa, A. Poves and E. Caurier, *Phys. Rev. C* **52**, R1742 (1995).
- [33] J. Retamosa, E. Caurier, F. Nowacki and A. Poves, *Phys. Rev. C* **55**, 1266 (1997).
- [34] G. Audi and A. H. Wapstra, *Nucl. Phys.* **A565**, 1 (1993).
- [35] T. R. Werner, J. A. Sheikh, W. Nazarewicz, M. R. Strayer, A. S. Umar and M. Misu, *Phys. Lett.* **B335** 259 (1994).
- [36] H. Scheit *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3967 (1996).
- [37] T. Glasmacher *et al.*, *Phys. Lett.* **B395** 163 (1997)
- [38] O. Sorlin *et al.*, *Phys. Rev. C* **47** 2941 (1993). O. Sorlin *et al.*, *Nucl. Phys.* **A583** 763 (1995).
- [39] P. Baumann *et al*, *Phys. Lett.* **B228** 458 (1989)
- [40] C. Thibault *et al.* *Phys. Rev. C* **12** 193 (1975).
- [41] C. Detraz, D. Guillemaud, G. Huber, R. Klapisch, M. Langevin, F. Naulin, C. Thibault, L. C. Carraz and F. Touchard, *Phys. Rev. C* **19** 171 (1978).
- [42] D. Guillemaud, C. Detraz, M. Langevin, F. Naulin, M. de Saint-Simon, C. Thibault, F. Touchard and M. Epherre, *Nucl Phys A* **246** 37 (1984).
- [43] G. Klotz *et al*, *Phys. Rev. C* **47**, 2502 (1993).

- [44] B. H. Wildenthal, M. S. Curtion and B. A. Brown, *Phys. Rev.* **C28**, 1343 (1983).
- [45] X. Campi, H. Flocard, A. K. Kerman and S. Koonin, *Nucl. Phys.* **A251** 193 (1975).
- [46] A. Poves and J. Retamosa, *Phys. Lett* **B184** 311 (1987). A. Poves and J. Retamosa, *Nucl. Phys* **A571** 221 (1994).
- [47] E. K. Warburton, J. A. Becker and B. A. Brown, *Phys. Rev.* **C41** 1147 (1990).
- [48] N. Fukunishi, T. Otsuka, and T. Sebe, *Phys. Lett.* **B296**, 1992 279.
- [49] T. Motobayashi *et al*, *Phys. Lett.* **B346**, 9 (1995)
- [50] E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves and J. Retamosa, to be published.
- [51] J. Terasaki, H. Flocard, P. H. Heenen and P. Bonche, *Nucl. Phys.* **A621**, 706 (1997).
- [52] M. Girod and S. Peru, private communication.
- [53] G. A. Lalazissis, D. Vretenar, W. Pöschl an P. Ring, nucl-th/9710013.



## Corrélations d'appariement dans des conditions extrêmes

P.-H. Heenen\*

Service de Physique Nucléaire Théorique,  
U.L.B.-C.P.229, B-1050 Brussels, Belgium

### Abstract

In these lecture notes, we will present the problems related to the treatment of pairing correlations in two different extreme regimes. First, we will discuss how to treat pairing correlations when the energy of the Fermi level is close to 0, as in nuclei close to the drip lines. Bound and continuum states are then connected by pairing. We will show how localized densities are obtained when one uses the Hartree-Fock-Bogoliubov method, while a spurious gas is generated if the BCS approximation is introduced. The second regime concerns weak pairing correlations and in particular the transition between a strong and a weak pairing regime, as along a rotational band. Then, one has to introduce correlations beyond the mean-field approximation, by a restoration of the particle number symmetry. We will discuss the approximate methods that are currently used for this symmetry restoration.

Dans ce cours, nous aborderons le problème du traitement des corrélations d'appariement dans deux régimes extrêmes. Le premier cas concerne les noyaux éloignés de la stabilité. L'énergie du niveau de Fermi étant dans ce cas proche de 0, l'appariement connecte des états liés à des états du continu. Nous montrerons que des densités localisées sont obtenues

---

\*Directeur de Recherches FNRS.



si on utilise l'approximation de Hartree-Fock-Bogoliubov mais que le noyau est entouré d'un gaz spurieux de particules si on introduit l'approximation BCS. Le second régime concerne les corrélations d'appariement faibles, et en particulier la transition entre un régime de pairing fort et faible, comme le long d'une bande rotationnelle. Il est nécessaire dans ce cas d'introduire des corrélations au delà de l'approximation de champ moyen par une restauration de la symétrie nombre de particules. Nous discuterons les méthodes approchées qui sont couramment utilisées aujourd'hui pour effectuer cette restauration de symétrie.

## I. INTRODUCTION

Les évidences expérimentales montrant l'importance des corrélations d'appariement en physique nucléaire sont nombreuses et connues depuis longtemps (tous les livres de base de physique nucléaire ont au moins un chapitre consacré à ce problème: dans le livre de Ring et Schuck [1], on trouvera des références sur de très nombreux points abordés dans ce cours). Les plus importantes concernent probablement les effets pair-impair dans les énergies de liaison des noyaux, indiquant une liaison plus grande pour les noyaux à nombre pair de neutrons et de protons que pour ceux à nombre impair. Ce phénomène s'explique par la brisure d'une paire de nucléons appariés dans les noyaux impairs. Une autre manifestation importante de ces corrélations est reliée au comportement des moments d'inertie de bandes rotationnelles en fonction du spin. A bas spin, ce moment d'inertie est inférieur à celui d'un noyau assimilé à un corps rigide en rotation. Il augmente en fonction du spin, pour atteindre à haut moment angulaire la valeur corps rigide en rotation. Ce comportement est interprété dans le cadre du modèle du cranking comment étant dû à une atténuation des corrélations d'appariement par la rotation. L'effet de celle-ci est en effet de briser les paires de nucléons appariés, qui ayant des spins opposés subissent de façon inverse les effets de la rotation (effet Mottelson-Valatin [2]). Il en résulte une

dilatation du spectre à bas moment angulaire et donc une diminution du moment d'inertie qui s'atténue avec le spin.

La méthode "classique" de traitement des corrélations d'appariement est l'approximation BCS. Les premières applications de la méthode BCS ont été effectuées dans une couche d'oscillateur, ce qui justifiait l'utilisation d'une interaction entre paire constante (interaction de séniorité). Par la suite, cette force de séniorité a été abondamment utilisée dans des espaces variationnels restreints, limités à une tranche d'énergie autour du niveau de Fermi. Des forces plus générales ont été introduites déjà dans les années 70. Une première famille est constituée de forces de portée nulle (interaction delta) comportant éventuellement une dépendance en densité. Ce type d'interaction nécessite, comme l'interaction de séniorité, une limitation de l'espace variationnel, les éléments de matrice d'un opérateur à deux corps de portée nulle ne comportant pas de coupure en fonction de l'énergie. Une deuxième famille est constituée par des interactions de portée finie, non nulle, dont un exemple abondamment testé est l'interaction de Gogny (voir par exemple le cours de J-F Berger en 1991 [3] ou [4]). Dans ce cas, une coupure dans l'espace des phases existe naturellement et l'énergie d'appariement ne diverge pas en fonction de la taille de la base utilisée.

L'étude de noyaux à très haut moment angulaire ou de noyaux éloignés de la stabilité a révélé trois faiblesses principales des traitements de l'appariement à l'approximation BCS. Les deux premières requièrent de remplacer l'approximation BCS par une méthode qui la généralise: la méthode de Hartree-Fock Bogoliubov. La troisième demande d'introduire des corrélations au delà de la méthode du champ moyen.

Dans les noyaux en rotation, est utilisé un hamiltonien contenant une contrainte sur une des projections du moment angulaire. Dans ce cas, l'état obtenu par la méthode du champ moyen brise la symétrie par renversement du sens du temps. L'approximation BCS dans laquelle on suppose que les états appariés sont dégénérés en énergie et reliés entre eux par l'opération de renversement du sens du temps n'est donc plus valable.

Dans le cas des noyaux éloignés de la ligne de stabilité, par définition, le niveau de Fermi s'approche de zéro. L'approximation BCS n'est alors plus correcte parce que les corrélations d'appariement connectent des états liés à des états situés dans le continu. On peut montrer qu'à cette approximation, on crée ainsi un nuage de particules entourant de façon non physique le noyau. Nous verrons dans ce cours que la méthode HFB ne possède pas ce défaut.

La troisième insuffisance des traitements classiques de l'appariement concerne le régime des corrélations faibles. Le cas le plus typique est celui d'un noyau en rotation pour lequel l'énergie d'appariement décroît avec le spin. A l'approximation BCS ou HFB, ces corrélations disparaissent pour une fréquence de rotation de l'ordre de 300keV, autour de laquelle elles s'annulent brusquement. Cette disparition est en général assimilée à une transition entre une phase superfluide et une phase normale du noyau. Elle induit des discontinuités dans le moment d'inertie dynamique du noyau, qui ne sont pas vérifiées expérimentalement. Nous verrons dans la deuxième partie du cours que ces transitions de phase sont spurieuses et disparaissent dans des méthodes plus générales que les méthodes de champ moyen.

Dans la première partie du cours, nous allons partir de l'approximation BCS pour indiquer en quoi la méthode HFB la généralise. Nous dériverons ensuite la forme asymptotique des équations HFB, pour démontrer que le couplage entre les états HF liés et du continu n'entraîne pas la création d'un nuage spurieux de particules entourant le noyau. Dans la deuxième partie du cours, nous introduirons les méthodes de variation après restauration de symétrie et nous montrerons qu'elles permettent d'introduire des corrélations au-delà du champ moyen qui suffisent à éliminer les transitions de phase liées aux symétries brisées.

## II. LES NOYAUX ÉLOIGNÉS DE LA STABILITÉ

### A. L'approximation BCS

Un état BCS  $|BCS\rangle$  est défini à partir du vide  $|0\rangle$  par:

$$|BCS\rangle = \prod_{i>0} (u_i + v_i a_i^\dagger a_{\bar{i}}^\dagger) |0\rangle, \quad (2.1)$$

où les orbitales  $\bar{i}$  et  $i$  sont reliées par une opération de renversement du sens du temps, et  $a_i^\dagger$  est l'opérateur de création d'un nucléon dans l'orbitale  $i$ . La notation  $i > 0$  indique que le produit court seulement sur un membre pour chaque paire BCS. L'état  $|BCS\rangle$  est le vide des quasiparticules  $\alpha_i$  et  $\alpha_{\bar{i}}$  définies par:

$$\begin{aligned} b_i &= u_i a_i - v_i a_{\bar{i}}^\dagger, \\ b_{\bar{i}} &= u_i a_{\bar{i}} + v_i a_i^\dagger. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Rappelons qu'un état BCS n'est pas état propre de l'opérateur nombre de particules  $\hat{N} = \sum_i a_i^\dagger a_i$ .

Examinant la structure de la transformation BCS2.2, on voit qu'il s'agit d'une transformation de base très particulière. Elle mélange les opérateurs de création et d'annihilation, ainsi que des opérateurs reliés par une transformation par renversement du sens du temps. Elle est limitée au mélange d'un seul couple  $(i, \bar{i})$ , défini précisément par l'opération renversement du sens du temps. La transformation de Bogoliubov généralise la transformation BCS en levant ces deux particularités. D'une part, le lien simple entre les états BCS partenaires est relâché. D'autre part, la transformation de base mélange tous les états  $a_{\bar{i}}$  et  $a_i$  et non plus seulement deux d'entre eux.

### B. La transformation de Bogoliubov

La transformation de Bogoliubov est une transformation unitaire générale qui relie les opérateurs de création et d'annihilation  $\{a_i^\dagger, a_i\}$  aux opérateurs de quasiparticules

$\{b_i^+, b_i\}$ , tout en préservant les propriétés fermioniques d'anticommutation. La matrice de transformation  $\mathcal{W}$  est définie par:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} U & V^* \\ V & U^* \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} b_i^+ \\ b_i \end{pmatrix} = \mathcal{W}^+ \begin{pmatrix} a_i^+ \\ a_i \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

On montre de façon très générale (théorème de Bloch-Messiah [5]) que cette transformation se décompose en le produit de trois transformations plus simples,

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} & \bar{V} \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix} . \quad (2.4)$$

La première et la troisième transformations ne mélangent pas les opérateurs de création et d'annihilation. La deuxième a la même structure qu'une transformation BCS classique: elle se décompose en transformations ne mélangeant qu'une seule paire (pour un noyau pair-pair). La différence essentielle entre cette transformation et une transformation BCS habituelle est que le choix des orbitales partenaires n'est pas postulé à priori mais est défini par la première transformation.

La base intermédiaire de la transformation de Bogoliubov possède des propriétés très particulières. Elle porte le nom de base canonique ou de base naturelle.

### C. Les équations HFB

Partant d'un hamiltonien  $\hat{H}$  qui s'écrit dans une base à particules indépendantes  $\{a_i^+, a_i, (i = 1, \dots, N)\}$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{T} + \hat{V} , \\ \hat{T} &= \sum_{ij} T_{ij} a_i^+ a_j , \\ \hat{V} &= \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_l a_k , \end{aligned} \quad (2.5)$$

la méthode HFB détermine le vide de quasiparticule  $|\Psi\rangle$  qui minimise l'énergie

$$\mathcal{E} = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \quad (2.6)$$

avec la contrainte:  $\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = N_0$ . La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules  $\hat{N}$  est donc contrainte au nombre voulu de nucléons  $N_0$  (séparément pour les neutrons et les protons).

La minimisation du routhian total  $\mathcal{E}^\lambda$ ,

$$\mathcal{E}^\lambda = \mathcal{E} - \lambda \langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle \quad (2.7)$$

conduit aux équations HFB aux valeurs propres: pour la matrice  $2N \times 2N$ :

$$\begin{pmatrix} h & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} E \quad , \quad (2.8)$$

qui donnent  $N \times N$  matrices  $U$  et  $V$  comme vecteurs propres et la matrice diagonale  $E$  de  $N$  valeurs propres qui sont les énergies de quasiparticules,  $E_{ij} = \delta_{ij} E_i$ . Le spectre HFB complet est composé de paires de valeurs propres opposées [1]. Dans l'Eq. (2.8), une seule valeur propre pour chaque paire doit être retenue (sinon les relations de commutation de fermions ne peuvent être satisfaites). Le hamiltonien de Hartree-Fock  $h$  et le potentiel d'appariement  $\Delta$  sont construits à partir de la matrice densité  $\rho$  et du tenseur d'appariement  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \rho &= V^* V^T \quad , \\ \kappa &= V^* U^T \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

suivant

$$\begin{aligned} h_{ij} &= T_{ij} + \sum_{kl} V_{ikjl} \rho_{lk} - \lambda \delta_{ij} \quad , \\ \Delta_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{kl} V_{ijkl} \kappa_{kl} \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les opérateurs  $b_i$  sont les opérateurs de destruction associés au vide de quasiparticules  $|\Psi\rangle$  ( $b_i |\Psi\rangle = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ).

#### D. La base canonique

La base canonique possède des propriétés très particulières. On montre facilement à partir des équations 2.9 et de la forme de la transformation de Bloch-Messiah que la

matrice densité  $y$  est diagonale et le tenseur d'appariement  $y$  est sous sa forme canonique. L'un et l'autre  $y$  ont donc des formes similaires à celles de l'approximation BCS. Il faut cependant noter que le hamiltonien de Hartree-Fock (matrice  $h$ ) n'est pas diagonal dans cette base. Pour cette raison, la notion d'énergie de particules individuelles n'a plus de signification exacte à l'approximation HFB. Seules les énergies de quasiparticules ont un sens bien précis.

### E. L'espace des coordonnées

Les formules données jusqu'à présent correspondent à une résolution des équations HFB par développement sur une base (par exemple d'oscillateurs). Les opérateurs de création  $a_i^+$  sont repérés par un indice discret  $i$  qui labelle les états de la base. Une représentation équivalente (à la convergence!) consiste à utiliser une représentation de coordonnées spatiales. C'est ce qui est fait en général lorsque l'on considère des systèmes à symétrie sphérique: les équations HFB radiales sont discrétisées entre l'origine et une valeur du rayon pour laquelle on annule toutes les fonctions d'onde [6,7]. Une méthode similaire est utilisée lorsque l'on discrétise les équations du champ moyen sur un réseau catésien à 3 dimensions [8,9].

Les coordonnées sphériques sont particulièrement bien adaptées à la discussion des propriétés spatiales des fonctions d'onde et en particulier de leur forme asymptotique et du couplage au continu. Les opérateurs de création dans l'espace des coordonnées sont liés aux opérateurs de création sur une base par une transformation simple. L'opérateur de création d'une particule dans l'espace au point  $\mathbf{r}$  et ayant la projection de spin  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  est donné par:

$$a_{\mathbf{r}\sigma}^+ = \sum_i \psi_i^*(\mathbf{r}\sigma) a_i^+, \quad (2.11)$$

où  $\psi_i(\mathbf{r}\sigma)$  est la fonction d'onde du  $i$ -ième état de particule individuelle.

La relation inverse à (2.11) est donnée par:

$$a_i^+ = \int d^3\mathbf{r} \sum_{\sigma} \psi_i(\mathbf{r}\sigma) a_{\mathbf{r}\sigma}^+. \quad (2.12)$$

Ces équations (2.11) and (2.12) supposent que les fonctions d'onde  $\psi_i(\mathbf{r}\sigma)$  forment un ensemble orthonormal complet.

On définit des densités de particules et d'appariement dans l'espace  $\mathbf{r}$  de la même façon que dans une base:

$$\rho(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \langle \Psi | a_{\mathbf{r}'\sigma'}^+ a_{\mathbf{r}\sigma} | \Psi \rangle, \quad (2.13a)$$

$$\kappa(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \langle \Psi | a_{\mathbf{r}'\sigma'} a_{\mathbf{r}\sigma} | \Psi \rangle. \quad (2.13b)$$

Notons que plutôt que  $\kappa$ , qui est une fonction antisymétrique des arguments de spin et d'espace, certains auteurs préfèrent introduire une matrice paire par renversement du sens du temps et hermitique,  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma')$  qui est reliée à  $\kappa$  par:

$$\kappa(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = 2\sigma'\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}', -\sigma') \quad (2.14)$$

On a alors les propriétés:

$$\rho(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = 4\sigma\sigma'\rho(\mathbf{r}-\sigma, \mathbf{r}'-\sigma')^*, \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = 4\sigma\sigma'\tilde{\rho}(\mathbf{r}-\sigma, \mathbf{r}'-\sigma')^*. \quad (2.15b)$$

Dans la suite, nous utiliserons  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}-\sigma, \mathbf{r}'-\sigma')$  plutôt que  $\kappa$ , de façon à nous conformer aux notations des ref [6,7].

Les densités HFB locales (pour  $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$ ) ont des interprétations physiques simples:  $\rho$  mesure le nombre de particules dans un volume infinitésimal autours de  $\mathbf{r}$  ayant le spin  $\sigma$ ;  $\tilde{\rho}$  mesure la probabilité d'avoir une paire de fermions de projections de spin opposées dans un volume infinitésimal autours de  $\mathbf{r}$ .

L'équation HFB dans l'espace des coordonnées [1,6], s'écrit de façon similaire à l'équation dans l'espace des configurations:

$$\int d^3\mathbf{r}' \sum_{\sigma'} \begin{pmatrix} h(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') & \bar{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') \\ \check{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') & -h(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(E, \mathbf{r}'\sigma') \\ \phi_2(E, \mathbf{r}'\sigma') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \lambda & 0 \\ 0 & E - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(E, \mathbf{r}\sigma) \\ \phi_2(E, \mathbf{r}\sigma) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$



où  $\phi_1(E, \mathbf{r}\sigma)$  and  $\phi_2(E, \mathbf{r}\sigma)$  sont les composantes haute et basse des fonctions d'onde individuelles HFB de quasiparticules et  $\lambda$  l'énergie de Fermi.

L'équation HFB prend une forme proche de l'équation HF habituelle si on introduit une matrice densité généralisée:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho & \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} & \delta - \rho \end{pmatrix} ; \quad (2.17)$$

Cette matrice commute avec le hamiltonien HFB:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h - \lambda & \tilde{h} \\ \tilde{h} & -(h - \lambda) \end{pmatrix} ; \quad (2.18)$$

de la même façon que la matrice densité habituelle commute avec le hamiltonien HF. La matrice  $\mathcal{R}$  se développe en fonction des états propres de  $\mathcal{W}$ , avec ses valeurs propres comme coefficients.

Les propriétés de  $\rho$  et  $\kappa$  permettent de montrer que ces valeurs propres de  $\mathcal{R}$  sont égales à 0 ou 1. Cette matrice s'exprime donc en fonction des vecteurs propres de  $\mathcal{W}$  comme une somme sur les états occupés (valeur propre 1). L'analogie avec la matrice densité de la méthode de Hartree-Fock pure est donc évidente.

Il nous reste maintenant à examiner les propriétés asymptotiques des solutions de l'équation HFB. La matrice densité et le tenseur d'appariement sont localisés sur le noyau. Les termes d'interaction de  $h(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma')$  et  $\tilde{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma')$  tendent donc vers 0 asymptotiquement. Ne subsistent que l'énergie cinétique et le terme en  $\lambda$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_1(E, \mathbf{r}'\sigma') = (\lambda + E)\phi_1(E, \mathbf{r}'\sigma') \quad (2.19)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_2(E, \mathbf{r}'\sigma') = (\lambda - E)\phi_2(E, \mathbf{r}'\sigma') \quad (2.20)$$

Les formes asymptotiques de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  dépendent respectivement des signes de  $\lambda + E$  et  $\lambda - E$ . On a pour  $\phi_1(E, \mathbf{r}'\sigma')$  une forme asymptotique en onde plane si  $\lambda + E > 0$  et en exponentielle décroissante si  $\lambda + E < 0$ . Pour  $\phi_2(E, \mathbf{r}'\sigma')$ , l'onde plane est obtenue pour  $\lambda - E > 0$  et l'exponentielle décroissante pour  $\lambda - E < 0$ .

Pour  $\lambda > 0$ , l'ensemble du spectre est continu, tandis que pour  $\lambda < 0$ , il est soit discret ( $|E| < -\lambda$ ), soit continu ( $|E| > -\lambda$ ). Comme pour  $E > 0$  et  $\lambda < 0$  les composantes basses  $\phi_2(E, \mathbf{r}\sigma)$  sont des fonctions localisées de  $\mathbf{r}$ , les matrices densités:

$$\rho(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = \sum_{0 < E_n < -\lambda} \phi_2(E_n, \mathbf{r}\sigma)\phi_2^*(E_n, \mathbf{r}'\sigma') + \int_{-\lambda}^{\infty} dn(E)\phi_2(E, \mathbf{r}\sigma)\phi_2^*(E, \mathbf{r}'\sigma'). \quad (2.21a)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma') = - \sum_{0 < E_n < -\lambda} \phi_2(E_n, \mathbf{r}\sigma)\phi_1^*(E_n, \mathbf{r}'\sigma') - \int_{-\lambda}^{\infty} dn(E)\phi_2(E, \mathbf{r}\sigma)\phi_1^*(E, \mathbf{r}'\sigma'), \quad (2.21b)$$

sont toujours localisées. L'état HFB est défini en occupant tous les états d'énergie négative, les états de quasiparticules d'énergie positive définissant les excitations du système.

En pratique, le spectre continu est discrétisé. L'intégrale sur l'énergie se réduit alors à une somme discrète.

L'approximation BCS revient à négliger les éléments de matrice non diagonaux de l'appariement: la matrice  $\tilde{h}(\mathbf{r}\sigma, \mathbf{r}'\sigma')$  est nulle pour  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  et constante sur la diagonale  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Les conditions asymptotiques de la méthode HFB sont donc perdues puisque  $\Delta$  ne s'annule pas asymptotiquement. Les densités définies à l'approximation BCS ne sont pas localisées lorsque le niveau de Fermi se rapproche de 0.

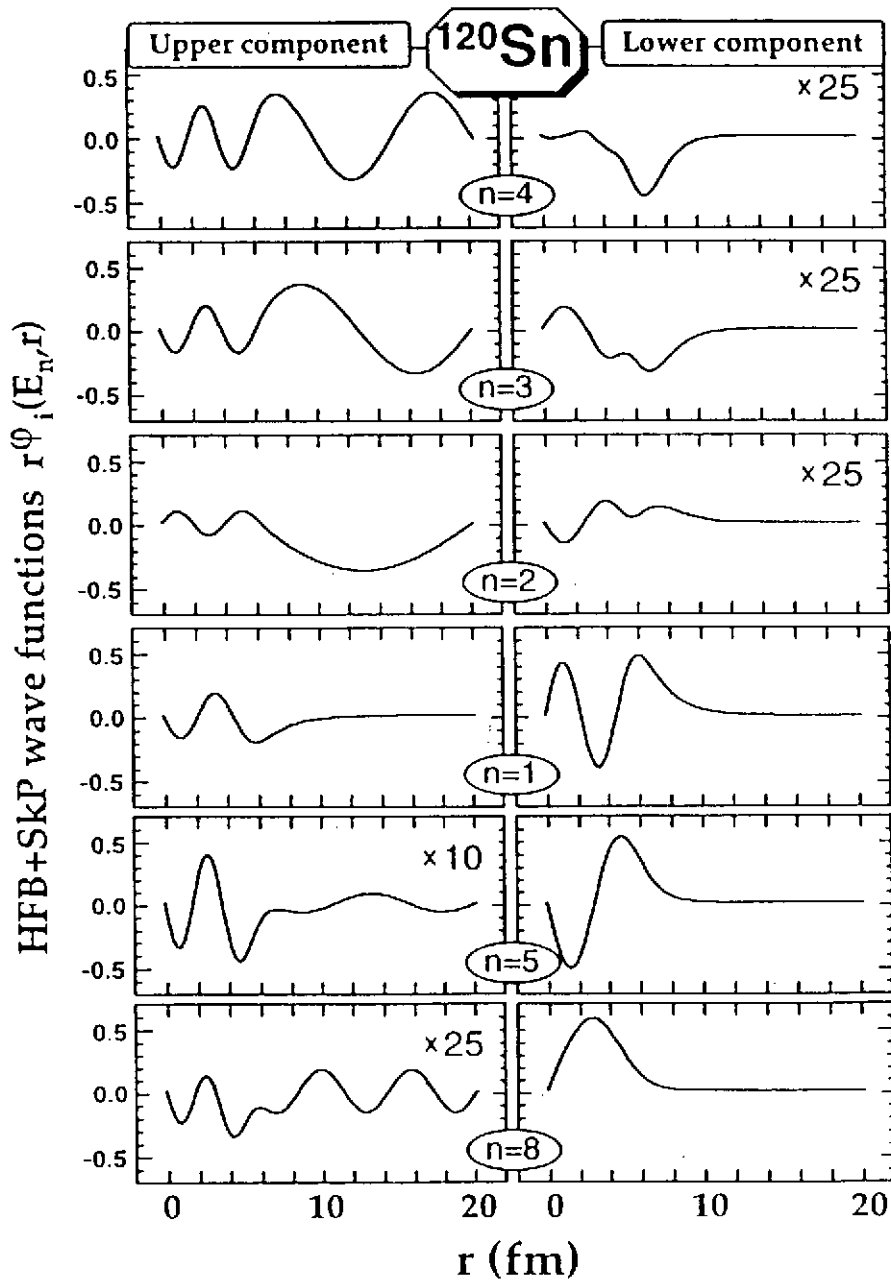
Les figures 1 à 3, tirées de la référence [7], illustrent le comportement asymptotique des fonctions d'onde obtenues dans différentes bases. On voit sur la figure 1 qu'une des deux composantes de la fonction HFB est toujours localisées (la composante basse), tandis que l'autre ne l'est pas, sauf pour la fonction la plus proche du niveau de Fermi ( $n=1$ ) pour laquelle  $|E| < -\lambda$ , localisée. Notons que les états n'ont pas été classés suivant leur énergie de qp mais suivant leur nombre de noeuds. En effet, les états ayant les énergies les plus basses sont ceux qui sont le plus proche du niveau de Fermi et non ceux correspondant (à l'approximation HF) aux états les plus profonds du champ moyen.

La figure 2 reprend les états de la base canonique, construit à partir des composantes HFB basses. Ils sont tout clairement localisés à l'intérieur du noyau. Sur la figure 3 sont dessinés les états HF+BCS obtenus en négligeant dans la matrice HFB les éléments non diagonaux de  $\Delta$ . L'effet sur les composantes basses est dramatique: seules les plus

profondes sont localisées. Dès que l'on se rapproche du niveau de Fermi, le couplage avec le continu devient important et perturbe fortement le comportement des états HF+BCS.

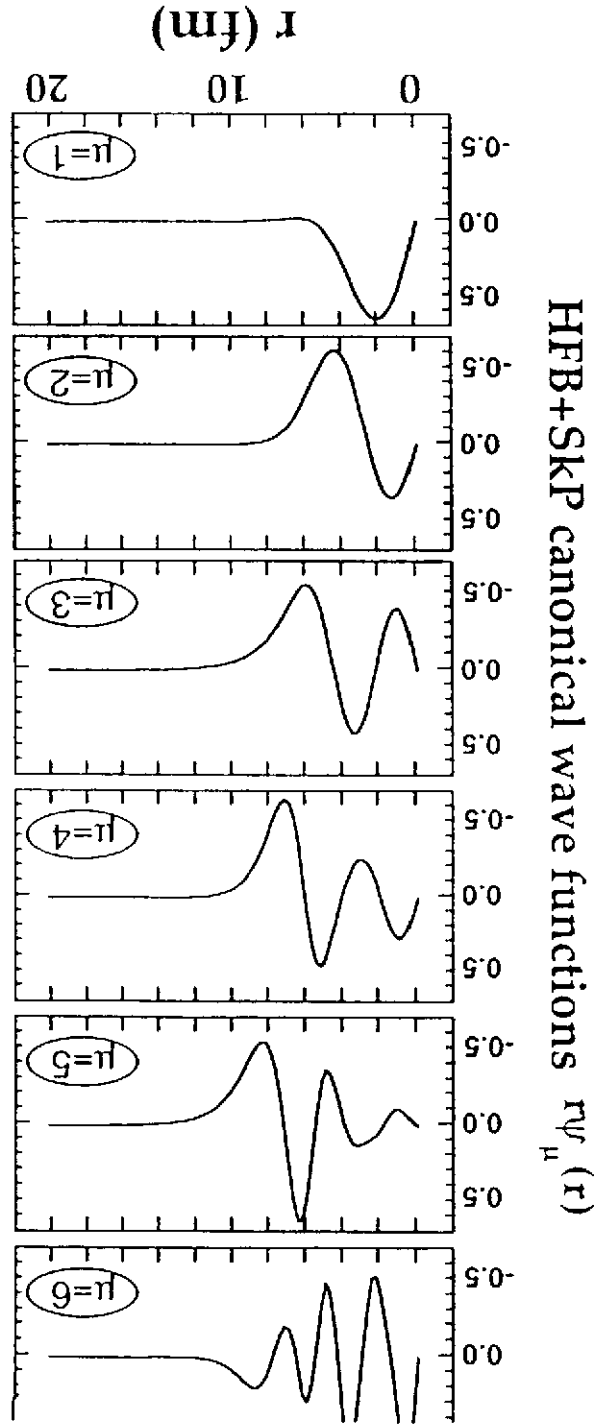
Figure 1

Fonctions d'onde radiales  $r\phi_i(E_n, r)$  des neutrons  $s_{1/2}$  du  $^{120}\text{Sn}$ , obtenues à l'approximation HFB avec l'interaction de Skyrme SkP. Les trois composantes basses  $n=2,3$  et 4 ont été multipliées par un facteur 25.



Fonctions d'onde radiales de la base canonique correspondant aux fonctions HFB de

Figure 2

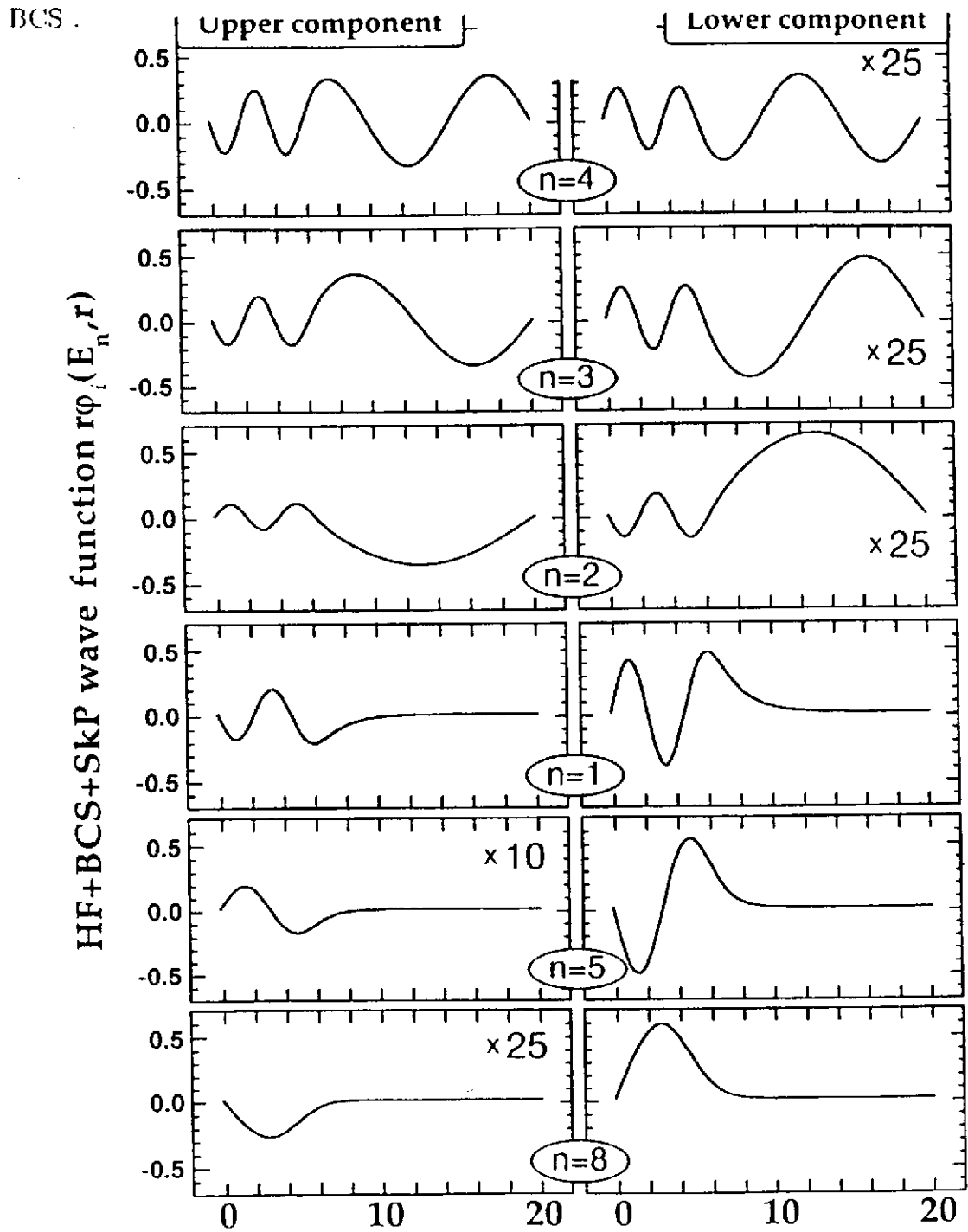


la figure 1.

HFB+SkP canonical wave functions  $r\psi_\mu(r)$

Figure 3

Même légende que la figure 1. pour des fonctions d'onde obtenues à l'approximation



### III. LE RÉGIME DES CORRÉLATIONS D'APPARIEMENT FAIBLES

#### A. Position du problème

Les équations HFB ont les équations HF comme cas particulier. En fait, il n'est pas garanti que les solutions des équations HFB présentent des corrélations d'appariement et que la solution HF ne soit pas la plus favorable énergétiquement. Comme nous l'avons discuté dans l'introduction, c'est ce qui se produit à haut spin dans une bande de rotation.

Cette transition de phase apparente entre phases superfluide et normale n'est pas physique [10]. On montre qu'aux alentours de la valeur critique du paramètre de contrôle pour laquelle les corrélations disparaissent, le gap s'annule, mais ses fluctuations deviennent très grandes, conduisant par exemple à la divergence des équations de la RPA [11]. Prendre en compte ces fluctuations conduit à des corrections faibles dans le cas d'un système infini. Par contre, dans un système à nombre fini de particules comme le noyau, ces corrections sont beaucoup plus importantes et modifient profondément le comportement de certaines grandeurs physiques. Ces corrections existent pour toute brisure de symétrie du hamiltonien physique par le hamiltonien de la méthode du champ moyen. Elles sont particulièrement grandes dans le cas de l'appariement car le nombre de paires participant à ces corrélations est très faible (4 ou 5) [3], beaucoup plus faible que le nombre de nucléons participant à l'apparition de déformation quadrupolaire et responsable de la brisure de la symétrie de rotation.

La disparition brutale des corrélations d'appariement amène un comportement non physique et incompatible avec l'expérience de la dépendance des moments d'inertie dynamique en fonction de la fréquence de rotation dans les bandes superdéformées. Rappelons que ces deux grandeurs sont définies à partir de leur équivalent en mécanique rationnelle: la fréquence de rotation est la dérivée de l'énergie totale par rapport au moment angulaire et le moment d'inertie dynamique en est la dérivée seconde. Il s'agit donc d'une quantité extrêmement sensible aux irrégularités de l'énergie totale. Sur la figure 4

est dessiné le moment d'inertie dynamique du  $^{192}\text{Hg}$  calculé à l'approximation HFB avec une interaction de séniorité dans la voie d'appariement. On voit que ce moment d'inertie présente deux pics, à des fréquences de rotation de l'ordre de 300keV. Au delà du deuxième pic, le moment d'inertie dynamique devient égal à la valeur obtenue à l'approximation HF. Sur la figure 5 sont reprises les énergies de pairing neutrons et protons. On voit qu'elles s'annulent, d'abord pour les protons et ensuite pour les neutrons aux deux fréquences pour lesquelles le moment d'inertie dynamique présente des pics. Ceux-ci ne sont pas présents pas dans les données expérimentales.

La façon de corriger ce problème est bien connue. La meilleure approche consiste à effectuer un calcul de variation après projection sur le bon nombre de particules (VAP).

Figure 4

Moment d'inertie dynamique du  $^{192}\text{Hg}$  calculé à l'approximation HF, HFB et HFB+LN avec une interaction de séniorité dans la voie d'appariement et la force de Skyrme Skm\* dans la voie champ moyen (d'après la ref [12]).

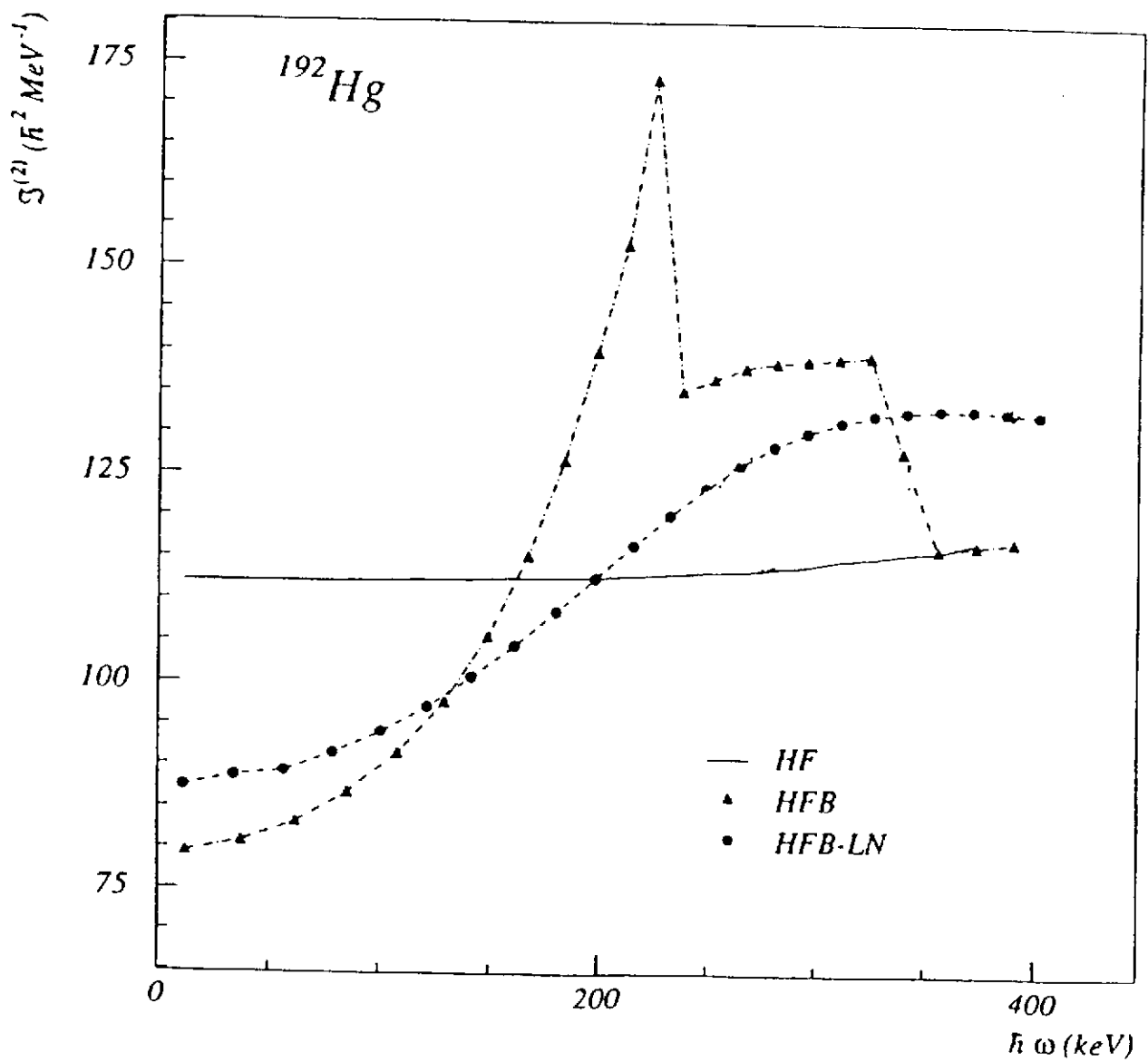
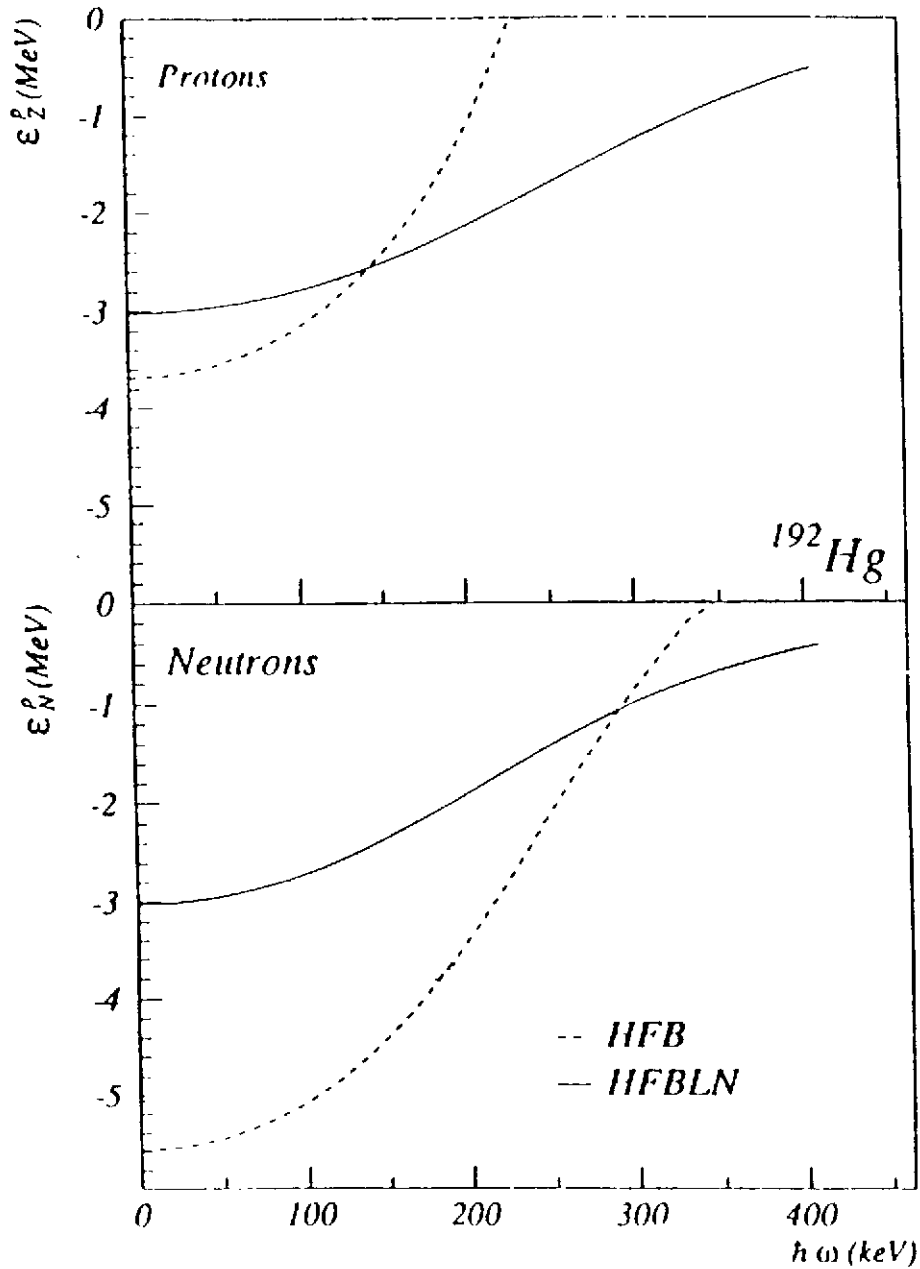




Figure 5

Energie d'appariement du  $^{192}\text{Hg}$  calculé à l'approximation HF et HFBLN avec une interaction de séniorité dans la voie d'appariement et la force de Skyrme Sku $^*$  dans la voie champ moyen (d'après la ref [12]).



### B. Variation après projection

Des fonctions d'onde projetées sur le bon nombre de particules sont obtenues à partir de fonctions d'onde de type BCS ou Bogoliubov en utilisant un opérateur de projection sous forme intégrale:

$$\hat{P}_{NZ} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(i\phi_N(\hat{N} - N)) d\phi_N \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(i\phi_Z(\hat{Z} - Z)) d\phi_Z \quad (3.1)$$

Dans cette équation,  $N$  et  $Z$  sont les nombres de neutrons et de protons sur lesquels on projette,  $\hat{N}$  et  $\hat{Z}$  sont les opérateurs nombre de neutrons et de protons. On obtient une fonction d'onde ayant  $N$  neutrons et  $Z$  protons  $|\Phi(N, Z)\rangle$  par l'action de ce projecteur sur une fonction HFB:

$$|\Phi(N, Z)\rangle = \hat{P}_{NZ}|\Psi\rangle \quad (3.2)$$

Les intégrales sur les angles de jauge  $\phi_{N,Z}$  font intervenir de façon générale un domaine d'intégration compris entre 0 et  $2\pi$  qui peut être réduit à un intervalle de 0 à  $\pi$  pour des noyaux à nombre pair de neutrons et de protons. Une réduction supplémentaire de 0 à  $\pi/2$  pour l'une des deux intégrales est possible si les fonctions d'onde sont paires par renversement du sens du temps.

La forme de la projection sur le bon nombre de particules est similaire à l'introduction d'une fonction d'onde coordonnée génératrice. Dans la méthode de la coordonnée génératrice (GCM), partant d'une famille de fonctions d'onde à  $N$ -corps  $|\Psi(q)\rangle$ , dépendant d'une variable collective  $q$ , on détermine une meilleure approximation des états propres de l'hamiltonien  $\hat{H}$  sous la forme:

$$|\Phi_k\rangle = \int dq f_k(q) |\Psi(q)\rangle \quad (3.3)$$

Les fonctions poids  $f_k$  ( $k$  est l'indice des états propres) sont déterminées en demandant que la valeur moyenne de l'énergie  $E_k$ :

$$E_k = \frac{\langle \Phi_k | \hat{H} | \Phi_k \rangle}{\langle \Phi_k | \Phi_k \rangle} \quad (3.4)$$

soit stationnaire par rapport à des variations arbitraires  $\delta f_k$ .

La première différence entre la GCM et une projection sur une symétrie brisée est que la fonction poids est connue à priori dans ce dernier cas, à partir d'arguments simples. On vérifie que, dans le cas de la projection sur le nombre de particules, la fonction poids est constante en développant la fonction que l'on projette sur des états à bon nombre de particules  $|\Phi(N)\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \sum_N c_N |\Phi(N)\rangle \quad (3.5)$$

Comme on a:

$$\hat{N}|\Phi(N)\rangle = N|\Phi(N)\rangle \quad (3.6)$$

remplaçant  $|\Psi\rangle$  dans l'équation (3.2) par son expression (3.5), on obtient une phase qui annule l'intégration sauf pour la composante de  $|\Psi\rangle$  ayant le nombre de particules désiré.

La fonction poids étant fixée, une deuxième différence GCM/projection apparaît: telle quelle, la projection ne contient pas de paramètres variationnels. La fonction  $|\Psi\rangle$  peut elle même résulter d'un calcul variationnel (comme une fonction HFB par exemple), mais elle n'est pas modifiée par la projection. Dans ce cas, la méthode utilisée est appelée une méthode de variation avant projection (PAV). Cette méthode n'est pas satisfaisante dans de nombreux cas, en particulier pour les noyaux en rotation, pour lesquelles les corrélations d'appariement disparaissent brutalement pour une certaine fréquence de rotation. En dessous de cette fréquence, la fonction d'onde brise la symétrie nombre de particules et est affectée par la projection. En particulier, la projection conduit à une meilleure énergie variationnelle. Au dessus de la fréquence critique, la fonction d'onde devient purement HF et est donc fonction propre de l'opérateur nombre de particules. L'énergie n'est alors pas modifiée par la projection et une méthode PAV aboutit ainsi à une discontinuité de l'énergie à la fréquence critique.

La solution à ce problème est de permettre une variation de la fonction  $|\Psi\rangle$  après l'avoir projetée sur la symétrie à restaurer. Ceci peut se faire de deux manières. Une

variation limitée consiste à introduire un degré de liberté qui semble important pour la symétrie brisée et à le traiter par la GCM. Pour la symétrie nombre de particules, ce degré de liberté peut être le gap BCS: des fonctions de base sont générées par des calculs BCS en imposant une série de valeurs (constante) pour ce gap. Les fonctions BCS résultantes, projetées sur le bon nombre de particules, sont ensuite mélangées par la GCM, avec ce gap comme coordonnée génératrice et éventuellement une interaction plus réaliste pour l'interaction d'appariement. Ce type de méthode a été appliqué à l'étude des vibrations de pairing [13,14] avec cependant des fonctions non projetées sur le nombre de particules. La généralisation à des fonctions projetées ne poserait plus aujourd'hui de problèmes techniques. La fonction d'onde résultante est dans ce cas une superposition de fonctions BCS projetées sur le bon nombre de particules.

Une approche différente consiste à effectuer une variation complète de la fonction d'onde avant de la projeter. On détermine dans ce cas une fonction d'onde de type BCS unique qui donnera la meilleure énergie après projection parmi l'ensemble des fonctions d'onde BCS que l'on peut construire dans la base choisie. La fonction projetée a donc une structure de fonction BCS. D'un point de vue variationnel, elle est moins bonne que la solution BCS lorsqu'on se limite à cette approximation. C'est l'énergie projetée avec cette fonction qui est meilleure que l'énergie projetée obtenue à l'aide la solution BCS. Cette méthode est appelée une méthode de variation après projection (VAP).

### C. L'approximation de Kamlah

L'implémentation d'une méthode VAP est relativement compliquée et n'a été faite qu'avec des interactions nucléon-nucléon schématique, du type quadrupole-quadrupole+seniorité [15]. Des approximations ont été dérivées, dont le but est de conserver des équations proches de celles des méthodes de champ moyen, tout en évitant une disparition brusque des corrélations d'appariement.

Le point de départ de ces approximations est une approximation des éléments de

matrice intervenant dans un calcul VAP: ce sont des éléments de matrice entre la fonction de départ et la fonction obtenue apres avoir fait tourner d'un angle  $\phi$  la fonction de départ. Notons que dans le cas d'une fonction BCS, sa rotation d'un angle de jauge  $\phi$  s'obtient en remplaçant dans l'équation 2.1 tous les  $v_k$  par  $\exp i\phi v_k$ . Ces éléments de matrice sont de la forme:

$$\mathcal{H}(\phi) = \langle \Psi | \hat{H} \exp i\phi \hat{N} | \Psi \rangle \quad , \quad \mathcal{I}(\phi) = \langle \Psi | \exp i\phi \hat{N} | \Psi \rangle \quad . \quad (3.7)$$

On approche d'abord  $\mathcal{I}(\phi)$  par:

$$\mathcal{I}(\phi) \approx \exp(i\langle \hat{N} \rangle \phi - \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle \phi^2) \quad (3.8)$$

où  $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle$  est la dispersion de l'opérateur nombre de particules:

$$\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{N}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle^2 \quad (3.9)$$

Cette approximation est similaire à l'approximation du recouvrement gaussien utilisée pour dériver un hamiltonien de Bohr à partir de la GCM.

Kamlah [16] a introduit un opérateur  $\hat{I}$  défini par:

$$\hat{I} = -\langle \hat{N} \rangle + i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.10)$$

et propose de développer  $\mathcal{H}(\phi)$  à l'aide de cet opérateur:

$$\mathcal{H}(\phi) = \sum_{l=0}^L h_l \hat{I}^l \mathcal{I}(\phi) \quad (3.11)$$

Ce développement est limité à L termes. Les coefficients  $h_l$  sont déterminés en appliquant l'opérateur  $\hat{I}$  de 1 à L fois à  $\mathcal{H}(\phi)$  donné par 3.11 et 3.7 et en égalant les valeurs pour  $\phi=0$ . On obtient ainsi un système d'équations dont les  $h_l$  sont solutions. Pour L=1, on obtient la contrainte habituelle sur le nombre de particules Pour L=2, on obtient une expression quadratique pour l'énergie totale.

### D. La prescription de Lipkin-Nogami

La méthode proposée par Lipkin et Nogami [17-19] est très proche de la méthode de Kamlah, mais présente l'avantage de conduire à des équations semblables aux équations HFB habituelles et de pouvoir grâce à cela s'implémenter très facilement dans les codes de résolution des équations HFB.

La prescription de Lipkin-Nogami revient à modifier l'énergie  $\mathcal{E}$  en ajoutant la correction de Kamlah au second ordre.

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - \lambda_2 \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle \quad , \quad (3.12)$$

où  $\langle \hat{O} \rangle$  représente la valeur moyenne  $\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$ . Le coefficient  $\lambda_2$  est donné par:

$$\lambda_2 = \frac{\langle \hat{H}(\Delta \hat{N}^2 - \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle) \rangle - \langle \hat{H} \Delta \hat{N} \rangle \langle \Delta \hat{N}^3 \rangle / \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle}{\langle \Delta \hat{N}^4 \rangle - \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle^2 - \langle \Delta \hat{N}^3 \rangle^2 / \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle} \quad . \quad (3.13)$$

pour un état HFB, on peut calculer explicitement les moments de l'opérateur  $\Delta \hat{N} = \hat{N} - \langle \Delta \hat{N} \rangle$  qui apparaît dans la définition de  $\lambda_2$  [20]:

$$\begin{cases} \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = 2 \operatorname{tr} [\chi] \\ \langle \Delta \hat{N}^3 \rangle = 4 \operatorname{tr} [\gamma \chi] \\ \langle \Delta \hat{N}^4 \rangle = 3 \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle^2 + 8 \operatorname{tr} [\chi(1 - 6\chi)] \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \chi = \rho(1 - \rho) \\ \gamma = 1 - 2\rho \end{cases} \quad , \quad (3.14)$$

et

$$\begin{cases} \langle \hat{H} \Delta \hat{N} \rangle = 2 \operatorname{tr} [h\chi] - \Re \operatorname{tr} [\Delta \kappa^* \gamma] \\ \langle \hat{H}(\Delta \hat{N}^2 - \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle) \rangle = 4 \operatorname{tr} [(h\gamma + v_{HF}\{\chi\})\chi] - \Re \operatorname{tr} [\Delta \kappa^* (1 - 8\chi)] \\ \quad - \operatorname{tr} [v_P\{\gamma\kappa\}(\gamma\kappa)^*] \end{cases} \quad , \quad (3.15)$$

où le symbole  $\operatorname{tr} [a]$  représente la trace de la matrice  $a$  et  $\Re$  correspond à la partie réelle. Les champs moyens  $v_{HF}\{\chi\}$  et  $v_P\{\gamma\kappa\}$  sont les potentiels de champ moyen et d'appariement respectivement, calculés avec les densités  $\chi$  and  $\gamma\kappa$ :

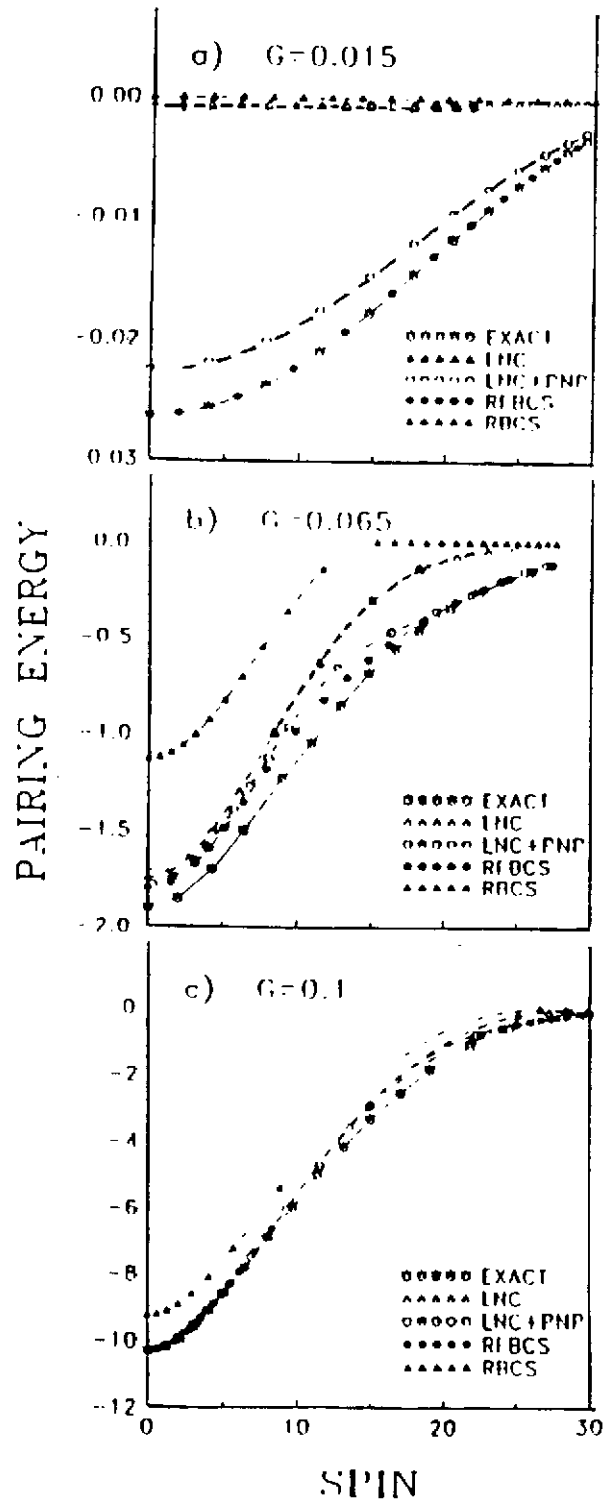
$$v_{HF}\{\chi\}_{ij} = \sum_{kl} V_{ikjl} \chi_{lk} \quad ; \quad v_P\{\gamma\kappa\}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{kl} V_{ijkl} (\gamma\kappa)_{kl} \quad . \quad (3.16)$$

Les équations auxquelles on arrive par cette prescription de Lipkin-Nogami sont semblables à celles de la méthode de Kamlah. Une simplification supplémentaire est introduite: la variation de  $\lambda_2 \langle \Delta \hat{N}^2 \rangle$  est limitée. On ne varie pas en effet  $\lambda_2$ , ce qui apporte des simplifications importantes à la méthode mais brise le principe variationnel. Cependant, la valeur de  $\lambda_2$  est calculée de façon self-consistante au moyen de l'équation (3.13). En se basant sur l'équation (3.14), ceci conduit [19] à la modification de l'hamiltonien HF,  $h \rightarrow h - 2\lambda_2\gamma$ , tandis que le potentiel d'appariement  $\Delta$  est inchangé. Cependant, comme suggéré dans la référence [21], on peut utiliser une forme équivalente de  $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = 2\text{tr} [\kappa^+ \kappa]$ , qui conduit à  $\Delta \rightarrow \Delta - 4\lambda_2\kappa$  et  $h$  inchangé. Ce choix est en général plus stable numériquement [21]. En fait, toutes les combinaisons intermédiaires entre les deux prescriptions sont possibles. Ces choix différents conduisent à des énergies de quasi-particules différentes, ce qui peut sembler à première vue paradoxal. Le fait que ces énergies dépendent de ces choix se comprend aisément en prenant la forme BCS des énergies de qp:  $\sqrt{(\epsilon_i - \lambda_r)^2 + \Delta_i^2}$ . Cette expression n'est pas invariante si on fait passer un terme de  $\epsilon_i$  à  $\Delta_i$ . Ce résultat est une conséquence directe de ce que l'on a introduit des corrélations au-delà de la méthode du champ moyen et que n'ayant plus une approximation à quasi-particules indépendantes, la notion même de qp perd son sens. En pratique cependant, cette notion reste valable approximativement et l'analyse des propriétés des qp permet de comprendre qualitativement le comportement du noyau.

La méthode de Lipkin-Nogami fournit donc des équations très proches de celles de la méthode HFB. Au hamiltonien du système est ajouté en plus de la contrainte habituelle sur le nombre de particules un terme qui ressemble à une contrainte sur la dispersion sur le nombre de particules. Le paramètre  $\lambda_2$  n'est cependant pas un multiplicateur de Lagrange mais est donné par l'équation 3.13. La résolution des équations modifiées fournit une fonction d'onde de type BCS, qui est une approximation de la fonction BCS que l'on obtiendrait par un calcul VAP. L'énergie que l'on obtiendrait dans un tel calcul est alors approchée par l'équation 3.12.

Figure 6

Energie d'appariement calculée avec une interaction de séniorité dans un modèle schématique. Différentes approximations sont comparées au calcul exact dans des conditions (de haut en bas) de pairing faible, moyen et fort (d'après la ref [24]).





Les équations de Lipkin-Nogami ont été testées à l'aide de modèles schématiques pour lesquels on peut dériver des solutions exactes (voir par exemple [22–24]). Elles fournissent une bonne approximation d'un calcul VAP dans des situations où les corrélations d'appariement s'annulent à l'approximation BCS ou HFB. La figure 6 est tirée de la référence [24]. Le modèle utilisé simule un noyau en rotation. En diminuant l'intensité de la force d'appariement, ce modèle permet de passer d'un régime d'appariement fort à un régime d'appariement faible. Sur cette figure, plusieurs approximations différentes sont comparées au calcul exact:

- la méthode BCS proprement dite
- la prescription de Lipkin-Nogami
- un calcul complet de variation après projection sur le bon nombre de particules
- le résultat obtenu en projetant sur le bon nombre de particules la fonction d'onde BCS obtenue par la méthode de Lipkin-Nogami.

Trois cas d'appariement sont repris; l'énergie d'appariement est dessinée en fonction du spin introduit dans ce modèle schématique. Dans le cas de corrélations d'appariement fortes, les résultats obtenus par toutes les méthodes sont proches du résultat exact. Pour des appariements intermédiaires, les corrélations d'appariement disparaissent à l'approximation BCS, alors qu'elles sont encore importantes dans les autres approximations. L'approximation LN évite ce collapse de l'appariement mais sousstime l'énergie à haut spin. Dans le cas d'un appariement très faible, ces corrélations ne s'enclenchent jamais à l'approximation BCS; elles sont très faibles mais non nulles à l'approximation LN. Dans tous les cas, la projection sur le bon nombre de particules de la fonction BCS-LN conduit à un résultat proche du calcul VAP et de la solution exacte. Ceci est vrai même dans le cas de corrélations faibles, pour lesquelles la méthode LN prédit une énergie d'appariement beaucoup trop faible. On peut tirer comme conclusion de ce calcul test que

- la prescription de LN permet d'éviter une disparition non physique des corrélations d'appariement:
- la fonction d'onde BCS calculée à l'approximation LN est une bonne approximation de la fonction d'onde VAP. La prescription de LN pour déterminer l'énergie projetée sans faire explicitement la projection est elle de nettement moins bonne qualité dans le cas des corrélations faibles;
- les régimes pour lesquels la prescription LN n'est pas bonne correspondent à des énergies d'appariement très faibles (cf les unités sur l'axe des ordonnées) pour lesquels les autres termes de l'énergie sont prédominants.

De ce travail, on peut conclure que la prescription de Lipkin-Nogami permet de corriger partiellement les défauts de l'approximation HFB. Elle fournit une fonction d'onde de type BCS qui est une bonne approximation de la meilleure fonction d'un calcul VAP. Cependant, la prescription de LN approchant l'énergie projetée n'est pas d'aussi bonne qualité dans le cas d'un appariement faible. Il semble que de meilleures prescriptions pourraient être construites. Des approximations basées sur des développements autres que celui de Kamlah ont été proposées récemment par Flocard et Onishi [20]. Il serait intéressant de les tester dans des cas réalistes.

Sur les figures 4 et 5, sont portées les énergies d'appariement et moment d'inertie dynamique déterminés à l'aide la prescription de LN. On voit que le collapse brutal de l'appariement observé à l'approximation HFB disparaît, conduisant à un nettement meilleur accord avec les données expérimentales.

## REFERENCES

- [1] P. Ring et P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, Berlin, 1980)
- [2] B. Mottelson et J.G. Valatin, *Phys. Rev. Lett* **5** (1960) 511
- [3] J.F. Berger, cours Maubuisson 1991.
- [4] J. Dechargé et D. Gogny, *Phys. Rev. C* **21** (1980) 1568
- [5] C. Bloch et A. Messiah *Nucl. Phys.* **39** (1984) 95
- [6] J. Dobaczewski, H. Flocard and J. Treiner, *Nucl. Phys.* **A422** (1984) 103
- [7] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, T. R. Werner, J. F. Berger, C. R. Chinn and J. Decharge, *Phys. Rev C* **53** (1996) 2809
- [8] P. Bonche, H. Flocard, P.-H. Heenen, S.J. Krieger and M.S. Weiss, *Nucl. Phys. A* **443** (1985) 39
- [9] J. Terasaki, H. Flocard, P.-H. Heenen, and P. Bonche *Nucl. Phys. A* **600** (1996) 371
- [10] H. Schmidt, *Varenna Lectures* **53** (1971) 144
- [11] D.R. Bés, R.A. Broglia, J. Dudek, W. Nazarewicz and Z. Szymański *Ann. Phys.* **182** (1988) 237
- [12] B. Gall, P. Bonche, J. Dobaczewski, H. Flocard and P.-H. Heenen, *Z. Phys.* **A348** (1994) 183
- [13] R. A. Sorensen *Phys. Lett.* **38B** (1972) 376
- [14] J. Meyer, P. Bonche, J. Dobaczewski, H. Flocard and P.-H. Heenen, *Nucl. Phys.* **A533** (1991) 307
- [15] L. Egido and P. Ring, *Nucl. Phys.* **A388** (1982) 19
- [16] A. Kamlah, *Z. Phys.* **216** (1968) 52

- [17] H.J. Lipkin, *Ann. Phys. (N.Y.)* **9** (1960) 272
- [18] Y. Nogami, *Phys. Rev.* **134** (1964) B313
- [19] H.C. Pradhan, Y. Nogami and J. Law, *Nucl. Phys.* **201** (1973) 357
- [20] H. Flocard and N. Onishi, *Ann. Phys. (N.Y.)* **254** (1996) 225
- [21] W. Satuła, R. Wyss and P. Magierski, *Nucl. Phys.* **A578** (1994) 45
- [22] D.C. Zheng, D.W.L. Sprung, and H. Flocard, *Phys. Rev.* **C46** (1992) 1355
- [23] J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, *Phys. Rev.* **C47** (1993) 2418
- [24] P. Magierski, S. Ówiok, J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, *Phys. Rev.* **C48** (1993) 1686



# Collective excitations in nuclei.

Ph. CHOMAZ  
 GANIL, BP 5027,  
 14076 CAEN Cedex 5,  
 FRANCE,  
 chomaz@ganil.fr

## Abstract:

In these lectures we will describe several aspects of giant resonances observed in nuclei. We will present the theoretical tools in order to describe collective vibrations in hot and cold, stable or unstable, nuclei. This presentation will be illustrated by many experimental results.

## Resumer :

Dans ce cours nous abordons les différents aspects des résonances géantes observées dans les noyaux. Qu'ils soient chauds, qu'ils soient froids, qu'ils soient exotiques, qu'ils soient stables, qu'ils soient instables nous nous attacherons à discuter les méthodes théoriques employées pour les décrire. Cette présentation sera illustrée par de nombreux résultats expérimentaux.

## Chapter 1 Introduction

Collective behaviors are a general property of systems with many degrees of freedom. Often they describe how they react to an external stress. It is a general observation that complex systems are often able to self-organize in simple collective motion while they are expected to present disorder and chaos because of their intrinsic complexity. This paradox is well illustrated by the atomic nucleus. On the one hand, following the Bohr ideas, this strongly interacting system can be seen as the prototype of quantum chaos. On the other hand, other experimental evidences, such as the existence of magic numbers and the presence of giant resonances, are pleading in favor of a strongly organized system. The study of this amazing self-organization and its transition from order to chaos is one of the subject of the present article.

Of particular interest are the collective motions that can be interpreted in terms of vibration. If the associated spring constant is positive the motion corresponds to an oscillation around an equilibrium or more generally around a stable solution. Conversely, when the spring constant is negative this is the signature of the presence of instabilities in the system. Both cases correspond to typical situations encountered in many different physical systems. In this article we will discuss these two different aspects of collective vibrations taking as an example the nuclear systems.

In quantum mechanics, stable vibrations are associated with boson degrees of freedom. At first glance, this may seem surprising, particularly when considering excitations of macroscopic systems formed with fermions. Collective oscillations have been observed in mesoscopic systems such as zero-sound phonons in helium-3 fluids or plasmons in metallic clusters. Also, the nucleus is known to exhibit a large variety of collective vibrations usually called phonons. These giant resonances are understood as the first oscillator quanta of the collective vibrations. In particular, the giant dipole resonance corresponds to a collective motion of the protons against the neutrons which is akin to the plasmons in metals, the monopole vibration is a compression mode analogous to the zero-sound in Fermi liquids, and the giant quadrupole resonance is understood as a surface vibration which resembles the wave at the interface of two liquids.

From the microscopic point of view, these bosons can be understood as being built from fermion pairs, which carry boson quantum numbers. However, the number of possible pairs must be large enough to insure that the effects of the fermion antisymmetrization do not introduce significant deviations from a boson behavior. Moreover, the excitations of small fermionic systems are not expected to be well described by a boson picture, in particular, because the Pauli exclusion principle imposes constraints that cannot be accounted for in a boson representation. In this article we will present some properties of giant resonances and we will discuss the above questions. We will also investigate their properties at zero and at finite temperature and we will discuss their role in the dynamics of nuclear reactions.

Until recently, the second and higher quanta, the so-called multiphonon states, remained unobserved. Therefore, the observation of multiple excitations of giant resonances was an important missing piece in the puzzle of collective excitations. The non-existence of multiple excitations would have undermined our understanding of giant resonances. In the early seventies it has been proposed that multiphonon states might be excited during heavy ion reactions. It was proposed that the multiphonon excitations might be responsible for part of the energy lost observed in deep-inelastic reactions. In 1977, structures were observed in heavy ion inelastic spectra and it was suggested that these structures might be due to multiple excitations of giant resonances. However, it is only recently that an unambiguous signature of the multiphonon nature of the structures observed in heavy ion reactions have been reported. This study about multiphonon states will also be part of the present article.

Finally, in the recent years it has been increasingly evident that the systems formed during nuclear collisions might run across instabilities. Of particular interest are the instabilities related with the transition from liquid to gas because it might be a way to get information about the nuclear equation of state. From a more general point of view, the creation of domains during a phase transition might be thought as a highly collective motion. Therefore it is important to understand the possible links between phase transitions and collective motions. This will also be a subject of the present article.

## Chapter 2 Phenomenology of Giant Resonances

Before proceeding to a study of giant resonances in many different contexts, it is necessary to briefly review their phenomenology. The subject of giant resonance excitations in nuclei has been treated extensively in many review articles (see for example [Be75a, Sp81, Be76a, Wo87]) to which one can refer for a detailed information.

### 2.1 An example: the Giant Dipole Resonance

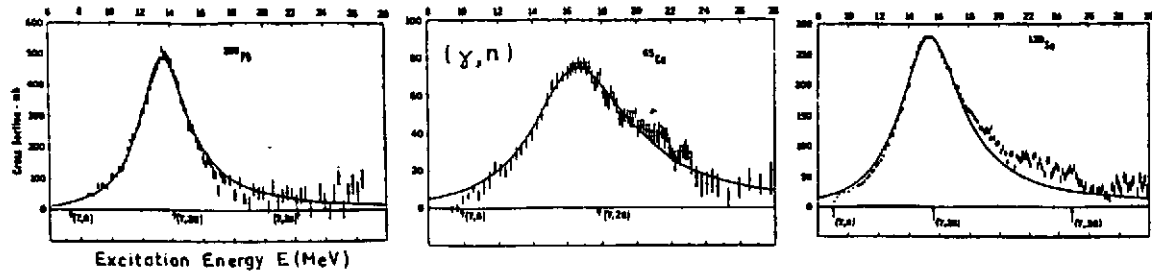


Figure 1 Giant Dipole Resonance in  $(\gamma, n)$  Reactions: The total photo neutron cross section for three nuclei  $^{208}\text{Pb}$ ,  $^{120}\text{Sn}$ , and  $^{65}\text{Cu}$  from ref. [Be75b] showing the strong resonance associated with a dipole vibration of the nucleus, the so-called Giant Dipole Resonance.

In 1947, Baldwin and Klaiber [Ba47] carried out photon-induced reactions and observed that at high excitation energies of about 15 to 20 MeV, the nucleus acts as a strong absorber of the incident photons (see Fig. 1). This phenomenon was named the nuclear giant resonance. In fact, this possibility of a resonant  $\gamma$  absorption was mentioned 10 years before in a paper by Bothe and Gentner who noticed that some  $\gamma$  capture probabilities were much higher than expected. The observed peak in the photo-absorption probability was interpreted by Goldhaber and Teller [Go48] as the excitation of a collective nuclear vibration in which all the protons in the nucleus move collectively against all the neutrons providing a separation between the centers of mass and charge, thus creating an electric dipole moment.

#### 2.1.1 Experimental systematics about the GDR

Experimentally, the GDR is well established as a general feature of all nuclei. It has been observed in nuclei as light as  $^3\text{He}$  and as heavy as  $^{232}\text{Th}$ . Nearly all the systematic information comes from photoabsorption experiments because of the high selectivity of this reaction to  $E_1$  transitions. An example of spectra from photonuclear reactions on three different targets is shown in Fig.1. However, complementary information has been obtained more recently in electron, proton or heavy ion inelastic scattering associated with coincidence measurements.

##### 2.1.1.1 Cross section

In spherical nuclei, the cross section  $\sigma_{abs}$  of photoabsorption can be approximated by a Lorentzian distribution

$$\sigma_{abs}(E_\gamma) = \frac{\sigma_R E_\gamma^2 \Gamma_{GDR}^2}{(E_\gamma^2 - E_{GDR}^2)^2 + E_\gamma^2 \Gamma_{GDR}^2} \quad (2.1)$$

where  $\sigma_R$  is the maximum of the distribution,  $E_{GDR}$  and  $\Gamma_{GDR}$  the energy and width of the GDR. In nuclei with a large static deformation the GDR splits into two components corresponding to oscillations along and perpendicular to the symmetry axis (see Fig.2).

In that case, the GDR cross section is well reproduced by the sum of two Lorentzian components. Both for spherical and deformed nuclei, the Lorentzian parametrization provides a good description of the shape of the GDR in medium and heavy nuclei by treating the resonance energy, width and strength as energy independent empirically adjustable parameters.

##### 2.1.1.2 Excitation energy

Using this method, it has been shown that the  $A$  dependence of the excitation energy of the dipole is intermediate between  $A^{-1/6}$  and  $A^{-1/3}$  and can be reproduced by a two parameter expression [Be75a]: (see Fig.3).

$$E_{GDR} = 31.2A^{-1/3} + 20.6A^{-1/6} \text{ (MeV)} \quad (2.2)$$

However, as far as medium and heavy nuclei are concerned, the energy of the GDR can be fairly reproduced by the simple law,  $E_{GDR} \approx 80A^{-1/3}$  (MeV).

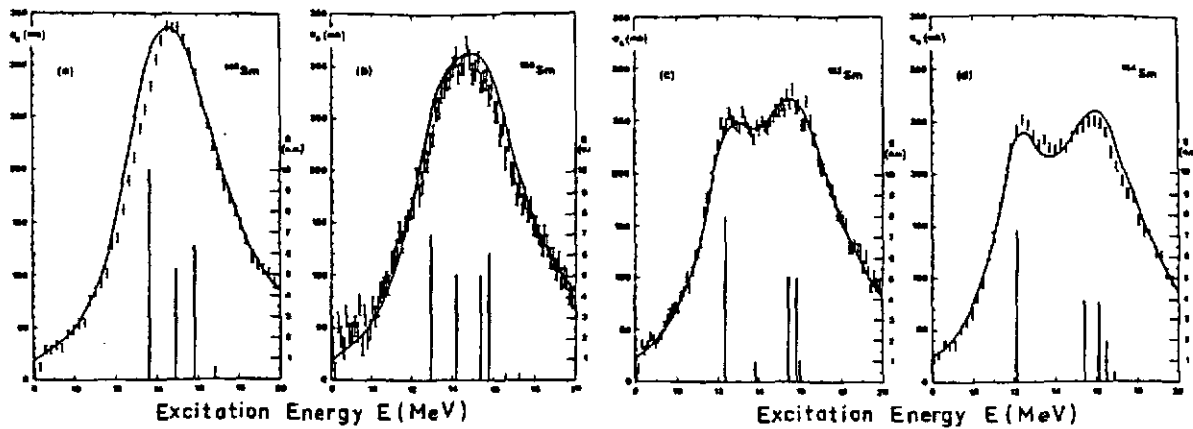


Figure 2 Evolution of the GDR with Deformation: Total photo neutron cross section for Sm isotopes showing the evolution of the giant dipole resonance in going from the spherical nucleus  $^{148}\text{Sm}$  to the deformed nucleus  $^{154}\text{Sm}$  (see ref. [Ma84])

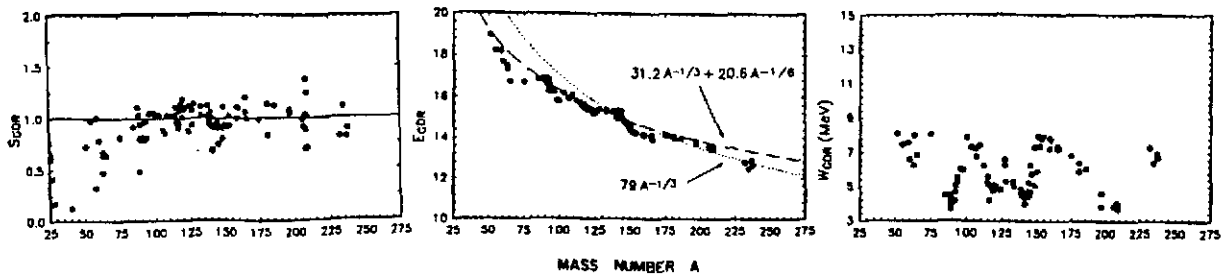


Figure 3 Properties of the GDR : Systematics for the excitation energy  $E_{\text{GDR}}$ , width  $\Gamma$  and fraction of the  $E_1$  energy sum rule strength of the GDR as a function of the nucleus mass  $A$ . ( see ref. [Ga92]).

### 2.1.1.3 Width

The observed width  $\Gamma_{\text{GDR}}$  of the resonance, varies from 4 to 8 MeV with the narrowest width found in magic nuclei (see Fig.3). As giant resonances are excited at energies above the particle emission threshold, their total width is, apart from the effects of the possible deformation, a sum of three terms the escape width  $\Gamma^{\downarrow}$ , the Landau damping  $\Delta\Gamma$ , and the spreading width  $\Gamma^{\uparrow}$ . The escape width  $\Gamma^{\downarrow}$  is due to the coupling of the 1p-1h state to the continuum which gives rise to the direct decay of a particle into hole states of the residual nucleus and can provide an experimental probe into the microscopic description of the giant resonances. It is the dominant contribution for light nuclei. The Landau damping  $\Delta\Gamma$  results from the fragmentation of the p-h strength due to shell structure effects and is also mainly apparent in light nuclei. The spreading width  $\Gamma^{\uparrow}$  arises from the coupling of the 1p-1h doorway states to nuclear compound states, eventually, leading to the emission of low energy particles. With increasing mass number, the decay proceeds mainly via mixing with more complicated states, so, for heavy nuclei, the total width is dominated by the spreading width.

### 2.1.1.4 Collectivity and excitation properties

The collectivity of the excitation which is related to the number of participating nucleons, can be measured by the fraction of the energy weighted sum rule (EWSR) exhausted. For example, the dipole strength integrated up to  $E_{\gamma}=30$  MeV can be expressed in terms of Thomas Reiche-Kuhn sum rule [Le50]:

$$m_1 = \frac{2\pi e^2 \hbar N Z}{m c} \frac{1}{A} \sim 60 \frac{N Z}{A} \text{ MeV} \cdot \text{mb} \quad , \quad (2.3)$$

where  $N$  and  $Z$  are the neutron and proton number of the nucleus respectively,  $A=N+Z$  and  $m$  is the nucleon mass. The fraction of the EWSR observed in the various nuclei is shown in figure 3.

### 2.1.2 Macroscopic description

The giant dipole resonance (GDR) is considered today as the prototype of giant resonances which are considered as highly collective nuclear excitations in which an appreciable fraction of the nucleons of a nucleus move together.



In such a context, it is appropriate to think about these modes of excitation in hydrodynamical terms as the oscillation of a liquid drop. To explain the observation of the GDR, different models were proposed. In the Steinwedel and Jensen model[St50], the total nucleus density is incompressible but the neutron and proton densities vary independently. In that case, the restoring force is proportional to the volume energy coefficient of the Bethe and Weizsacker formula. This model gives the energy of the vibration proportional to  $A^{-1/3}$ . In the Goldhaber and Teller model[Go48], the GDR is considered as an oscillation of a non-deformed neutron sphere against a proton one. In this case, the restoring force is proportional to the surface energy coefficient of the Bethe and Weizsacker formula and the excitation energy of the GDR vary as  $A^{-1/6}$ .

Let us discuss in a little bit more details these macroscopic models in order to introduce the basic concepts about collective vibrations.

### 2.1.2.1 The Goldhaber and Teller model[Go48]

In this model the protons and the neutrons are simply assumed to oscillate with opposite phases. Let us consider a system with equal number of protons and neutrons,  $N = Z = A/2$ . If we call  $z(t)$  the displacement of each protons and  $-z(t)$  the displacement of each neutrons (so that the center of mass is kept constant) in the  $\vec{u}_0$  direction we can easily compute the total kinetic energy

$$T = \sum_{\text{protons}} 1/2m_p \dot{z}^2 + \sum_{\text{neutrons}} 1/2m_n \dot{z}^2 = 1/2Am\dot{z}^2 \quad (2.4)$$

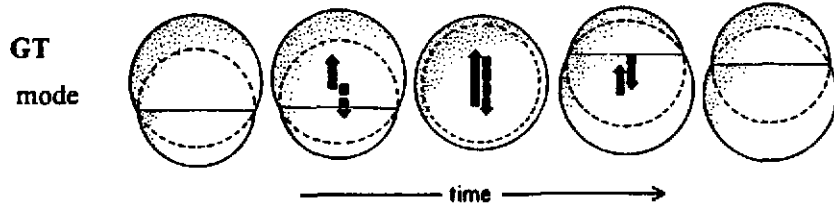


Figure 4 GDR vibration: Schematic picture of the GDR in the Goldhaber and Teller model [Go48].

In order to compute the variation of binding energy induced by the displacement  $z$  Goldhaber and Teller assumed that the potential energy depends upon the difference of the neutron and proton densities and that for symmetry reasons only the quadratic power of this difference appears in the symmetry energy

$$E_{sym} = \int d^3r \mathcal{V}_{sym} [\rho_p(r) - \rho_n(r)] \quad (2.5)$$

For example introducing the symmetry density

$$\rho_{sym} = \rho_p - \rho_n \quad (2.6)$$

the symmetry term of the binding energy may be approximated by the liquid-drop formulation

$$E_{sym} = \frac{1}{2} b_{sym} \int d^3r \frac{\rho_{sym}^2}{\rho_0} \quad (2.7)$$

where  $b_{sym}$  is a coefficient with an empirical value about 50 MeV.

Introducing the displaced densities and assuming that proton and neutron densities are equal the half of the matter density  $\rho^0$  we can write

$$\begin{aligned} \rho_p(\vec{r}) &= \rho_p^0(\vec{r} - z\vec{u}_0) = \frac{1}{2}\rho^0(\vec{r} - z\vec{u}_0) = \frac{1}{2}(\rho^0(\vec{r}) - z\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}\rho^0(\vec{r})) \\ \rho_n(\vec{r}) &= \rho_n^0(\vec{r} + z\vec{u}_0) = \frac{1}{2}\rho^0(\vec{r} + z\vec{u}_0) = \frac{1}{2}(\rho^0(\vec{r}) + z\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}\rho^0(\vec{r})) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Then the potential energy reads

$$E_{sym} = \frac{1}{2} z^2 \int d^3r (\nabla_{\vec{u}_0} \rho^0)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_{sym}}{\partial \rho^2} = \frac{b_{sym}}{\rho_0} z^2 \int d^3r (\nabla_{\vec{u}_0} \rho^0) \quad (2.9)$$

where the last equality comes from the liquid-drop approximation. If the density  $\rho^0$  is assumed to be spherically symmetric<sup>1</sup> we can chose  $\vec{u}_0$  on the  $z$  axis and we can use the fact that  $\partial\rho^0/\partial z = \partial\rho^0/\partial r \partial r/\partial z = \cos\theta \partial\rho^0/\partial r$  in order to write.

<sup>1</sup>From this model, it is clear that the restoring force depends upon the shape of the system, as we will discuss later.

$$E_{sym} = \frac{1}{2} z^2 \frac{4\pi}{3} \int r^2 dr \left( \frac{d\rho^0}{dr} \right)^2 \frac{\partial^2 V_{sym}}{\partial \rho^2} \quad (2.10)$$

Now we can write the total energy variation associated with the dipole motion as

$$\Delta E = T + E_{sym} = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} K z^2 \quad (2.11)$$

where the inertia parameter is nothing but the total mass of the system

$$M = Am \quad (2.12)$$

and the spring constant is given by

$$K = \int d^3r (\nabla_{\bar{u}_0} \rho^0)^2 \frac{\partial^2 V_{sym}}{\partial \rho^2} = \frac{b_{sym}}{\rho_0} \int d^3r (\nabla_{\bar{u}_0} \rho^0)^2 \quad (2.13)$$

From these equations it is clear that  $M$  is proportional to the total mass of the system while  $K$  is proportional to  $A^{2/3}$  because  $\nabla_{\bar{u}_0} \rho^0$  is picked at the surface. Equation 2.11 can be recognized as an harmonic oscillator Hamiltonian which is the collective Hamiltonian for the vibration.

### 2.1.2.2 Classical vibration

To get a deeper insight into the dynamics associated with the Hamiltonian 2.11 we can solve the classical equation of motion which simply reads

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -K z \quad (2.14)$$

The corresponding free motion is a harmonic oscillation of frequency

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.15)$$

Considering the mass dependence of the string constant and of the inertia parameter one gets

$$\omega(A) = \omega_0 A^{-1/6} \quad (2.16)$$

We have seen that this dependence is confirmed by the experimental results only in light nuclei. Therefore one needs other models to describe dipole vibrations in larger nuclei.

### 2.1.2.3 Steinwedel and Jensen model

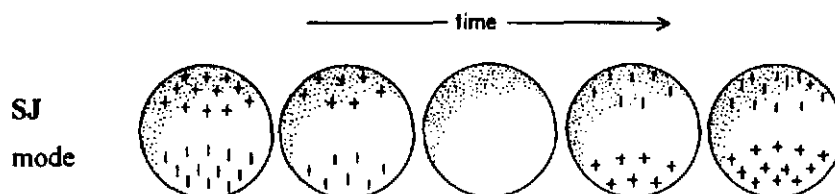


Figure 5 GDR vibration : Schematic picture of the GDR in the Steinwedel and Jensen model [St50].

From the above derivation it appears that the GDR frequency should be a function of  $A^{-1/6}$  while experimentally the frequency appears to be closer to  $A^{-1/3}$ . It appears that because of the strong force characteristics and in particular of the strong short range attraction between protons and neutrons it is energetically not favorable to introduce a displacement of the proton surface against the neutron one as it is assumed in the Goldhaber and Teller model. To overcome this difficulty Steinwedel and Jensen have proposed to introduce a displacement field (i.e. it is not as before a global displacement of the proton or the neutrons but a local one) which vanishes at the surface. This can be done by introducing the following displacement of protons

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = Q_{l,m}(t) \tau_Z \nabla (j_l(qr) Y_{l,m}(\hat{r})) \quad (2.17)$$

where  $\tau_z$  is the third component of isospin operator (-1 for protons +1 for neutrons) and where  $j_1$  is the spherical Bessel function<sup>2</sup>. Requiring that the motion at the surface is 0 means that the surface radius,  $R$ , should be associated with a zero of the derivative of the Bessel function. The first zero being around 2.46 this condition leads to

$$q = 2.46/R \quad (2.18)$$

In infinite medium the collective oscillations of protons against neutrons look like sound waves with a sound velocity almost independent of  $q$

$$c = \frac{\omega}{q} \quad (2.19)$$

so that we get for the frequency

$$\omega \propto \frac{1}{R} \propto A^{-1/3} \quad (2.20)$$

which exhibits the proper behavior as a function of  $A$ .

#### 2.1.2.4 Electromagnetic excitations

Let us now how this mode can be excited through electromagnetic excitations and in particular let discuss relativistic Coulomb excitations such as the  $^{136}\text{Xe}$  excitation during the reaction  $^{208}\text{Pb} + ^{136}\text{Xe}$  at  $E/A = 700$  MeV which has been studied in refs [Ri93, Sc93a]. In such relativistic reaction between heavy ions the strong transverse electric field

$$E_{\perp}(t) = -\frac{Z_p e \gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (2.21)$$

dominates. In eq. (2.21) it is assumed that the projectile of charge  $Z_p$  is travelling on a straight line trajectory defined by an impact parameter  $b$  and a constant velocity  $v$  [Ba88a].

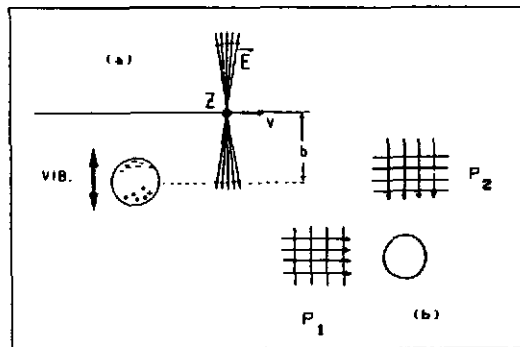


Figure 6 Schematic illustration of the electric field create by a relativistic heavy ion traveling on a straight line. This electric field may excite the giant dipole mode [Ba88a].

Therefore, the excitation of the transverse GDR degrees of freedom in a nucleus of mass  $A$ , charge  $Z$  and neutron number  $N$ , is simply due to the interaction of the protons with the constant electric field. Therefore, the interaction energy associated with the displacement  $z$  in the transverse direction simply reads

$$W(t) = Ze E_{\perp}(t) z = F_{ext}(t) z \quad (2.22)$$

Then this energy can be used in conjugation with the collective Hamiltonian in order to write the dynamical equations for the dipole moment in presence of an external field

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} - K z = F_{ext}(t) \quad (2.23)$$

where  $F_{ext}(t) = Ze E_{\perp}(t)$ . In order to understand the resonant shape of the dipole excitation we should add to this equation a term taking into account the damping of the GDR. This can be done by introducing a simple frictional force conventionally written  $F_{fric} = -M\gamma \dot{z}$ . Then the classical equations reads

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + M\gamma \frac{dz}{dt} - K z = F_{ext}(t) \quad (2.24)$$

<sup>2</sup>This can be justified assuming a potential flow  $\mathbf{u} = \nabla \chi$  where the displacement potential is assumed to be the dipole term of the multipole expansion of a plane wave with the momentum  $q$ .

This equation can be easily solved going to the Fourier representation and introducing the field frequency  $\omega_{ext}$

$$F_{ext}(t) = F_0 e^{-i\omega_{ext} t} \quad (2.25)$$

However, one should remember that Physical external forces are real so that only the real part of the expression we will derived are meaning full. With the above field the motion of the dipole reads

$$z(t) = \frac{1/M}{\omega^2 - \omega_{ext}^2 - i\gamma\omega_{ext}} F_0 e^{-i\omega_{ext} t} \equiv \Pi(\omega_{ext}) F_0 e^{-i\omega_{ext} t} \quad (2.26)$$

where the operator  $\Pi(\omega_{ext})$  gives the response of the system to an external field at the frequency  $\omega_{ext}$ . In order to compute the average rate of energy lost per unit time we should compute

$$P = \overline{\text{Re}(F_{ext}(t)) \text{Re}(\dot{z}(t))} \quad (2.27)$$

where the  $\overline{\dots}$  means the average over time. Because of the time averaging only the imaginary part of  $\Pi(\omega_{ext})$  contributes and one gets

$$P = \frac{F_0^2}{M} \frac{\gamma\omega_{ext}^2}{(\omega^2 - \omega_{ext}^2)^2 + \gamma^2\omega_{ext}^2} \quad (2.28)$$

which is nothing but the Lorentzian shape.

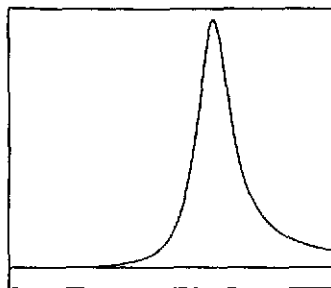


Figure 7 Lorentzian resonance profile.

Here we took as an example the Coulomb excitation but the same arguments hold for the photoabsorption and indeed this shape correctly describe the observed GDR data in heavy nuclei.

#### 2.1.2.5 Quantization of the motion

In order to built a quantum version of the vibration in absence of friction we can first introduce  $P = M\dot{Q}$  the momentum conjugated of the coordinate  $Q$  (in the simple models of the GDR above this collective coordinate was  $z$  the displacement on the  $z$  axis of the proton against neutrons). Then, the total Hamiltonian,

$$H = \frac{1}{2M} P^2 + \frac{K}{2} Q^2, \quad (2.29)$$

can now be quantized as a harmonic oscillator with the frequency:

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{K_\lambda}{M_\lambda}}. \quad (2.30)$$

To do so we consider  $P$  and  $Q$  as operators,  $\hat{P}$  and  $\hat{Q}$  and we introduce the creation and annihilation operators for the phonons,  $\hat{O}^\dagger$  and  $\hat{O}$ , defined by the relations :

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\omega}{2K}} (\hat{O}^\dagger + \hat{O}) \quad (2.31)$$

and

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{\omega M}{2}} (\hat{O}^\dagger - \hat{O}). \quad (2.32)$$

Therefore, the excitation spectrum can be simply built from a ground state  $|0\rangle$  by application of the creation operator

$$|GDR\rangle = \hat{O}^\dagger |0\rangle \quad (2.33)$$

### 2.1.2.6 Sum rules and Energy weighted Sum rule ( $m_1$ )

When we will consider excitations or perturbations of the system induced by any operator  $\hat{D}$  we will need matrix elements for the induced transitions  $\langle 0 | \hat{D} | GDR \rangle$ . To be more general, we will not only consider one collective state  $|GDR\rangle$  but several noted  $|i\rangle$ , which are supposed to form a complete basis together with the ground state. Then we can introduce various sum rules as

$$m_n = \sum_i (E_i - E_0)^n \left| \langle 0 | \hat{D} | i \rangle \right|^2 \quad (2.34)$$

which are nothing but the  $n^{\text{th}}$  moments of the transition probability distribution usually called strength function

$$S_{\hat{D}}(E) = \sum_i \delta(E - (E_i - E_0)) \left| \langle 0 | \hat{D} | i \rangle \right|^2 \quad (2.35)$$

Among all the possible moments  $m_1$  is very particular since the following relation holds

$$m_1 = \frac{1}{2} \langle 0 | [\hat{D}, [\hat{H}, \hat{D}]] | 0 \rangle \quad (2.36)$$

which is easily demonstrated introducing a closure relation  $1 = \sum_i |i\rangle \langle i| + |0\rangle \langle 0|$  in the expression of the double commutator and using the fact that the  $|i\rangle$  or the  $|0\rangle$  are eigen vectors of the Hamiltonian  $H$ :  $\hat{H} |i\rangle = E_i |i\rangle$ . The important property of the relation (2.36) is that the expectation value of the double commutator on the ground state can easily be compute.

For the dipole excitation operator associated with an electric field  $E$  in the  $z$  direction the operator is  $\hat{D} = Ee \sum_{nucl} \frac{z_{nucl} T_{nucl}}{2}$  where the fact that we are taking half the sum over protons and neutrons with opposite signs instead of just the sum over protons come from the fact that we have removed the center of mass motion (and we have assumed equal number of protons and neutrons). Then if the interaction does not depend upon the momenta of the particles, the double commutator reduces to a double commutator only with the kinetic part which leads to

$$[\hat{D}, [\hat{H}, \hat{D}]] = \sum_{nucl} \frac{1}{2m} \frac{E^2 e^2}{2} \quad (2.37)$$

and the sum rule is nothing but the TRK sum rule

$$m_1 = \frac{A E^2 e^2}{4 \cdot 2m} \quad (2.38)$$

(in the case  $N \neq Z$  the factor  $A/4$  should be simply replaced by  $NZ/A$ ).

### 2.1.2.7 Polarizability sum $m_{-1}$ and adiabatic approaches

Another sum rule plays an important role because it appears in the case a static field  $A$  is applied to the system. Indeed, then the system adjust it self (polarized) to this perturbation. In the first order perturbation theory the state of the system is

$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \sum_i \frac{\langle i | A | 0 \rangle}{(E_i - E_0)} |i\rangle \quad (2.39)$$

Therefore, if one measures the expectation value of  $A$ , also called polarizability, on the state  $|\Psi\rangle$  one gets always at the lowest order

$$\langle \Psi | A | \Psi \rangle - \langle 0 | A | 0 \rangle = \sum_i \frac{\langle i | A | 0 \rangle^2}{(E_i - E_0)} = m_{-1} \quad (2.40)$$

which is nothing but the Polarizability sum  $m_{-1}$ .

To apply this method to dipole mode one can polarize the system with an external constant electric field  $E$  and measure the induced dipole moment. To compute this moment we can simply minimize the energy of the system in presence of the external field  $E$ . Let us introduce the isovector density

$$\rho_{sym} = \rho_p - \rho_n \quad (2.41)$$

Then the energy associated with the external field is given by

$$E_{Coul} = \int d^3r V(r) \frac{e}{2} \rho_{sym} = \frac{e}{2} E \int d^3r z \rho_{sym} \quad (2.42)$$

since the potential associated with  $E$  along the  $z$  axis is  $V = zE$ . The symmetry term of the binding energy acts against the separation of protons and neutrons in nuclei. The corresponding energy variation is simply

$$E_{sym} = \frac{1}{2} b_{sym} \int d^3r \frac{\rho_{sym}^2}{\rho_0} \quad (2.43)$$

where  $b_{sym}$  is a coefficient with an empirical value about 50 MeV. Then the total energy reads

$$E_{tot} = \int d^3r \left( \frac{1}{2} b_{sym} \frac{1}{2} \frac{\rho_{sym}^2}{\rho_0} + \frac{e}{2} E z \rho_{sym} \right) \quad (2.44)$$

Introducing a small variation of the density  $\rho_{sym}$  we get a variation of the total energy

$$\delta E_{tot} = \int d^3r \delta \rho_{sym} \left( b_{sym} \frac{\rho_{sym}}{\rho_0} + \frac{e}{2} E z \right) \quad (2.45)$$

The density which minimize  $E_{tot}$  should fulfill this relation for any fluctuation  $\delta \rho_{sym}$ . Thus we get

$$\rho_{sym} = - \frac{e}{2 b_{sym}} E z \rho_0 \quad (2.46)$$

If we now measure the dipole moment  $D$  we should compute

$$D = \int d^3r \delta \rho_{sym} \frac{e}{2} z = \frac{e^2 E \rho_0 \langle r^2 \rangle}{12 b_{sym}} \quad (2.47)$$

So that the polarizability  $\alpha$  which is nothing but the induced dipole divided by the applied field reads:

$$\alpha = \frac{D}{E} = \frac{e^2 \rho_0 \langle r^2 \rangle}{12 b_{sym}} \quad (2.48)$$

### 2.1.2.8 GDR energy from sum rules approaches

If we use the relation between the polarizability and the  $m_{-1}$  sum rule in the case of a unique collective state we get

$$\alpha = m_{-1} = \frac{|\langle GDR | \hat{D} | 0 \rangle|^2}{E_{GDR}} \quad (2.49)$$

where  $A$  is the dipole operator  $A = e \sum_{nucl} \frac{z_{nucl} \tau_{nucl}}{2}$ . On the other hand the TRK sum rule was

$$m_1 = E_{GDR} |\langle GDR | \hat{D} | 0 \rangle|^2 \quad (2.50)$$

Therefore, the GDR energy can be simply obtained from the ration of  $m_{-1}$  and  $m_1$

$$E_{GDR} = \sqrt{\frac{m_1}{m_{-1}}} \quad (2.51)$$

Using the derived expressions for  $m_{-1}$  and  $m_1$  we get

$$E_{GDR}^2 = \frac{3 b_{sym}}{M \langle r^2 \rangle} \quad (2.52)$$

Amazingly this simple model leads to a predicted energy  $E_{GDR} \approx 93 \text{ MeV } A^{-1/3}$  which is very close from the actual experimental value.

### 2.1.2.9 GDR in deformed nuclei

Up to now we have always consider spherical nuclei. If we now study deformed nuclei it is easy to realize that the collective mass (or the TRK sum rule) is independent of the deformation but not the restoring force (or the polarizability sum rule). Indeed, for a deformed system one cannot replace  $\langle z^2 \rangle$  by  $\langle r^2 \rangle / 3$ . If we introduce a quadrupole deformation  $\epsilon$  (this deformation can also be noticed  $Q_2$ ).

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x(1 - \epsilon) \\ y &\rightarrow y(1 - \epsilon) \\ z &\rightarrow z(1 + 2\epsilon) \end{aligned} \quad (2.53)$$

we can see that the dipole vibration in the  $z$  direction scales like  $1/z$

$$E_{GDR_z} = E_{GDR}(1 + 2\epsilon) \quad (2.54)$$

The two other orthogonal modes have the frequency

$$E_{GDR_x} = E_{GDR_y} = E_{GDR}(1 - \epsilon) \quad (2.55)$$

These expressions are rather intuitive since the frequency of the oscillation is slower in the elongated direction. Therefore in prolate nuclei,  $\epsilon$  is positive therefore the GDR strength presents two components one at a lower energy with half the strength of the other at higher energy which contain the two contributions coming from vibration perpendicular to the symmetry axis.

### 2.1.3 Microscopic approaches

Microscopically, giant resonances are described as a coherent superposition of 1 particle - 1 hole (1p - 1h) excitations. In a schematic model, the residual particle-hole interaction gives rise to the formation of one strongly collective state which is a coherent superposition of all possible 1p - 1h transitions. Since the residual interaction is attractive for isoscalar and repulsive for isovector states, the corresponding collective states will be shifted up and down with respect to their unperturbed energy which is a multiple of the energy difference between two major shell,  $\hbar\omega \approx 41A^{-1/3}$  MeV. One obtains immediately the correct A dependence of the centroid energy. For example, the energy of the GDR which is built with  $1\hbar\omega$  particle-hole transition, is shifted up to its observed value of  $\sim 2\hbar\omega$  in intermediate and heavy nuclei ( $E_{GDR} \approx 80A^{-1/3}$  MeV). This is illustrated in figure 8

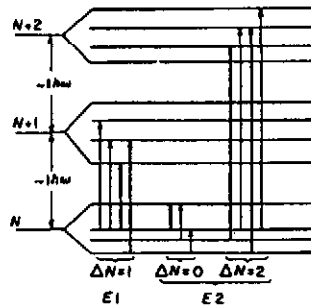


Figure 8 Schematic representation of E1 and E2 transitions between nuclear shell model states.

## 2.2 Other resonances

Within the same phenomenological liquid drop models with four different fluids protons/neutrons spin-up/spin-down, it is already clear that various other resonances should exist [Ra1877, Bo37, Me39, Bo39, St50, Bo75, Ch76, Ri81, Sp91]. In particular, the surface of the liquid drop can be deformed following different multiplicities giving rise to the so-called surface oscillations. Moreover, the isospin character of a transition with a given multipolarity  $L$  is shown to be isovector  $\Delta T = 1$  or isoscalar  $\Delta T = 0$ . Isoscalar transitions correspond to collective nuclear vibrations in which protons and neutrons vibrate in phase and isovector transitions correspond to their vibrations out of phase. In a similar way when all spin components move in phase the vibration is called electric while when spin-up and spin-down are oscillating with opposite phases the mode is called magnetic. With the multipolarity and the spin and isospin character of each mode, this generalization of the Goldhaber-Teller model [Go48] provides a straightforward classification of all collective resonances of different multiplicities

Let us give some specific examples. The electric monopole vibration is for instance interpreted as a compression of the whole nucleus. In the previous sections we have seen that the electric giant dipole is seen as a vibration of the proton fluid against the neutrons (see Fig. 9). An other example of such a surface vibration is given by the giant quadrupole resonance, which corresponds to quadrupole deformation of the nucleus shape (see Fig. 9).

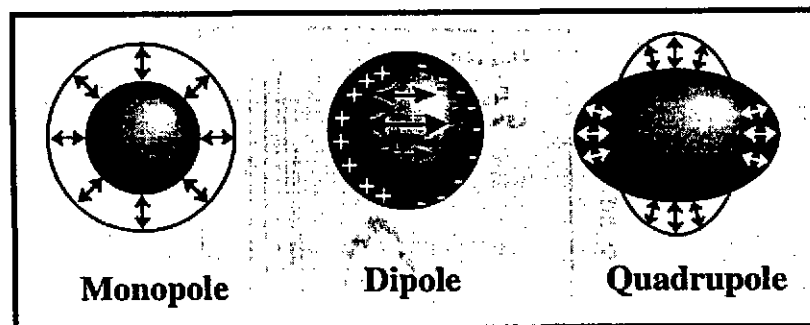


Figure 9 Schematic Representation of Various Giant Resonances : Few giant resonances are illustrated within the liquid drop model: left, the breathing mode, i.e. the isoscalar giant monopole resonance, the oscillation of protons against neutrons; middle, the isovector giant dipole resonance; right, a surface vibration, the isoscalar giant quadrupole resonance.

Microscopically, with the GDR we have seen that giant resonances are described as a coherent superposition of 1 particle - 1 hole (1p - 1h) excitations. Because of the odd-even spin alternation in the shell structure natural parity

(electric) transitions are odd or even multiple of the energy difference between two major shell,  $\hbar\omega \approx 41A^{-1/3}$  MeV. Moreover, considering the fact that in the harmonic oscillator limit an excitation operator with a radial dependence  $r^L$  can induce jumps between major shells distant of at maximum  $L \hbar\omega$  we get immediately the rule that collective state of spin  $L$  and parity  $(-1)^L$  should be located around energies  $E_L = L \hbar\omega, (L-2) \hbar\omega, \dots$ . Finally because of the opposite signs of the nuclear interaction in the isoscalar and isovector channels, the energy of isovector modes are expected to be higher than the simple rule expressed above while the energy of the isoscalar modes are lowered by the residual interaction. We already discussed the fact that the energy of the GDR which is built with  $1\hbar\omega$  particle-hole transition, is shifted up to its observed value of  $\sim 2\hbar\omega$  in intermediate and heavy nuclei ( $E_{GDR} \approx 80A^{-1/3}$  MeV). We will see that the giant electric quadrupole resonance (GQR) consists of an isoscalar component with a resonance energy  $E_{GQR}^{IS} \approx 65A^{-1/3}$  MeV and an isovector one with an energy  $E_{GQR}^{IV} \approx 130A^{-1/3}$  MeV.

In this section we will concentrate on the electric resonances which are already a very large subject of investigation. More information and in particular information about the magnetic resonances can be found in review articles [A96, Be81, Wo87, Sp91]

## 2.2.1 The giant quadrupole resonance

### 2.2.1.1 Observations

Only in 1972 was the isoscalar giant quadrupole resonance (GQR) observed for the first time. Today, the properties of the isoscalar GQR are well understood from a large number of different experiments using hadron and electron beams (see for example [Be76a, Wo87]). A schematic illustration of our understanding of this mode is presented in figure 10.

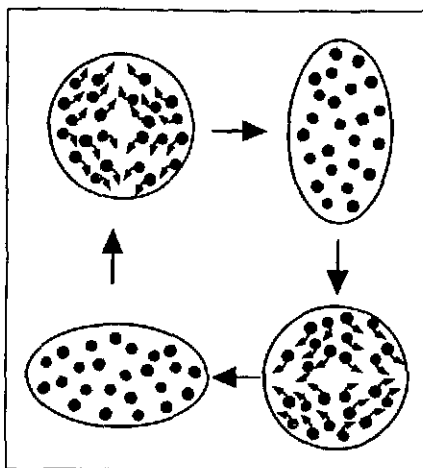


Figure 10 Schematic illustration of the quadrupole resonance in nuclei.

Two examples of experimental data presenting a GQR obtained either with electron scattering or with hadron interaction are shown on figure 11 and 12. In these data the various modes are identified using the fact that excitations of different multiplicities couple in different ways with the waves associated with the projectile. In quantum mechanics the perturbation of the incident projectile waves produces various diffraction patterns. Therefore, the angular distribution associated with excitations of modes of different multiplicities are different. Moreover, depending upon their properties, different modes can be excited with different interactions with different spacial properties. This is for example the case for the isovector electric modes (e.g. the GDR) which are excited by the long range Coulomb excitation while the isoscalar electric modes are also excited by the short range nuclear interaction. Then, the partial waves of the incident projectile participating in the excitation process are different leading to different diffraction pattern. This is illustrated in figure 13 for an heavy ion reaction.

Figure 14 shows an example experimental results on giant resonances obtained using the heavy ion beams of the GANIL facility together with the high resolution magnetic spectrometer SPEG. The observed peak in the 10-15 MeV region is identified as the excitation of giant resonances in the target [Su89]. The angular distribution of the peak shows that it is composed of several multiplicities essentially  $L=1$  et  $L=2$  [Su89, Su90]. Conversely to the results shown in figure 12 the decomposition in different components was not performed assuming a particular shape for the resonance but by a direct fit of the various energy bin of the inelastic spectra. The extracted cross section for the coulomb excitation of giant dipole resonance (GDR) is in perfect agreement with the photoabsorption data. It should be noticed that because of the time dependence of the Coulomb field the Lorentzian shape should be weighted by a Fourier transform of the force acting on the nuclear dipole. Because of the finite interaction time this Fourier spectrum happen to be strongly decreasing with  $E$ . Therefore, in heavy ion reaction at low incident energy, the Lorentzian shape of the GDR appears to be strongly deformed as shown in figure 15 Moreover, the heavy ion reaction results are showing



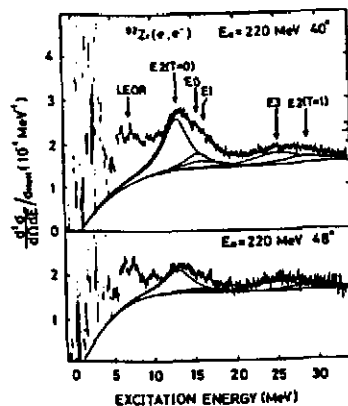


Figure 11 Spectra of inelastically scattered electrons on a Zr target. The lines show the various components of different multipolarities. It should be notice that the various components can be distinguished throught their angular distribution.

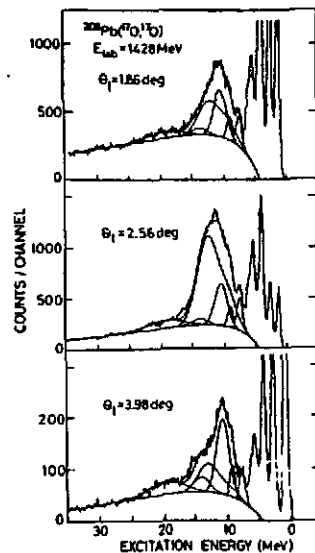


Figure 12 Inelastic spectra from the  $^{17}\text{O}$  scattering on a Pb target : The lines corresponds to the various components identified in the analysis of the angular distributions. from ref. [Ba88c].

Another important feature of the heavy ion data is that they present a very strong nuclear excitation of the giant quadrupole resonance (GQR) with a very high peak to background ratio. This is an important characteristic as far as the feasibility of decay studies is concerned. The decay properties of the giant resonances studied using heavy ion probes present very small systematic error due to various contaminations.

The various data reported in Fig.16 coming from proton,  $\alpha$  or electron inelastic scattering experiments show that the results obtained using different probes are in good agreement with each other.

For nuclei with  $A > 40$ , 50-100% of the  $E_2$  EWSR has been localized in a peak at about  $65A^{-1/3}$  MeV. Its width varies from 6 to 2.5 MeV for nuclei from Ca to Pb. For lighter nuclei, the isoscalar GQR is highly fragmented.

### 2.2.1.2 Microscopic description: a simple diabatic scaling model and its connection with the hydrodynamical picture.

To get a deeper insight into the structure of giant resonances and to be able to make predictions about their properties, one clearly needs a description of these collective states in terms of the underlying fermionic degrees of freedom. At the leading order the description of giant resonances is based on the mean-field approach which can be justify a good starting point because the frequency of the vibration is so high that the nucleons have no time to undergo a collision during one oscillation.

let us first present a simple example of the diabatic motion of a Fermi gas in a deformed container.

We will first recall the intimate connection between hydrodynamics and the Schrödinger equation, showing how the phase of the wave function can be interpreted as a velocity field and its module as a density. These concepts will be helpful to the understanding of approaches such as adiabatic time dependent Hartree-Fock approximation.

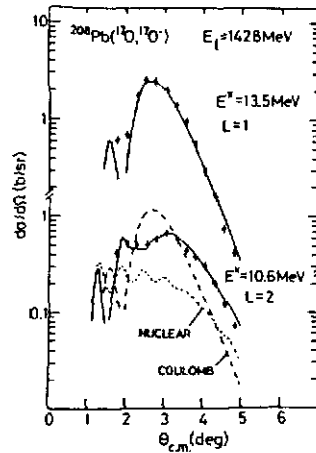


Figure 13 Inelastic angular distribution from the  $^{17}\text{O}$  scattering on a Pb target. The dots are the experimental data for the GDR and GQR. The lines correspond to the theoretical angular distribution which are only due to the Coulomb interaction for the GDR. In the GQR case the Coulomb and the nuclear interaction can interfere. The observed differences between the expected angular distribution are used in ref. [Ba88c] to disentangle the various contributions associated with these two modes in the inelastic data.

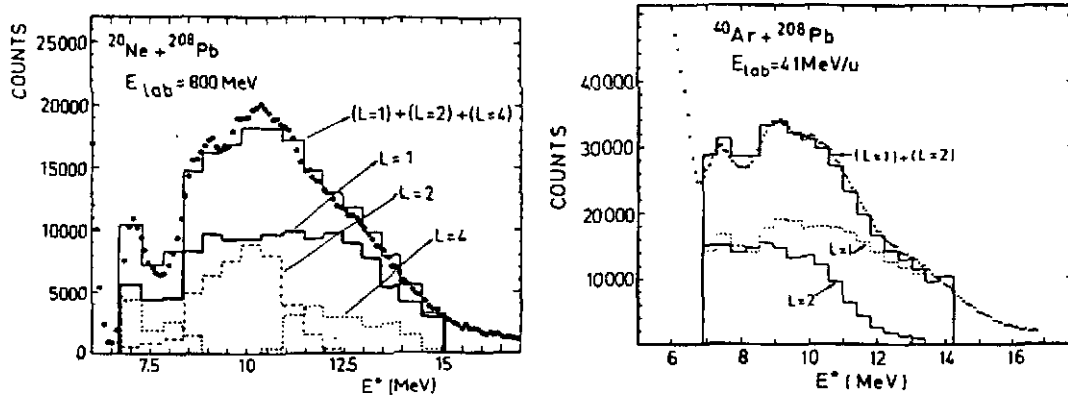


Figure 14 The inelastic Spectra measured for the reactions  $^{20}\text{Ne} + ^{208}\text{Pb}$  and  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$  at 40 MeV per nucleon can be decomposed in components of various multiplicities taking advantage of their different multiplicities.

Introducing the motion of collective variables through a simple scaling of the nuclear shape, we will show how the variational formulation of quantum mechanics reduces to the classical action of an oscillator. This simple model illustrates how a quantum many-body system can exhibit collective vibrations.

**2.2.1.2.1 Equivalence between Quantum Evolution and Hydrodynamics** First, let us make clear the connection between the independent particle picture and the liquid drop model. The Schrödinger equation for a single particle

$$i \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = W \varphi(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.56)$$

can be viewed as equivalent to the Euler equation for irrotational fluids. Indeed, if we separate the wave function into a modulus and a phase:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \equiv \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{-i\chi(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.57)$$

it is easy to verify that the quantum current  $\mathbf{j} \equiv \Im m (\varphi^* \nabla \varphi)$  satisfies the relation:

$$\mathbf{j} = \rho \nabla \chi. \quad (2.58)$$

This relation allows to define an irrotational flow  $\mathbf{v} \equiv \nabla \chi$ .

The equivalence between quantum evolution and hydrodynamics can be easily demonstrated directly from the variational formulation of quantum mechanics. Indeed the wave function  $|\varphi(t)\rangle$  solution of the Schrödinger equation (2.56) can be seen as a stationary solution of the action (see appendix A)

$$I[\phi, \phi^*] = \int_{t_0}^{t_1} L(\phi(t), \phi^*(t)) dt, \quad (2.59)$$

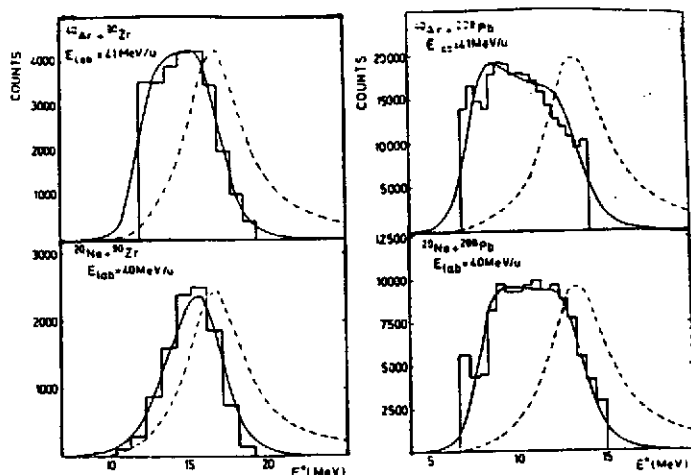


Figure 15 The GDR cross section in various heavy ion reactions (histogram). The dashed lines correspond to the expected photoabsorption spectra while the solid lines corresponds to the Coulomb excitation probability taking into account the energy dependence of the Coulomb field.

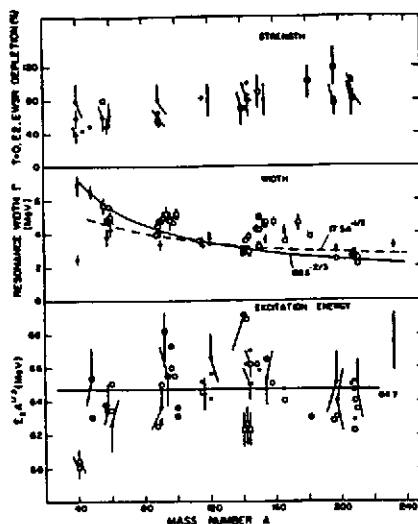


Figure 16 Properties of the GQR : Systematics for the excitation energy  $E_x$ , width  $\Gamma$  and fraction of the  $E_2$  energy weighted sum rule strength of the isoscalar giant quadrupole resonance presented as a function of the nucleus mass (see ref. [Be80]).

where the Lagrangian functional is defined as

$$L(\phi(t), \phi^*(t)) = \langle \phi(t) | i \frac{\partial}{\partial t} - W | \phi(t) \rangle \quad (2.60)$$

and where  $W$  is nothing but the one-body Hamiltonian:  $W = p^2/2m + U$ . If we use  $\rho$  and  $\chi$  as variational quantities we get:

$$I[\rho, \chi] = \int dt d\tau \left( \rho \dot{\chi} - \frac{1}{2m} \left( \rho |\nabla \chi|^2 - \frac{|\nabla \rho|^2}{4\rho} \right) + \rho U \right) \quad (2.61)$$

The condition of a stationary action in the  $\chi$  direction leads to the dynamical equations for  $\rho$  which are identical to the continuity equation

$$\dot{\rho} + \frac{1}{m} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad , \quad (2.62)$$

where  $\mathbf{j}$  is the quantum current  $\mathbf{j} = \rho \nabla \chi$ . This relation suggests that  $\mathbf{v} \equiv \nabla \chi$  can be interpreted as an irrotational flow and indeed the stationarity condition for variations of  $\rho$  implies that the velocity field  $\chi$  evolves according to an Euler-like equation:

$$\dot{\chi} - \frac{1}{2m} \left( |\nabla \chi|^2 - \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) + U = 0 \quad . \quad (2.63)$$

In conclusion the quantum evolution of a single particle can be equivalent to an irrotational motion in a potential field containing quantum corrections associated with the spacial variation of  $\rho$ :  $U' = U + \frac{1}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ .

**2.2.1.2.2 A Simple Model: the Diabatic Mean-Field approximation** It is interesting to apply and illustrate the previous concept using a simple quadrupole scaling of the whole density assuming the time dependent transformation of the coordinates

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x(1+Q) \\ y &\rightarrow y(1+Q) \\ z &\rightarrow z(1-2Q) \end{aligned} \quad (2.64)$$

When  $Q$  is time dependent this implies that in each point the matter moves with the velocity

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \dot{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

which simply derived from the velocity field

$$\chi = \dot{Q} (x^2 + y^2 - 2z^2) / 2 \quad (2.66)$$

To implement this scheme in quantum mechanics, we can introduce the deformed (but static) single-particle wave functions  $\varphi^{(0)}(n, Q, \mathbf{r})$  associated with different quantum numbers ( $n$ ) through the relation

$$\varphi^{(0)}(n, Q, x, y, z) = \varphi^{(0)}(n, 0, x(1-Q), y(1-Q), (1+2Q)z) \quad (2.67)$$

where we have assumed that  $Q$  is small. We will create a collective motion by multiplying all the wave functions by an overall phase representing a collective velocity field  $\chi(t)$  so that the time dependent single particle wave function reads

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e^{i\chi(\mathbf{r}, t)} \varphi^{(0)}(n, Q, \mathbf{r}) \quad (2.68)$$

Then we can introduce the one-body density associated with the Slater determinant of  $A$  nucleons:  $\rho(\mathbf{r}) = \sum_{n \text{ occ}} |\varphi(n, \mathbf{r})|^2$ . The occupation numbers are supposed to be "frozen" during the motion, i.e. kept fixed at the ground state,  $Q = 0$  (diabatic approximation). With the definition of the scaling of the box size we get a static one body density (for small  $Q$ )

$$\rho^{(0)}(Q, \mathbf{r}) = \rho^{(0)}(0, x(1-Q), y(1-Q), (1+2Q)z) \quad (2.69)$$

$$\rho^{(0)}(Q, \mathbf{r}) = \rho^{(0)}(0, \mathbf{r}) - Q \left( x \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial x} + y \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial y} - 2z \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} \right) \quad (2.70)$$

while the time dependent one-body density reads

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^{i\chi(\mathbf{r}, t)} \rho^{(0)}(Q(t), \mathbf{r}) e^{-i\chi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.71)$$

It is easy to see that indeed the potential  $\chi$  defined in (2.66) corresponds to the minimization of the action (2.59) or (2.61)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n \text{ occ}} L_n(\varphi_n, \varphi_n^*) dt \quad (2.72)$$

which in the studied case reads<sup>3</sup>

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \int d\mathbf{r} \left( \rho \dot{\chi} - \frac{1}{2m} \rho |\nabla \chi|^2 \right) - \sum_{n \text{ occ}} \langle \phi_n^{(0)}(Q) | W | \phi_n^{(0)}(Q) \rangle \right) \quad (2.73)$$

Indeed, the induced current verify the continuity relation  $\dot{\rho} + \frac{1}{m} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  (2.62).

Then the quantum action, 2.73, can be simply expressed as a functional of  $Q$ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -V(Q) + \frac{1}{2} M \dot{Q}^2 \right), \quad (2.74)$$

where

$$M = 2mA \langle r^2 \rangle \quad (2.75)$$

is the irrotational mass equivalent to that found in the liquid drop model (3.6) and where  $V(Q)$  is the diabatic potential:

$$V(Q) = \sum_{n \text{ occ}} \langle \phi_n^{(0)}(Q) | W | \phi_n^{(0)}(Q) \rangle \quad (2.76)$$

Therefore, one can define a classical Lagrangian,  $L(Q, \dot{Q}) = M\dot{Q}^2/2 - V(Q)$ , and a classical Hamiltonian:

$$H(Q, P) = P^2/2M + V(Q), \quad (2.77)$$

<sup>3</sup>The difference with the previous case is that the phase  $e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}$  represents only the phase variation and not the total phase.

where the conjugate momentum  $P \equiv \partial L / \partial \dot{Q} = M\dot{Q}$ . These two terms have a simple interpretation; the first one is the additional kinetic energy due to the collective motion which can be simply obtained by integrating the local kinetic energy  $1/2m\rho^{(0)}v^2$  over the space

$$T = \frac{1}{2}M\dot{Q}^2 = \frac{1}{2}\int dr m\rho^{(0)}v^2 = \frac{1}{2}\dot{Q}^2\int dr 2m\rho^{(0)}r^2 = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 2mA \langle r^2 \rangle \quad (2.78)$$

while the second one is nothing but the total energy associated with the static but deformed Slater state  $\Psi(Q)$  built from the  $\phi_n^{(0)}(Q)$

$$V(Q) = \langle \Psi(Q) | W | \Psi(Q) \rangle \quad (2.79)$$

It is important to notice that this energy contains both potential and kinetic terms. This kinetic contribution to  $V(Q)$  would not be present in a hydrodynamics approach (since in such a case the matter is supposed to be at the local equilibrium). We will illustrate this point by computing the variation of kinetic energy of a Fermi gas in a deformed box in the next section.

It is easy to demonstrate that the reduction of quantum mechanics to a classical picture is related to the fact that we are studying the time evolution of wave packet. Indeed, the evolution of the parameters of the wave packet is equivalent to the evolution of the mean-value of some observable  $\langle A \rangle$  which is governed by the classical equation  $id \langle A \rangle / dt = \langle [A, W] \rangle$ . Therefore, to obtain the excitation spectrum of the system the classical Hamiltonian (2.77) needs to be requantified.

**2.2.1.2.3 Scaling of a Fermi gas in a cubic box** Let us consider a Fermi gas in a deformed cubic box of size,

$$L_x = L_y = (1+Q)L^{(0)} \quad (2.80)$$

$$L_z = L^{(0)} / (1+Q)^2, \quad (2.81)$$

which correspond to the scaling 2.64. In the Fermi gas approximation  $V(Q)$  is due only to the deformation of the Fermi sphere (see Fig. 17), and can be expanded as

$$V(Q) = E_F A \frac{3}{5} \left( 1 + 4(Q^2 - \frac{Q^3}{3} + \frac{11}{12}Q^4 + \dots) \right), \quad (2.82)$$

where  $E_F$  is the Fermi energy.

At the lowest order in  $Q$  the potential (2.82) is equivalent to a harmonic oscillator potential:

$$V(Q) = V^{(0)} + \frac{1}{2}KQ^2, \quad (2.83)$$

where the restoring parameter  $K$  is defined as

$$K = \frac{24}{5}E_F A. \quad (2.84)$$

One recognizes in the expression of the action  $I$  (2.74), the classical action of a vibrator. Conserving only the leading term in  $Q$  we get a harmonic vibrational spectrum of frequency

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{K}{M}} \approx 65A^{-1/3} \text{ MeV}, \quad (2.85)$$

where we have used the mean square radius of a uniform sphere:  $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5}r_0^2 A^{2/3}$ .

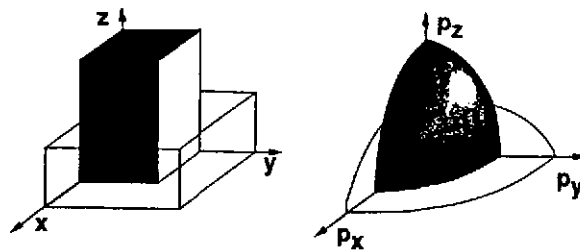


Figure 17 Schematic representation of the quadrupole deformation of a Fermi gas both in  $r$  and  $p$ -space.

The presented derivation may also yield an estimate of the anharmonicities as can be seen from expression (2.82). In this case, anharmonicities are limited due to the small zero point motion:

$$Q_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{M\omega}} \approx 0.36A^{-2/3}, \quad (2.86)$$

so that the potential

$$V(Q) = \frac{\omega}{2} \frac{Q^2}{Q_0^2} \left( 1 - \frac{Q_0}{3} \frac{Q}{Q_0} + \frac{11Q_0}{12} \frac{Q^2}{Q_0^2} + \dots \right) \quad (2.87)$$

$$V(Q) \approx \frac{\omega}{2} \frac{Q^2}{Q_0^2} \left( 1 - 0.12A^{-2/3} \frac{Q}{Q_0} + 0.33A^{-4/3} \frac{Q^2}{Q_0^2} + \dots \right) \quad (2.88)$$

contains only small anharmonic corrections if one considers a large number of nucleons.

In summary, we have shown how a collective deformation of the nucleus follows the equation of motion of a classical oscillator. The above derivation illustrates the extreme importance of the deformation in phase space (adiabatic motion) and the fact that a giant vibration cannot be described by an equilibrated evolution as in the hydrodynamical picture. Finally, it may give some hint about the importance of the anharmonicities which appears to be small.

## 2.2.2 The giant monopole resonance

### 2.2.2.1 Systematic study

The existence of the electric isoscalar giant monopole resonance (GMR) in medium and heavy nuclei was first established in 1977[Ma76, Ha77, Yo77]. The giant monopole resonance GMR is the  $L=0$  mode and is the only volume oscillation (see fig 18) which has been isolated.

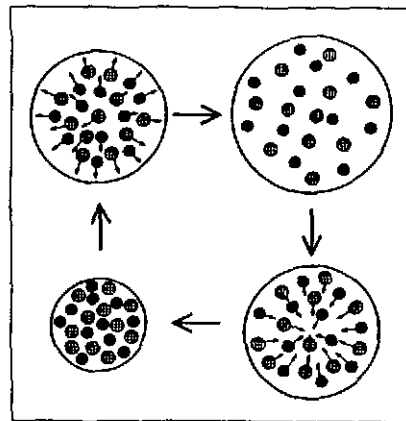


Figure 18 Schematic illustration of the monopole resonance in nuclei.

The frequency of this breathing mode is directly related to the compressibility of the nucleus and the determination of its energy is the most direct way to access to the compressibility modulus of nuclear matter. Indeed, this modulus is simply proportional to the variation of energy density  $\varepsilon = E/A$  when the bulk of the nuclear matter is compressed

$$K = 9\rho_0 \frac{d^2\varepsilon}{d\rho_0^2} \quad (2.89)$$

which as the dimension of an energy therefore when a nucleus is compressed the variation of potential energy is directly related to the compressibility modulus. However, nuclei do not resemble to symmetric nuclear matter because of their important surface, of their charge and of the possible neutron-proton asymmetry. This point will be discussed later on when we will have different models at our disposal.

A large amount of data has been obtained from  $(\alpha, \alpha')$  and  $({}^3\text{He}, {}^3\text{He}')$  reactions[Wo87, Bu84]. The study of the GMR located at nearly  $80A^{-1/3}$  MeV which is mixed with other resonances such as the GDR and the ISGQR, required particularly selective measurements. In particular, the contribution of the GDR is strongly inhibited in inelastic scattering of weakly-charged isoscalar projectiles such as  $\alpha$  particles. Furthermore, as the GMR is strongly excited in forward angle scattering,  $0^\circ$  measurements allow to disentangle the GMR from the other contributions (see Fig.19). Coincidence experiments have complemented successfully our knowledge of this resonance[Br83, Wo87]

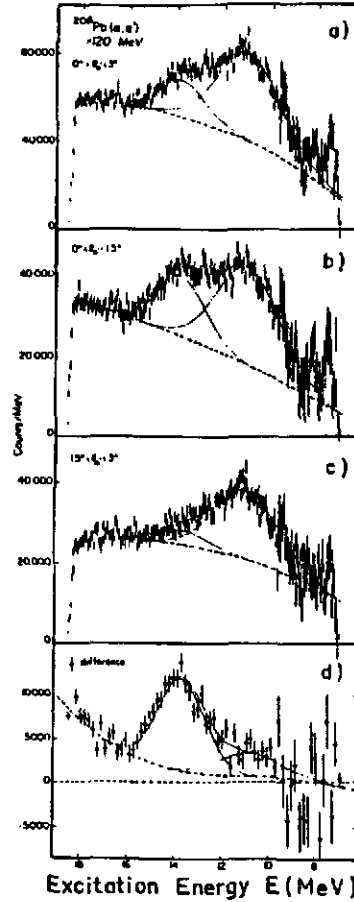


Figure 19 Excitation of the GMR and GQR : Inclusive  $\alpha$  spectra for  $^{208}\text{Pb}$  at  $E_\alpha = 120$  MeV for three different angular range (a,b,c), d) Difference between b and c (for more details see refs. [Br83,Wo87] ). Since the GMR cross-section is peaked at  $0^\circ$  while the GQR has a rather flat angular distribution, the difference spectrum d) contains mainly the GMR excitations whereas the large angle spectrum c) is dominated by the GQR.

### 2.2.2.2 A simple scaling model of the GMR

Let us assume that the collective motion corresponds to a global self-similar motion of the nucleus associated with the scaling of the radii:

$$r \rightarrow (1 + Q_0)r \quad (2.90)$$

then the associated local velocity is nothing but a radial flow:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\dot{Q}_0 \quad (2.91)$$

With the definition of the scaling (2.90) the static density reads

$$\rho^{(0)}(Q_0, r) = \frac{1}{(1 + Q_0)^3} \rho^{(0)}\left(0, \frac{r}{(1 + Q_0)}\right) = \rho^{(0)}(0, r) - Q_0 \left( r \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial r} + 3\rho^{(0)} \right) \quad (2.92)$$

where the last equation is obtained retaining only the lowest order in  $Q_0$ . Therefore, the density variation takes the form

$$\delta\rho^{(0)} = -Q_0 \left( r \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial r} + 3\rho^{(0)} \right) \quad (2.93)$$

which corresponds to the famous Tassie transition density. Using the velocity field (2.91), it is easy to get the kinetic energy variation

$$T = \frac{1}{2} \int d^3r m \rho^{(0)} v^2 = \frac{1}{2} \dot{Q}_0^2 \int d^3r m \rho^{(0)} r^2 = \frac{1}{2} \dot{Q}_0^2 m A \langle r^2 \rangle = \frac{1}{2} M \dot{Q}_0^2 \quad (2.94)$$

defining the mass parameter associated with the monopole vibration

$$M = mA \langle r^2 \rangle \quad (2.95)$$

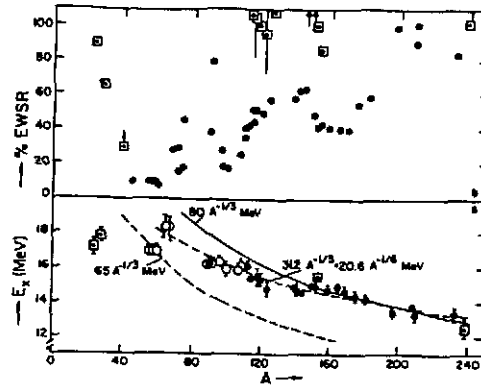


Figure 20 Properties of the GMR : a) the centroid energy as a function of the mass  $A$  and b) the fraction of the observed monopolar sum rule. The dashed curve indicated by  $(31.2A^{-1/3} + 20.6A^{-1/6})$  in a) is the GDR energy in order to show that the GDR and the GMR are almost always degenerated. The second dashed line correspond to the GQR energy.

The potential energy can be obtained from the density variation (2.93) as soon as we know the potential energy as a function of the density. If we consider only the volume part of the nucleus, we can use an expansion of the energy around the saturation density

$$\varepsilon(\rho^{(0)}(Q_0)) = \varepsilon(\rho^{(0)}(0)) + \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon}{d\rho_0^2} (\delta\rho^{(0)}(Q_0))^2 \quad (2.96)$$

Integrated over the nucleus the energy variation reads leads to the collective potential energy

$$V(Q_0) = \int dr \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon}{d\rho_0^2} (\delta\rho^{(0)}(Q_0))^2 = \frac{1}{2} Q_0^2 \int dr K \rho^{(0)} = \frac{1}{2} Q_0^2 AK \quad (2.97)$$

Then the total energy variation

$$E = T + V = \frac{1}{2} Q_0^2 mA \langle r^2 \rangle + \frac{1}{2} Q_0^2 AK \quad (2.98)$$

look like an harmonic oscillator Hamiltonian associated with the frequency

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m \langle r^2 \rangle}} \quad (2.99)$$

This frequency has a  $A^{-1/3}$  dependence which is close to the experimental data. However, a direct application of this equation to the observed monopolar vibration in  $Pb$  would lead to an estimation of the compressibility around  $K = 140$  MeV.

### 2.2.2.3 Discussion of the Link of the GMR frequency with the nuclear compressibility

From the above simple breathing mode model the link between the GMR frequency and the parameters of the nuclear Equation of States (EOS) is clear. However, as we will see in the chapter devoted to results from microscopic calculations this model is by far too simple and neglect many physical effects such as the surface, coulomb potential, nuclear asymmetry effects, ... Therefore the first idea is to replace in the relation (2.99) the infinite nuclear matter compressibility by a compressibility of a finite nucleus,  $K_A$ . Then one may think to mimic the liquid drop expansion of the binding energy by introducing volume ( $K_{Vol}$ ), surface ( $K_{Surf}$ ), symmetry ( $K_{Sym}$ ) and Coulomb ( $K_{Coul}$ ) contributions to this finite system compressibility ( $K_A$ )

$$K_A = K_{Vol} + K_{Surf} A^{-1/3} + K_{Sym} \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 + K_{Coul} \frac{Z^2}{A^{4/3}} + \dots \quad (2.100)$$

In the scaling model of a finite nucleus the volume term,  $K_{Vol}$ , would simply be identified with the infinite medium compressibility  $K$  [B180, B195]. Then  $K_A$  should be extracted from a fit of the available data about the GMR.

Here, we touch the second problem because the simple models are predicting a single resonance frequency while a whole distribution is experimentally observed. Therefore, the single GMR energy which should enter in the fit of the various  $K$  should be understood as a well defined average. It can be shown that the mean energy  $\sqrt{m_3/m_1}$  where  $m_n$  are the  $n$  moment of the observed distribution, must be used in order to be able to extrapolate from the compressibility



of the finite nuclei to the compressibility of the nuclear matter. One possibility widely used in the literature is to consider the position ( $E_0$ ) and the width  $\Gamma$  of the GMR bump and to use the relation

$$\frac{K_A}{m \langle r^2 \rangle} = E_0^2 + 3 \left( \frac{\Gamma}{2.35} \right)^2 \quad (2.101)$$

or even more sophisticated expression [My95, Na95, Sh93].

The first problem of the above method is that the  $A$  dependence of  $K_A$  appears to be rather weak making difficult and ambiguous the fit procedure [A196] and in fact rather good fits of the available data can be obtained with a  $K_{Vol}$  varying from 100 to 400 MeV. Moreover, the extraction of a single number  $K_A$  from the observed strength distribution can be ambiguous especially when only a part of the EWSR has been observed. Finally it is discussed in ref. [Ch95a] that even the experimental procedure to extract the GMR strength assumes that the transition density has the Tassie form. Figure 21 presents the RPA (solid line) and Tassie (dashed line) transition densities for two strongly excited states of the  $^{60}\text{Ni}$ . The normalization factor of Tassie density has been adjusted to match the actual RPA response to the excitation operator  $r^2$ . One can notice that, whereas some states are perfectly described by the macroscopic picture other states cannot be reduced to the simple scaling approximation.

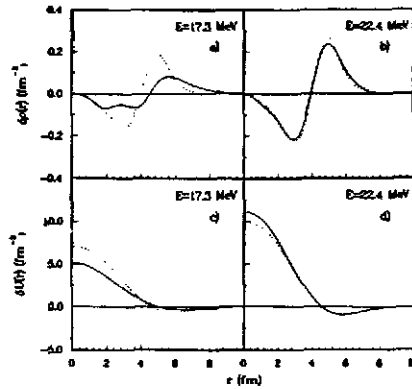


Figure 21 Transition densities (part a and b) and form factors (part c and d) for two monopole states in  $^{60}\text{Ni}$ . The solid lines represent the Tassie parametrization normalized to reproduce the rpa response whereas the dashed lines are obtained from the RPA wave functions.

The figure 22 presents a comparison of the RPA monopole strength functions (hashed histograms) :

$$S(E) = \sum_n \delta(E - \omega_n) | \langle 0 | O | n \rangle |^2, \quad (2.102)$$

with the result of our pseudo-experiment (black histogram in the up-side-down position). The analysis was performed on four different set of pseudo data corresponding to the reactions:  $\alpha$  (140 MeV) +  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{60}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  and  $^{208}\text{Pb}$ .

The shapes of these two strength distributions look quite similar especially for the lightest nuclei. However, the experimental analysis overestimates the total strength by some ten to thirty percents. This demonstrates that measuring 100% of a given sum rule do not insure that the whole strength distribution have been observed.

This error on the extracted sum rules can strongly affected the calculation of the compressibility of nuclear matter. It was concluded in ref. [Ch95a] that whereas for the light nuclei (Ca and Ni) the analysis does not induce any sizable bias for the heavy nuclei (Zr and Pb) the difference lies between 300 and 500 KeV making the compressibility smaller and therefore the equation of state softer. This may induce a systematic over estimation of  $K$  by at most 10%.

To overcome these difficulties one should directly compare the experimental inelastic spectra with predictions of for example a distorted wave Born approximation (DWBA) using the strength and the form factors coming from a microscopic description of the GMR (c.f. the RPA) as discussed in ref.[Ch95a]. This analysis was only partially performed in ref. [Bl95]. Indeed, Blaizot et al. have used microscopic approaches to relate the nuclear compressibility of different effective forces to determine the position of GMR in various nuclei. Figure 23 shows their comparison of the experimental GMR position and of the predicted value (C.f. also [A196] for a review of these points). Taking into account all the available results they get

$$207 < K < 225 \text{ MeV} \quad (2.103)$$

However, this analysis does not take into account the points raised in ref. [Ch95a] concerning the possible systematic errors in the extraction of the monopole strength due to the use of the Tassie form factors in the experimental analysis.

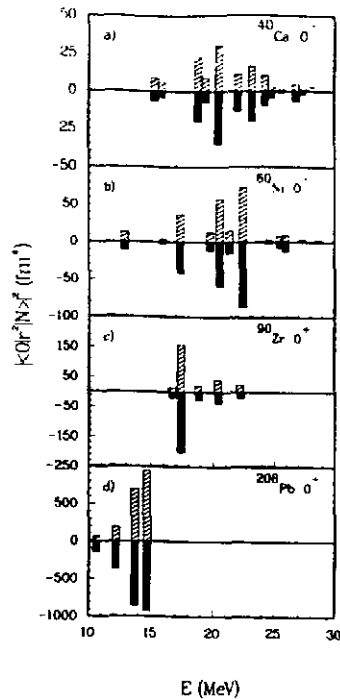


Figure 22 Monopole strength distributions in  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{60}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  and  $^{208}\text{Pb}$  nuclei in the giant resonance region: the upper part of each figure is the RPA prediction while the lower (up-side-down) part is the strength as extracted from the pseudo-inelastic cross sections.

### 2.2.3 Other electric resonances

The isovector monopole resonance has been observed mainly via  $(\pi^-, \pi^0)$  reactions which are well-adapted to excite isovector giant resonances, but their identification in  $(\pi^+, \pi^0)$  reaction remains much more difficult. Data are available now on several nuclei [Ba83, Bo84] (see Fig. 24). Complementary studies are now in progress using heavy-ion charge exchange reactions. For the isovector giant quadrupole experimental evidence is still very scarce.

A reliable and systematic extraction of the characteristics of giant resonances of high multipolarity turns out to be difficult for many reasons. As these resonances are expected to be at higher excitation energy and with a large width which increases with excitation energy, their localization may become somewhat speculative. Furthermore, recent RPA calculations [Lh93] have shown that the strength of high multipolarity giant resonances is spread out and that the amount of collective strength clearly decreases for increasing multiplicities.

## 2.3 Physical interpretation of angular distribution: diffraction effects.

It is important to understand one of the basic tools to study giant resonances which is the angular distribution. Indeed, in nuclear physics because of the small dimensions of the considered systems the scattering processes have a strong quantal nature. In fact inelastic scatterings are dominated by the wave dynamics. Moreover, because of the short range of the nuclear interaction and because of its strength inelastic interaction are confined in a small region around the surface: Too far there is no interaction, too close the interactions are so violent that the inelastic processes are destroyed. Therefore, the inelastic scattering look like a surface diffraction effect. Figure 25 shows how an incident wave interact with the motion of the induced vibration.

In fact depending upon the local collective motion the different wavelets associated with the incident projectile are phase shifted. Now depending upon the collective motion these phase shifts will be different leading to different interference (diffraction) patterns.

The physics depicted above can be systematically computed using the DWBA and the optical potential concepts. The interested readers can find detailed discussion of this point in the review article [A196].

## 2.4 Giant Resonances Built on Excited States

In 1955, D. Brink proposed, that giant resonances can be built on all nuclear states and that their properties should not depend strongly on the details of the considered nuclear state. These giant resonances will have the same characteristics as the giant resonance built on the ground state but their energy will be shifted according to the energy of the state on which they are built. This statement is known as the Brink-Axel hypothesis [Br62]. In this section we will briefly present the actual knowledge about this subject. Some of the presented points especially about hot resonances and

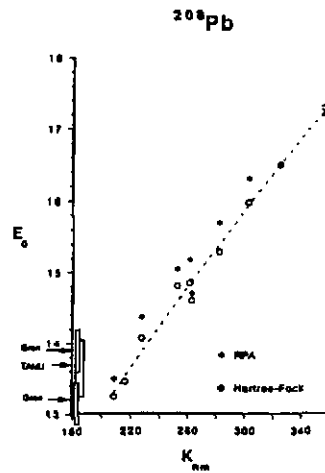


Figure 23 The breathing mode energy computed either using the constrained Hartree-Fock calculation or the RPA using various forces with different compressibility  $K$ . The data is shown on the coordinate axis.

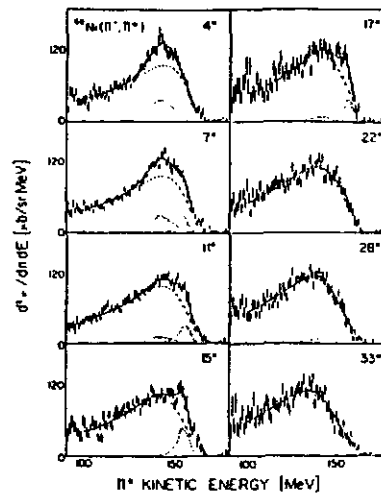


Figure 24 GDR and IVGMR in Charge Exchange Reactions: Doubly differential cross section for the  $^{60}\text{Ni}(\pi^-, \pi^0)$  reaction at  $E_{\pi^-} = 165$  MeV. (see ref. [Bo84]). The dashed line shows the continuum and the dotted lines the IVGMR (left peak) and the GDR (right peak).

multiphonons will be more developed in the next chapters. However, I believe that in this phenomenological chapter it is important to summarize the actual experimental knowledge about Giant resonances.

#### 2.4.1 GDR built on low lying states

The first observation of a giant resonance built on excited states is reported in the proton capture ( $p, \gamma$ ) experiment on  $^{11}\text{B}$  performed in 1964 where the GDR built on the first  $2^+$  state was observed [Ko79].

Since this pioneering work, many experiments have shown that the GDR persists as a collective motion under extreme conditions of excitation energies and angular momentum. We refer the reader to very complete reviews on the subject (see for example [Sn86, Ga88, Ga92]). In the following, we will just mention the main features of these observations.

Since 1980, medium energy (20-80 MeV) ( $p, \gamma$ ) experiments in light nuclei ( $12 < A < 40$ ) have provided new information on the properties of the GDR built on a variety of different states within the same nucleus. These studies demonstrate the existence of  $\gamma$ -decays populating excited final states. The  $\gamma$ -strength function for each excited state can be determined by varying the proton energy giving access to the characteristics of the GDR built on specific states.

The proton capture reaction on  $^{27}\text{Al}$  provides a good example of a reaction where the giant dipole resonance built on well separate excited states was observed [Do83]. Figure 28 shows a  $\gamma$ -ray spectrum from this reaction measured at 22 MeV. In the presented spectrum, superimposed on a large bump, one can see many peaks that correspond to known  $1p-1h$  states. These final states are in close correspondence with the states excited in stripping reactions, such as ( $^3\text{He}, d$ ), and a simple proportionality of the strength of the observed resonances to the spectroscopic factors of the

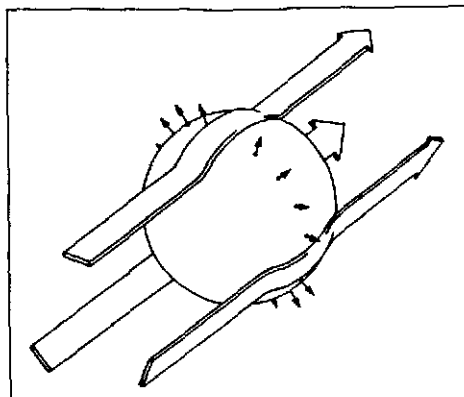


Figure 25 Schematic picture of a projectile as an incident wave, depicted with broad arrows, enveloping a nucleus. The motion of the latter is represented by small arrows.

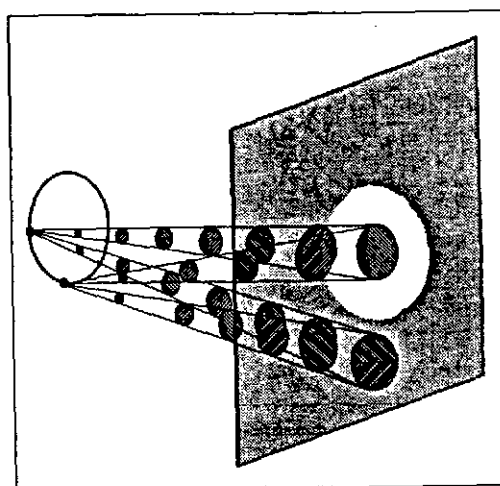


Figure 26 Schematic picture of the diffraction of different wavelets at the periphery of a nucleus performing a monopole vibration. Because of the spherical symmetry the different wavelets receive the same phase shift and therefore they always interfere positively in the forward direction.

populated final states ( see ref. [Do83]) is observed. Thus, the  $(p, \gamma)$  reactions appear to be a good tool for studying single proton strength in light nuclei.

A cross section for the excitation of every final state can be obtained from the line-shape decomposition of the  $\gamma$ -ray spectrum (see Fig. 28). Performing this analysis for different incident proton energies yield an excitation function for all the final states. The excitation function for various final states is displayed in Fig. 29 as a function of the emitted- $\gamma$  energy,  $E_\gamma$ , i.e. the proton-capture excitation energy minus the excitation energy of the final state. In Fig. 29, resonances are observed all peaked at  $E_\gamma \approx 20$  MeV which correspond to the energy of the GDR built on the ground state. These results clearly show that the observed resonances are due to giant dipole excitations built on various states as expected from the Brink-Axel hypothesis. However, the width of these resonances (see Fig. 29) strongly increases with the increasing excitation energy of the excited states.

#### 2.4.2 GDR in hot nuclei

Studies at higher bombarding energies on the same nucleus have been performed and show that, when the incident energy is high enough, the spectrum of single particle strength in the final nucleus is washed out, leaving only an enhancement peaked at the  $\gamma$  energy expected for the GDR. This transition can be interpreted as the transition from the excitation of a giant resonance built on well defined single particle states toward the excitation of a giant resonance built on a compound nucleus. Indeed, at high excitation energy the single particle states form a dense continuum strongly coupled to more complex states. Therefore, they can be identified with compound nucleus states.

These collective modes of a compound nucleus can also be studied by measuring the  $\gamma$  decay from a hot equilibrated system formed in heavy ion collisions. The presence of GDR excitations in the composite systems is now clearly demonstrated from a variety of recent experiments. The hot GDR was first observed in the  $\gamma$ -ray spectra from the statistical decay of compound nuclei formed in  $^{40}\text{Ar}$  induced fusion reactions at 170 MeV [Ne83]. In Fig. 30, the

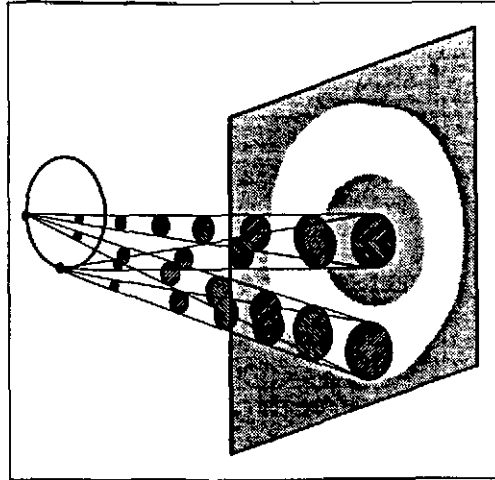


Figure 27 Schematic picture of the diffraction of different Wavelets at the periphery of a nucleus performing a quadrupole vibration. depending about the phase of the local vibration of the surface the different wavelets receive different phase shift. In particular, the wavelets at the maximum elongation and the others at the minimum elongation have opposite phases. Therefore they interfere negatively in the forward direction leading to a minimum in this direction. However, at another angle they may interfere positively and so a maximum cross section can be expected at a finite angle.

$\gamma$ -ray spectrum obtained in such reactions shows an enhancement for a value  $E_\gamma$  corresponding to the average energy of the GDR. Indeed, the fact that the GDR is observed in the decay of compound nuclei can be understood as the reverse process of the statistical decay of a GDR built on excited states. As a matter of fact, the existence of such a coupling between the resonance and the compound nucleus states allows to consider that the phonon gas is in thermal equilibrium with the nucleus and the observed photons are the signature of the presence of these phonon excitations.

The main features of the GDR decay which emerge from the available data can be summarized as follows [Sn86, Ga92].

At low temperature ( $T \leq 2-3$  MeV), the statistical description of the GDR decay gives a good account of the measured spectra. The GDR strength and mean energy of the resonance follow the ground state GDR systematics over a wide range of masses. The extracted  $E_1$  strength is in general in good agreement with the energy weighted sum rule suggesting that the high collectivity of the vibration is not affected by the temperature. The width and shape of the GDR is sensitive to the shape deformation and fluctuation of the excited nucleus. This, in general, results in a broadening of the observed resonance. The coupling of the GDR to the quadrupole shape degrees of freedom is important and allows to study nuclear structure effects as a function of temperature. In particular, the importance of the nuclear shell structures appears to diminish strongly for temperature about 1.5 MeV as shown in studies of the nuclear shapes as a function of temperature and spin. At higher temperature ( $T \geq 3$  MeV), the position and the strength of the GDR remain constant at its ground state values but contradictory results on the width of the GDR have been published. However, some observations indicate that the width does not increase as fast as in the lower excitation energy domain because of the saturation of the spin transferred during the fusion process. At  $T > 5-6$  MeV, experimental results are more fragmentary but have yielded indications for a saturation of the  $\gamma$ -multiplicity in the GDR region. The interesting new physics lies in the way in which the properties of the GDR are modified in highly excited nuclei. This study may provide new insight into the mechanisms of thermal equilibration and into the properties of hot nuclear matter.

In all the discussed experiments, because real photons are observed,  $E_1$  transition dominates. Relatively little is known about giant resonances of other multipolarity built on excited states. In particular, it would be extremely interesting to investigate properties of the giant monopole resonance in a hot nucleus and to obtain information about the compressibility of nuclear matter at high temperature. Indeed, the compressibility is a key ingredient of the equation of state of the nuclear matter. This equation governs the behavior of hot nuclear system and is of great interest for astrophysics as well as for nuclear physics. Recent experiments on the dilepton decay of the giant monopole resonance are in progress [Bu94] but no results are available today.

#### 2.4.3 Giant resonances built on top of other giant resonances: The multiphonons

We have discussed in the previous chapters that the giant resonances were understood as a first quantum of vibration. However, until recently, the higher quanta were escaping from the experimental observation. This fact was a puzzle for our understanding of these collective modes. The observation of different multiphonon states in various types of reactions is a strong confirmation that these modes are the first states of vibrational band (for more details see ref. [Ch95a]).

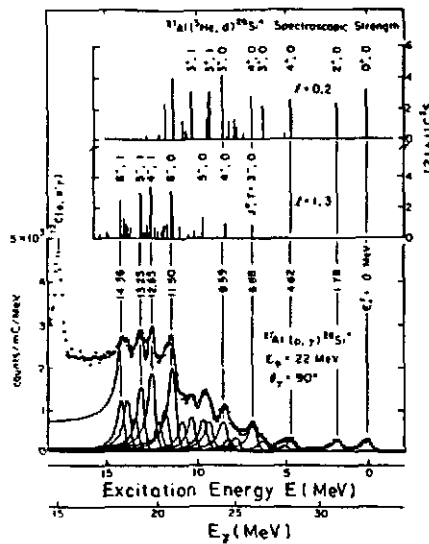


Figure 28  $\gamma$ -ray spectrum from the proton capture reaction on  $^{27}\text{Al}$  measured at 22 MeV showing the preferential population of particular final states (see ref. [Do83]).

#### 2.4.3.1 Excitation of multiphonons in heavy ion reactions.

The first observations of structures in the inelastic spectra of heavy ion reactions that could be interpreted as multiphonon back traces back to 1977 [Fr77, Fr80]. In 1984, new data were showing high-energy structures that could be interpreted as multipole excitations of giant resonances [Ch84c, Ch84b, Ch84a, Ch84] (see figure 31). Since our theoretical predictions [Ch86b] were showing that the excitation of multiphonon states built with the giant quadrupole resonance is optimum around 50 MeV per nucleons, experiments have been performed at the GANIL [Fr87] (see figure 32).

However, the unambiguous signatures of the multiphonon nature of the observed resonances have been found only recently with the study of their decay modes in particle coincidence experiments.

The idea is simple, when the target nucleus is excited above its particle emission threshold it decays by emitting particles. The observation of these particles is therefore a signature of target excitations. This is exactly what is done in ref. [Sc91, Sc93]. Figure 303 shows the inelastic spectrum of the  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$  reaction at 50 MeV per nucleon gated by the requirement that a proton is detected in the backward hemisphere. According to the previous discussion, this spectrum corresponds to target excitations. On this figure one can see the a structure at twice the giant quadrupole resonance in  $^{40}\text{Ca}$  that is interpreted as the excitation of two GQR phonons in the target nucleus.

However, this observation is not sufficient to sign unambiguously the excitation of a two-phonon state. To demonstrate that these states correspond to a two-phonon state, we will take advantage of the existence of a direct decay channel (the escape width) which can be used as a fingerprint of the excitation of a given mode. Indeed, in the case of the GQR in  $^{40}\text{Ca}$ , we have seen that it was decaying directly toward the ground state and the first hole state of  $^{39}\text{K}$  (as recall schematically on figure 34).

If we now look at the missing energy spectrum associated with the emission of one proton from the structure situated at twice the GQR energy, we can see sharp peaks on top of large background coming from the statistical decay of a compound nucleus. These peaks are the signature that the decay cascade went through well defined states. These peaks can be associated with the excitation of two GQR in the target which directly decay independently just as the GQR does, going to well-defined hole states. The simulation of this independent decay gives a good reproduction of the positions of the observed peaks as seen on figure 35 (see references [Sc93, Ch95a] for more details).

This demonstrates that the structures, observed around 34 MeV excitation energy, are indeed due to the excitation of two GQR Phonons. This state appears to correspond to a very harmonic vibration since the observed energy of the peak is very close to twice the GQR energy which centroid energy is around 17 MeV.

The observed width of the two-phonon state is very close to 1.5 the width of the GQR itself. This is also pleading in favor of an independent phonon picture. Indeed, the multiphonon theory predicts that the width of an N-phonon state should vary in [Ch84c, Ya85, Ch92, Ch95a]

Finally, the two-phonon state appears to decay directly as two non-interacting modes. All these properties show that giant resonances are behaving as weakly interacting excitations.

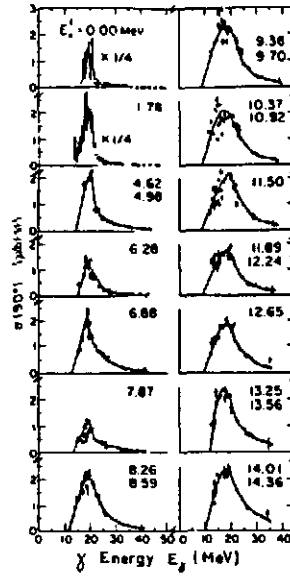


Figure 29 Excitation of the GDR on Top of Various States : Excitation function of the population of well defined final states in a  $(p,\gamma)$  reaction obtained by varying the incident proton energy. This cross section is plotted as a function of  $\gamma$ -energy,  $E_\gamma = E_p^{cm} + Q - E_x$ . (for more details see ref. [Do83]).

#### 2.4.3.2 Observations of two-phonon states.

During the past 5 years the multiphonon studies have been widely extended using not only heavy ion beams from 10 to 14 000 MeV per nucleon [Ri93, La93, Au93] but also pion beams [Mo88, Mo91]. Figures 36 and 37 give two illustrations of these results while figure 38 summarized the essential properties observed experimentally (for a complete experimental and theoretical review see ref. [Ch95a]).

From these studies, it appears that the two-phonon states are very harmonic. Their energy is within 10% deduced from the independent phonon picture. Only their cross-section seems always underestimated by the theoretical calculation based on a harmonic approximation. Let us now discuss all these properties.

#### 2.4.3.3 Width.

In the previous sections we have shown that the giant resonances are good vibrators giving, some foundation to the widely-used picture of independent phonons. The anharmonicities are small: they induce a splitting of the strength smaller than 1 MeV, which will result in a small increase of the multiphonon width. Therefore the multiphonon width can be discussed within the independent phonon picture. Since this model predicts that the multiphonon response involves a folding of the one-phonon strength function (see eq. (3.60)) one may conclude that the widths are added quadratically as the variances of statistically independent processes [Ya85, Ch88]. However, as far as the interpretation of the width in terms of the inverse of a life-time is concerned, one would predict that the widths are simply additive.

This apparent contradiction is in fact solved in ref. [Ch92], using the relation between the life-time and the strength function. A phonon state at an energy  $\omega$  which is decaying exponentially with a life-time  $\tau = 1/\Gamma$ , is associated by Fourier transform with a Lorentzian response :

$$S(E) = \frac{S_0}{(E - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.104)$$

where  $S_0$  is a normalization. If the Lorentzian shape (2.104) is introduced in equation 3.60 to compute the two-phonon strength function one can show easily, using Fourier transform for example, that the line shape of the two-phonon state is again a Lorentzian with a width

$$\Gamma_2 = 2\Gamma \quad (2.105)$$

because the inverses of the life-times are additive. In this case the argument about the variances does not hold because the variances diverge.

However, as soon as the variance can be defined (for example when the strength function appears to be more like a normal distribution) the width appears to be quadratically additive

$$\Gamma_2 = \sqrt{2}\Gamma \quad (2.106)$$

because the variances are additive and proportional to the square of the widths [Ch84a].

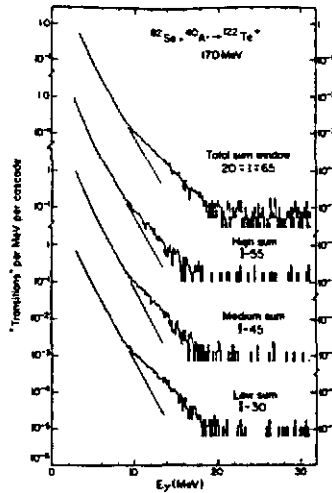


Figure 30 GDR Excitation in Hot Nuclei :  $\gamma$ -ray spectra from the decay of compound nuclei formed in fusion reactions using an  $^{40}\text{Ar}$  beam at an energy of 170 MeV (see ref. [Ne83]). The observed shoulder can be associated with the statistical excitation of a GDR in the compound system.

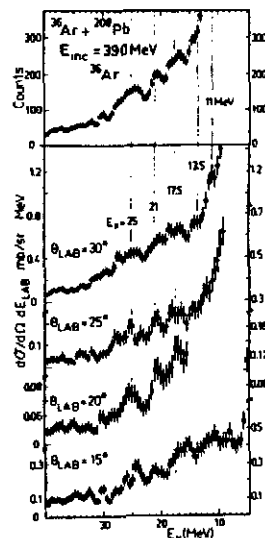


Figure 31 Inelastic spectrum showing high energy structures which are candidates for multiphonon excitations [Ch84, Ch84a, Ch84b, Ch84c].

This is not a violation of the Heisenberg relation  $\Delta E \Delta t \geq 1$  because in the case of a distribution which is not of a Lorentzian type the width cannot be directly related to a life-time except through the inequality  $\Gamma > 1/\tau$ . For example we discussed in section 3.2.3 that the Landau spreading of the strength cannot be related to a life-time [Ya85, Ch87, Gi87, Ch88, La90].

Both the Lorentzian and the Gaussian line shapes correspond to idealized pictures which are found neither in realistic models nor in nature. For instance, the resonance damping due to the coupling to more complicated states [Be83] leads to a Lorentzian shape only in an oversimplified model. In detailed calculations, strength distributions are predicted to be neither Lorentzian nor Gaussian [Co92]. The Landau broadening itself gives line shapes which can be somewhat complicated. The possibility to obtain normal distribution in the case of nearly chaotic spreading dynamics is discussed in ref. [Ze93]. Therefore, the concept of width is not well defined, either theoretically or experimentally. Moreover, concerning the folding procedure, one is always dealing with truncated strength distributions since there is no strength at negative energies whereas physical conservation laws impose an upper energy limit. All the moments of the strength are finite allowing us to use the variance as a measure of the width. So, as far as the independent excitation picture is valid, the multiple excitation spectrum is predicted to be the folding of the single excitation spectrum and the variance of the multiphonon spectrum is the sum of the variances associated with each individual phonon.

For instance, we have already discussed that the strength of the giant dipole resonance (GDR), which is one of the best examples of a Lorentzian, must be multiplied by a Gaussian cut-off in order to fit the data on the low energy



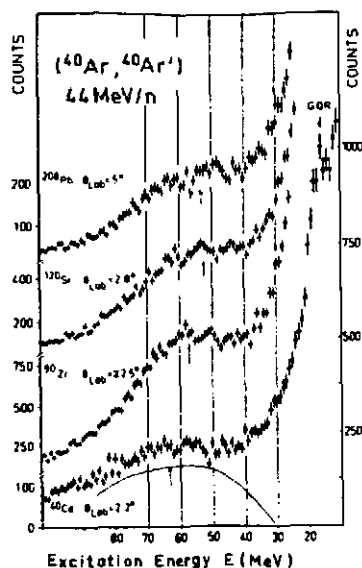


Figure 32 Inelastic spectra showing high energy structures excited in different target nuclei by a heavy ion projectile at about 50 MeV per nucleon.

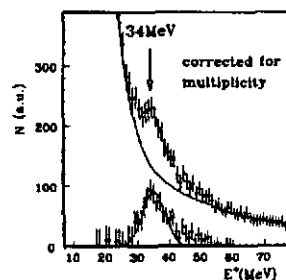


Figure 33 Inelastic spectrum measured in the  $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$  reaction at 50 MeV per nucleons in coincidence with backward emitted protons. This spectrum corresponds to target excitation. The structured observed at high excitation energy is interpreted as the excitation of two GQR phonons.

side and that in actual experiments; the GDR strength is weighted by the virtual photon spectrum which decreases exponentially up to a maximum energy given by energy- and momentum-conservation. Also in this case, the relation (2.106) is expected to hold. Another way to compute the anharmonicities is to consider that the first phonon is already damped when the second phonon is excited. Therefore, the second phonon is built on a hot system. Since the temperature effects on giant resonances are relatively small, one may conclude that the anharmonicities are very small [Sn86].

In conclusion, the life-time of a multiphonon state is inversely additive whereas the variance of a multiphonon cross-section is predicted to be always defined and additive. One generally expects relation (2.106) to hold in the limit of an independent-phonon picture. The introduction of anharmonicities induces a small increase of the two phonon width of about 1 MeV [Ca89, Be92] if the different components are not resolved. Consequently, one can estimate that the width of the two-phonon states will be  $\sqrt{2}$  times that of the single phonon plus 0.5-1 MeV due to the anharmonicity. This simple law, originally predicted in reference [Ch84a] and later on rederived by many authors [Ba92, Li92, Ze93], is in very good agreement with all the present multiphonon measurements [Ya85, Mo88a, Fr88, Mo90, Ku92, Em94].

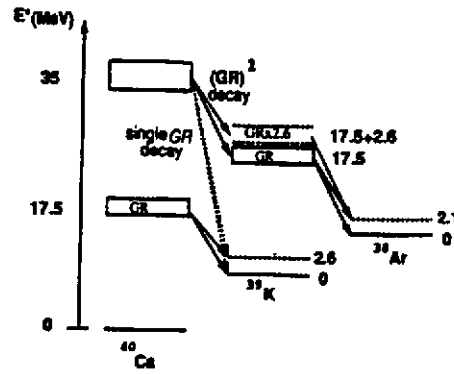


Figure 34 Schematic diagram of the direct decay of a giant resonance and of a two-phonon state

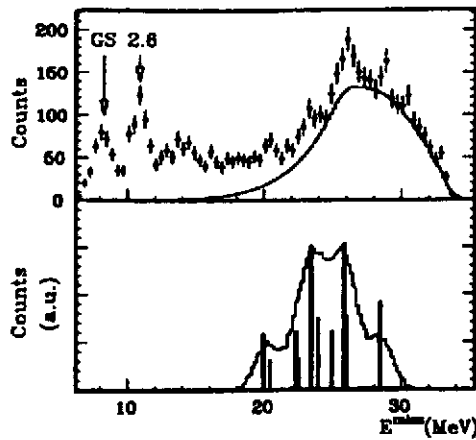


Figure 35 Missing energy spectra b) associated with the structure observed at twice the energy of the GQR. c) same spectrum simulated assuming an independent decay of two GQR as shown on previous figure.

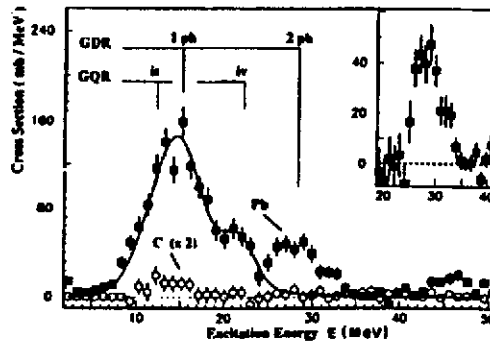


Figure 36 Spectrum of the Coulomb excitations of  $^{136}\text{Xe}$  arising from its collision with a Pb target at 700 MeV per nucleons. The first peak corresponds to the GDR while the second one is attributed to the two GDR phonon states (see ref. [La93])

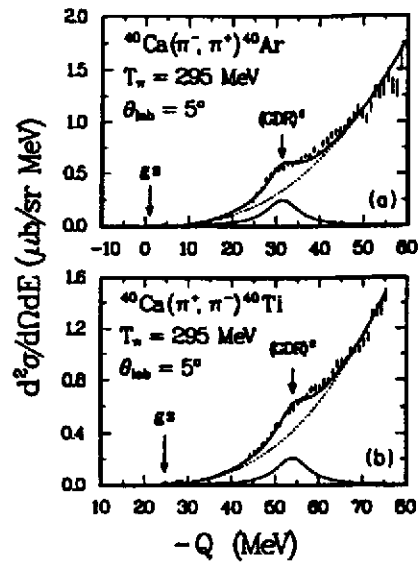


Figure 37 Double charge exchange spectrum measured on a  $^{40}\text{Ca}$  target with a pion beam. The shoulder indicated by (GDR)2 correspond to the isospin flip 2 member of the GDR multiplet (see ref. [Mo91]).

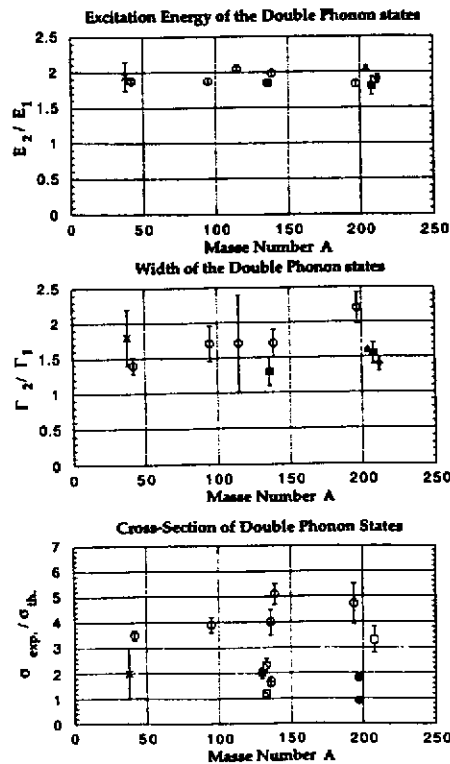


Figure 38 Synthetic presentation of the various experimental results concerning two phonon states (see ref. [Ch95a] for more details).

## Chapter 3 Theoretical descriptions

In this chapter we present an overview of the different approaches which have been applied to the description of collective vibrations.

### 3.1 Macroscopic Models of Surface Vibrations

We will use the surface vibration model as an illustration of these macroscopic models based on the liquid drop approach [Bo75, Br81]. These surface modes are analogous to the ripples on the interface of two fluid as shown on figure 1. The inertia comes from the fluid motion while the restoring force is due to the surface tension.

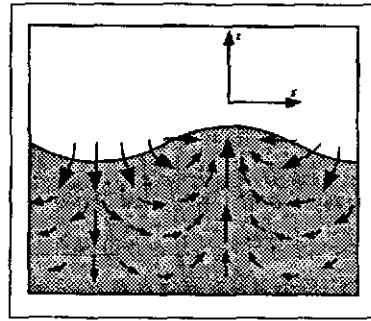


Figure 1 Schematic illustration of the vibration of the surface of a fluid.

Let us consider a spherical incompressible liquid drop. The excitation of the shape can be described by expanding the surface coordinate on the spherical harmonic basis

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right) . \quad (3.1)$$

We will show in this section that the motion of the collective deformation parameters  $Q_{\lambda\mu}$  can be associated with a harmonic oscillator Hamiltonian (3.7).<sup>1</sup> This fact justifies the introduction of the concept of vibrations and phonons. We will describe how the surface-vibration model can be used in a phenomenological manner (see section 3.1.4) and we will discuss how it is possible to go beyond the harmonic picture (see section 3.1.5). In particular, we will introduce the so-called nuclear field theory (see Fig. 2) which is a powerful tool to study phonon properties such as anharmonicities (see Fig. 2).

#### 3.1.1 Potential Energy of a Deformed Liquid Drop

In the surface oscillation model, the restoring force arises from two opposite effects: the surface tension which favors the spherical configuration, and the Coulomb force which tends to deform the nucleus. The increase of surface energy is proportional to the increase of the surface  $\Delta E_S = \sigma \Delta S$ , where  $\sigma$  is the surface tension parameter. The increase of the surface due to the deformation  $Q$  can easily be obtained at the first order in  $Q$  [Bo75]:

$$\Delta E_S = \frac{\sigma}{2} \sum_{\lambda\mu} (\lambda - 1)(\lambda + 2) |Q_{\lambda\mu}|^2 . \quad (3.2)$$

The Coulomb energy variations of a deformed uniformly-charged drop is given by (at the lowest order in  $Q$ ):

$$\Delta E_{Coul} = -\frac{3}{4\pi} \frac{Z^2 e^2}{R_0} \sum_{\lambda\mu} \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1} |Q_{\lambda\mu}|^2 . \quad (3.3)$$

Therefore, the total energy variation can be approximated by a harmonic potential  $V$ :

$$V = \Delta E_S + \Delta E_{Coul} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} K_{\lambda} |Q_{\lambda\mu}|^2 . \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Except for  $Q_{00}$  which is constrained by the volume conservation and  $Q_{1\mu}$  which corrects for the center of mass motion.

### 3.1.2 Kinetic Energy

In order to get a complete description of the considered excitation, one still needs to derive the kinetic energy associated with the surface motion. This quantity depends on the flow associated with the collective motion. If an irrotational flow is assumed, a simple expression of the mass of the collective motion can be derived. Indeed, one can introduce a velocity  $\mathbf{v} = -\nabla\chi$ , where velocity potential  $\chi$  fulfills the condition  $\Delta\chi = 0$  when the fluid is incompressible. Using the boundary condition at the surface which, for small values of  $Q$ , reads  $v_r(R_0) = \dot{R}$  one gets  $\chi = -\sum_{\lambda\mu} \lambda^{-1} R_0^{2-\lambda} Q_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*$ . In this case, the total kinetic energy becomes

$$T = \sum_{\lambda\mu} \frac{M_\lambda}{2} |\dot{Q}_{\lambda\mu}|^2, \quad (3.5)$$

where the parameter

$$M_\lambda = (3/4\pi) M A R_0^2 / \lambda \quad (3.6)$$

can be interpreted as the mass of the vibration.

### 3.1.3 Quantization of the vibrations

The total Hamiltonian,

$$H = \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2M_\lambda} |P_{\lambda\mu}|^2 + \frac{K_\lambda}{2} |Q_{\lambda\mu}|^2, \quad (3.7)$$

in which  $P_{\lambda\mu} = M_\lambda \dot{Q}_{\lambda\mu}$  is the momentum conjugated of the coordinate  $Q_{\lambda\mu}$ , can now be quantified as a harmonic oscillator with the frequency:

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{K_\lambda}{M_\lambda}}. \quad (3.8)$$

Therefore, the excitation spectrum exhibits single and multiple phonon excitations. We can introduce the creation and annihilation operators for the phonons,  $O^\dagger$  and  $O$ , defined by the relations :

$$Q = \sqrt{\frac{\omega}{2K}} (O^\dagger + O) \quad (3.9)$$

and

$$P = i\sqrt{\frac{\omega M}{2}} (O^\dagger - O). \quad (3.10)$$

The Hamiltonian (3.7) gives a good framework to describe giant resonances. However, the liquid drop parameters for the potential energy do not always give the correct energy for the resonance. For example, for the quadrupole resonance, one gets  $\omega \approx 38A^{-1/2} MeV$  which is far from the experimental value  $E \approx 64A^{-1/3} MeV$ .

The reason why the liquid-drop picture fails to reproduce some giant resonances is due to the fact that the motions described by the hydrodynamical model must be slow in comparison with the characteristic equilibration time. Indeed, we suppose that all the internal degrees of freedom are equilibrated when we assume that only the surface modification is contributing to the energy increase (adiabatic approximation). However, the equilibration time can be computed by investigating the time between two collisions undergone by one nucleon. At low excitation energy, this time is very long because many collisions are blocked by the Pauli exclusion principle. If the mean free path of the nucleon is found to be larger than the nuclear size, the equilibration time is greater than  $10^{-22}s$ . Therefore fluid dynamics can be applied only to slow processes (slower than  $10^{-22}s$ ), such as fission, but not to giant resonances which have a period of oscillation of the order of  $10^{-22}s$ .

The correct picture is to assume that the nucleons do not have the time to readjust their distribution to the variations of the mean-field (diabatic approximation) and that they still move on the same orbital (see chapter on TDHF approximation). Therefore, not only is the surface deformed but rather the whole nucleus is out of equilibrium. In this case the restoring force becomes a volume force generating the correct  $A^{1/3}$  behavior.

In conclusion, the liquid drop model helps in understanding the vibrational nature of giant resonance but cannot be used to quantitatively derive their properties. Therefore, this model must be considered as phenomenological, the parameters  $K$  and  $M$  being derived from experiment [Br81].

### 3.1.4 Phenomenological approach

In the phenomenological approach the mass  $M$  and the restoring force  $K$  are considered as free parameters which are fitted in order to reproduce the resonance frequency and the electric multipole moments  $B(E_{\lambda\mu})$ . Indeed, the transition between the ground state  $|0\rangle$  and the first phonon state  $|1_\lambda\rangle$  is related to the amplitude of the vibration. In particular, assuming a sharp uniform charge distribution one gets [Br81]:

$$B(E_\lambda) \equiv |\langle 1_\lambda | \mathcal{M}_\lambda | 0 \rangle|^2 = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2K_\lambda}} \frac{3Ze}{4\pi} R_c^\lambda \sqrt{2\lambda + 1}, \quad (3.11)$$

where  $\mathcal{M}$  are the electric multiple moments ( $\mathcal{M}_\lambda \equiv e r^\lambda Y_{\lambda,0}$ ). The actual strength associated with a given mode can be measured experimentally through inelastic collisions.

The  $B(E_\lambda)$  value together with the excitation energy  $\omega$  uniquely define the two parameters  $K$  and  $M$  of the vibration.

### 3.1.5 Anharmonicities and Phonon Couplings

The surface vibration model have been widely used for the study of low-lying states such as the low frequency quadrupole mode. In the fifties, the experimental observation that low-lying quadrupole states are the basis of a vibrational band with a large anharmonicity [Go59, Bo65, Bo75] stimulated many theoretical efforts. Some studies were simply based on a phenomenological expression for the Hamiltonian describing the interaction between phonons [Br65, Bo75]. Others were based on a general expansion of the deformation potential (3.4) and of the kinetic energy (3.5) in terms of the deformation parameters  $Q$  and velocities  $\dot{Q}$  [Be61, Ke62, Be62, Ch64]. However, the properties of the phonons such as the anharmonicity were derived from phenomenological analyses of experimental observations [Bo75]. None of these developments have been applied to multiple excitation of giant resonances because of the lack of experimental data to fit the phenomenological parameters of the models.

To avoid this difficulty, an alternative route is to consider the particle-vibration coupling model (or the nuclear field theory)[Bo75]. Since this model opens the possibility of predicting properties of multiple phonon states built with giant resonances, we will discuss it in some detail<sup>2</sup>.

The basic idea is that the leading order of the particle-vibration coupling is identical to the excitation of a phonon during the scattering of a particle. Therefore, the coupling interaction can be written as

$$H_{Coupl} = F \cdot Q = \sum_{\lambda} F_{\lambda}(r) \sum_{\mu} Y_{\lambda\mu}^* Q_{\lambda\mu} \quad (3.12)$$

where  $Q$  is the deformation operator and  $F$  is a one-body operator. The operator  $F$  can either be obtained phenomenologically or can be derived from the microscopic models (see section 3.2.3). In equation (3.12) the collective coordinate  $Q$  can be quantified as a harmonic oscillator

$$Q = \sqrt{\frac{\omega}{2K}} (O^\dagger + O) \quad (3.13)$$

where  $O^\dagger$  and  $O$  are creation and annihilation operators for phonons and the one body operator  $F$  can be expressed as

$$F = \sum_{ij} F_{ij} a_j^\dagger a_i \quad (3.14)$$

where  $a_i^\dagger$  (resp.  $a_i$ ) creates (resp. annihilates) a particle in the orbital  $i$ . Therefore, the interaction between particle and phonons,  $H_{coupl}$ , can be graphically represented as in Fig. 2. Higher order terms require computing variety of

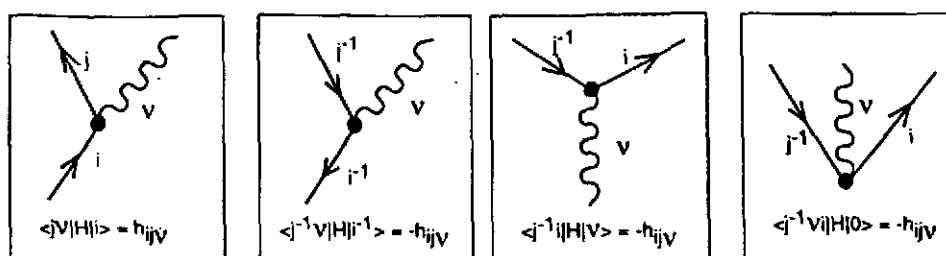


Figure 2 Graphic Representation of the Coupling Hamiltonian : In this figure the straight lines represent particle states noted  $i$  or  $j$ , (lines going upward) or hole states, noted  $i^{-1}$  or  $j^{-1}$ , (lines going downward). The heavy lines symbolize phonon excitations labelled by  $\nu$ . The different point represents vertices associated with a given matrix element.

interactions. For example, the coupling between one- and two-phonon states can be estimated computing the three diagrams shown in Fig. 3 and the additional diagrams obtained by interchanging the direction of the particle arrow (in fact, interchanging particles and holes) and the two final phonons.

The four-phonon interaction requires the estimate of more diagrams which are obtained by attaching the four phonon lines to the four possible fermion vertices shown in Fig. 4 and by inverting the direction of the fermion line.

By generalizing this approach it is, in principle, possible to compute all matrix elements between multiphonon states and to infer properties such as anharmonicities or mixing between one and two phonon states.

<sup>2</sup>Some preliminary results obtained within the nuclear field theory are contained in ref. [Ce89] but no extensive study of the multiple giant resonance excitations have been yet published.

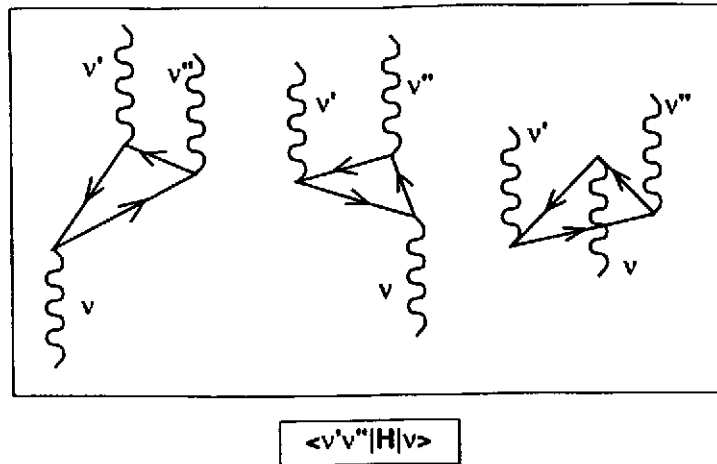


Figure 3 Interactions between one and two Phonons: Different graphs contributing to the coupling between one- and two-phonon states.

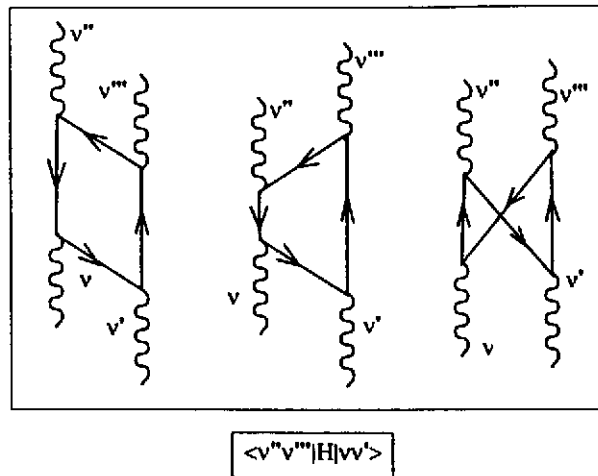


Figure 4 Two-Phonon Interactions: Different graphs containing four phonons in interaction, two in the initial state and two in the final state.

### 3.1.6 Discussion

The macroscopic model is a useful phenomenological approach which provides a simple representation of the collective excitations of the nucleus. The general concepts such as the small amplitude vibrations of the nuclear density or the quantization of the motions in terms of harmonic oscillations are in common with the microscopic approaches presented in the following section. However, the macroscopic model must be considered with some caution because it basically ignores the microscopic content of the collective excitations. In particular, the macroscopic model provides only a rough estimate of the transition densities associated with the collective modes, i.e. the variation of density observed during the vibration of the nucleus. This may be an important drawback of the method when macroscopic and microscopic form factors are compared. In conclusion, a quantum microscopic description of giant resonances and multiphonons is called for.

## 3.2 Mean Field Approximation and Beyond

Since the discovery of magic numbers and their interpretation in terms of shell effects (see textbooks such as [Bo69, Ri81]), the idea that nuclei can be described in terms of independent particle motion is well established. The main justifications of such a picture are related to the quantal and fermionic nature of the nucleons: on the one hand, their zero-point motion ( $\approx 5$  fm) is large in comparison with the strong interaction range ( $\approx 1$  fm) and the radius of the hard repulsive core ( $\approx 0.4$  fm); on the other hand, in the interior of the nucleus, most of the collisions are Pauli blocked so that the nucleon mean-free path is long in comparison with the nuclear dimensions. Therefore, the nucleons can be described in a first approximation as interaction-free particles moving in the mean-field created by all the other particles.

The mean-field approximation is the starting point of elaborated descriptions of the nucleus. When looking at static properties of a system, the mean-field treatment leads to the Hartree-Fock approximation (HF) which has been very successful in describing static properties of nuclei (see textbooks such as [Ri81] or recent reviews such as [Ab90] and ref. therein). The time-dependent generalization of this approximation, the time-dependent Hartree-Fock (TDHF) approximation [Di30, Fe57, Fa59, Bo76, Ri81], has also been very successful in describing the dynamical properties of nuclei and low energy heavy-ion reactions. Recently, the semi-classical version of TDHF, the Vlasov equation, has proven to yield a valid description of nuclear properties and reactions, especially in its extended version which includes a Pauli-blocked collision term, the so-called Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU) equation [Be88].

In this section we will first recall a modern derivation of the TDHF approximation where we will define the notations used in the following. In particular we will introduce the Liouville formalism and we will define a natural metric in the Liouville space. Then, we will present the concept of collective vibrations through the linearization of the TDHF equation leading to the Random Phase Approximation (RPA). This introduction will lead to the presentation of various extensions of the mean-field approach. We will start by discussing the so-called Adiabatic TDHF approximation and its predictions for multiphonon anharmonicities. We will then present the Generator Coordinate Method which can be seen as one of the possible bridges towards the Boson mapping method developed in the last section of this chapter. Finally, we will describe the different attempts to use quantified periodic orbits of TDHF in order to go beyond the RPA.

### 3.2.1 Link between structure calculation and time dependent approximation

The fact that time dependent approaches are general tools to get information on the eigenenergies and eigenstates of the time independent Schrödinger equation is an important concept in physics which deserves some detailed explanations..

From the general point of view time dependent approximations are espoused to provide good approximations for the evolution of quantum systems. In fact, these approximations are often restricted to the prediction of few observations on the system. For example, the time-dependent mean-field approaches are optimized to predict the evolution of the observations of one-body observables  $\langle \hat{D} \rangle$ . To understand the link between these approximations and the exact quantum problem one should first introduce the exact eigenstates of the Hamiltonian

$$\hat{H} |n\rangle = \omega_n |n\rangle \quad (3.15)$$

Then any initial states

$$|\Psi\rangle = \sum_n A_n |n\rangle \quad (3.16)$$

evolve according to the Schrödinger equation

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n A_n e^{-i\omega_n t} |n\rangle \quad (3.17)$$

Therefore, the result of the observation of any observable  $\hat{D}$  happens to be

$$\langle \hat{D} \rangle (t) = \langle \Psi(t) | \hat{D} | \Psi(t) \rangle = \sum_{nm} A_n A_m e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \langle m | \hat{D} | n \rangle \quad (3.18)$$

This means that the Fourier transform of the quantity  $\langle \hat{D} \rangle (t)$  implicitly contains both the energy difference  $(\omega_n - \omega_m)$  and the transition amplitude  $\langle m | \hat{D} | n \rangle$ . A case of particular interest correspond to the measure of an observable  $\hat{D}$  on a slightly perturbed ground state (as the sudden application of an operator  $\hat{B}$ ). In such a case, at the first order of the perturbation theory we can write

$$|\Psi(t)\rangle = |0\rangle + \sum_{n \neq 0} \langle n | \hat{B} | 0 \rangle e^{-i\omega_n t} |n\rangle \quad (3.19)$$

and so we get

$$\langle \hat{D} \rangle (t) = \sum_{n \neq 0} e^{-i(\omega_n - \omega_0)t} \langle n | \hat{B} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{D} | n \rangle + h.c. \quad (3.20)$$

Therefore, the Fourier transform of the predictions of time dependent approximations may give information on the eigen energies and transitions amplitudes of states correctly connected through the corresponding observable. For example, time-dependent mean field approaches are known to be built to predict evolutions of one-body observables therefore the Fourier analysis of the TDHF dynamics may give information on the excitation energy and transition amplitude of states strongly connected to the ground state through one body operators. This means that only the frequencies and amplitude of transition should be interpreted and not other predictions of the approximation such as the wave-function. We will come back to this point when we will discuss periodic orbits of TDHF or correlated ground states of the quasi-boson approximation.



### 3.2.2 Time-Dependent Hartree-Fock Approximation

Let us consider the Hamiltonian  $H_f$  of a fermionic system (e.g. a nucleus) with a two-body interaction  $V$ :

$$H = \sum_{ij} t_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k, \quad (3.21)$$

where  $a_i^\dagger$  is the creation operator of a particle in the orbital  $i$ .

The TDHF approximation reads (see appendix 5.2):

$$i\dot{\rho} = [W(\rho), \rho], \quad (3.22)$$

where  $\rho$  is the one-body density matrix,  $\rho_{ij} \equiv \langle a_j^\dagger a_i \rangle \equiv \text{Tr} D a_j^\dagger a_i$  and where the mean-field Hamiltonian is:

$$W = \frac{\partial E(\rho)}{\partial \rho^*}, \quad (3.23)$$

with  $E$  being the total energy  $E(\rho) \equiv \langle H \rangle \equiv \text{Tr} H D$ . In these definitions  $D$  is the many-body density matrix of the system supposed to be of independent-particle type (see eq. 5.8).

Diagonalizing the one-body density matrix,

$$\rho = \sum_i |\varphi_i \rangle n_i \langle \varphi_i| \quad (3.24)$$

we can define single-particle orbitals  $\varphi_i$  and occupation numbers  $\rho_{ij} = \delta_{ij} n_i$ . The occupation numbers are constants of the motion and the TDHF equation corresponds, for each orbital  $\varphi_i$ , to a single-particle Schrodinger evolution generated by the self-consistent one-body (HF) Hamiltonian  $W$ :

$$i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = W \varphi_i. \quad (3.25)$$

An important application is to consider the evolution of Slater determinants (i.e.  $n_i = 0$  or  $1$ ). However, the derivation presented in appendix 5.2, was performed in a general framework so that one can consider mixing of independent particle states in which  $0 \leq n_i \leq 1$ . This is, in particular, the case when one considers a hot system.

In the following, we will use the Liouville formalism [Zw60, Fa64] in the single-particle space. The one-body density matrices,  $\rho$ , are considered as super-kets, noted  $|\rho \rangle \rangle^3$ , with elements  $\rho_\alpha$  where the index  $\alpha$  labels the pair of single particle indices  $(i, j)$ . The super-operators acting on the Liouville space will be noted by calligraphic letters. In particular, we can write the TDHF equation (5.10):

$$i |\dot{\rho} \rangle \rangle = \mathcal{W} |\rho \rangle \rangle, \quad (3.26)$$

where we have introduced the super matrix  $\mathcal{W}$  defined by  $\mathcal{W} |\rho \rangle \rangle \equiv \mathcal{W} \rho$ . The dual of the single-particle Liouville space is the space of the one-body observables,  $A$ , (i.e. of the Hermitian one-body operators) and the result of a measurement is given by:

$$\langle \langle A | \rho \rangle \rangle \equiv \sum_\alpha A_\alpha^* \rho_\alpha \equiv \text{tr} A \rho \equiv \langle A \rangle, \quad (3.27)$$

This relation provides a scalar product in the Liouville space

$$\langle \langle \sigma | \rho \rangle \rangle \equiv \sum_\alpha \sigma_\alpha^* \rho_\alpha \equiv \text{tr} \sigma \rho, \quad (3.28)$$

if we define the super-bra  $\langle \langle \rho |$  as being the Hermitian one-body operator associated with  $\rho$ . It should be noticed that the conjugate of a super-matrix,  $\mathcal{L}$ , is  $\mathcal{L}_{ij,kl}^\dagger = \mathcal{L}_{lk,ji}^*$ , since it is defined by  $\langle \langle \rho | \mathcal{L}^\dagger | \sigma \rangle \rangle \equiv \langle \langle \sigma | \mathcal{L} | \rho \rangle \rangle^*$ .

The TDHF equation (3.26) and the scalar product (3.28) will be the building-blocks of the following developments.

### 3.2.3 Random Phase Approximation

In this section we will present the linearization of the TDHF equation which leads to the so-called RPA. Considering the discussion about the link between time dependent approaches and eigen-energies and transition amplitudes we can directly understand that a Fourier analysis of the linearized TDHF should directly give access to excitation energies of states which can be excited from the ground state through a one-body operator.

<sup>3</sup>We will sometimes omit the super-ket symbols  $|\dots\rangle\rangle$  when no confusions are possible

### 3.2.3.1 Small Amplitude Vibrations

Let us consider the case of small amplitude motion around a given density  $\rho^{(0)}$  [Ri81]. In this case if we expand the TDHF equation (3.26) to the first order assuming that

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \dots, \quad (3.29)$$

we get

$$i\|\dot{\rho}^{(1)}\rangle\rangle = \mathcal{K}\|\rho^{(1)}\rangle\rangle. \quad (3.30)$$

In this equation we have introduced the RPA matrix defined by

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial[W, \rho]_{\alpha}}{\partial\rho_{\beta}}, \quad (3.31)$$

or equivalently by

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{L}, \quad (3.32)$$

where the super matrices  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{L}$  are defined by:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\|\sigma\rangle\rangle &= \|\![W^{(0)}, \sigma]\rangle\rangle \\ \mathcal{F}\|\sigma\rangle\rangle &= -\|\![\rho^{(0)}, \sigma]\rangle\rangle \\ \mathcal{L} &= \frac{\partial W}{\partial\rho} = \frac{\partial^2 E}{\partial\rho^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

In order to solve equation 3.30, we introduce the eigenmodes,  $\mathcal{X}^{\nu}$ , of the RPA matrix  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K}\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle = \omega_{\nu}\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle. \quad (3.34)$$

Realizing that the operator  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{K}$  is Hermitian according to the scalar product  $\langle\langle \|\rangle\rangle$  of the Liouville space (i.e.  $\mathcal{K}^{\dagger}\mathcal{F}^{-1} = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{K})^{\dagger} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{K}$ ) we can easily show that the linear evolution, 3.30, preserves the symplectic RPA form  $\langle\langle \|\mathcal{F}^{-1}\|\rangle\rangle$ :

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \rho^{(1)}(t) \|\mathcal{F}^{-1} \|\sigma^{(1)}(t) \rangle\rangle = 0, \quad (3.35)$$

where  $\rho^{(1)}$  and  $\sigma^{(1)}$  are any linear perturbations of  $\rho^{(0)}$ . Therefore, according to this symplectic structure of  $\mathcal{K}$ , each eigenmode  $\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle$  with an energy  $\omega_{\nu}$  can be associated with the eigenmode  $\|\mathcal{X}^{\nu\dagger}\rangle\rangle$  with an energy  $-\omega_{\nu}$ . Moreover, the different modes are orthonormalized according to the RPA symplectic form:

$$\langle\langle \mathcal{X}^{\nu} \|\mathcal{F}^{-1} \|\mathcal{X}^{\mu} \rangle\rangle = \delta_{\nu\mu} \text{sgn}(\omega_{\nu}), \quad (3.36)$$

and the closure relation reads:

$$\sum_{\nu} \text{sgn}(\omega_{\nu}) \|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle \langle\langle \mathcal{X}^{\nu} \|\mathcal{F}^{-1} = 1. \quad (3.37)$$

Eq. (3.34) is the most general RPA equation valid for time dependent problems with occupation numbers different from 0 or 1. It is also built to accommodate density dependent interactions or three body forces.

### 3.2.3.2 Linearization in a moving frame

Let us generalize a little the above presentation by considering the case of a small amplitude motion around a TDHF trajectory. In the mean-field approximation, the single-particle density matrix  $\rho$  of the system is determined by the time-dependent Hartree-Fock (TDHF) equation,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{W}[\rho], \hat{\rho}(t)], \quad (3.38)$$

where  $\hat{W}[\rho] = \hat{p}^2/2m + \hat{U}[\rho]$  denotes the mean-field Hamiltonian, and  $\hat{U}[\rho]$  is the density dependent self-consistent mean-field potential. Let us assume that the system is represented at the initial time  $t = 0$  by a density matrix  $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}(0)$  determined by the constraint Hartree-Fock equation  $[\hat{W}[\rho_0] - \lambda \hat{Q}, \hat{\rho}_0] = 0$ , where  $\hat{W}[\rho_0]$  is the mean-field Hamiltonian at the initial state,  $\hat{Q}$  is a suitable constraining operator for preparing the system and  $\lambda$  is the associated Lagrange multiplier. To study the propagation of small perturbations around the trajectory defined by the initial constrained state  $\hat{\rho}_0$  it is more convenient to consider the density matrix  $\hat{\rho}(t)$  in the "moving frame",  $\hat{\rho}(t) = \exp[\frac{i}{\hbar} \lambda t \hat{Q}] \hat{\rho}(t) \exp[-\frac{i}{\hbar} \lambda t \hat{Q}]$ , and transform the TDHF equation into the moving frame,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{W}(t) - \lambda \hat{Q}, \hat{\rho}(t)], \quad (3.39)$$

where the mean-field Hamiltonian in the moving frame is given by,

$$\hat{W}(t) = \exp[i\lambda t\hat{Q}] \hat{W}(t) \exp[-i\lambda t\hat{Q}]. \quad (3.40)$$

In order to investigate the early evolution of instabilities, we linearize this equation around  $\hat{\rho}(t)$ ,  $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0(t) + \delta\hat{\rho}(t)$ , where  $\hat{\rho}_0(t)$  is the solution of the TDHF eq.(2) with the initial condition  $\hat{\rho}_0$  determined by the constraint Hartree-Fock equation. The small fluctuation  $\delta\hat{\rho}(t)$  is determined by the linearized TDHF equation in the moving frame,

$$i\hbar \frac{\partial \delta\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{W}_0(t) - \lambda\hat{Q}, \delta\hat{\rho}] + [\delta\hat{U}(t), \hat{\rho}_0(t)] = \mathcal{M}(t) \cdot \delta\hat{\rho}(t), \quad (3.41)$$

where the mean-field Hamiltonian  $\hat{W}_0(t)$  and the fluctuations of the mean-field potential  $\delta\hat{U}(t)$  in the moving frame are defined in a manner similar to eq.(3), and  $\mathcal{M}(t)$  denotes the instantaneous RPA matrix. The formal solution of this equation can be expressed as

$$\delta\hat{\rho}(t) = \mathcal{U}(t) \cdot \delta\hat{\rho}(0), \quad (3.42)$$

where

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{T}(\exp[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds \mathcal{M}(s)]) \quad (3.43)$$

denotes the linearized evolution operator with  $\mathcal{T}$  as the time ordering operator. The eigenvalues of the evolution operator  $\mathcal{U}(t)$  determine the stability of the TDHF trajectories as a function of time. However the construction of  $\mathcal{U}(t)$  is, in general, a very difficult task. Therefore, we consider the early evolution of the instabilities in the vicinity of the initial state  $\hat{\rho}_0$  and solve the RPA problem associated with  $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$ . Introducing the eigenmodes  $\delta\hat{\rho}(\omega)$  associated with the eigenvalue  $\hbar\omega$  and incorporating the representation  $|i\rangle$ , which diagonalizes  $\hat{W}_0 - \lambda\hat{Q}$  and  $\hat{\rho}_0$ , the RPA equation  $\mathcal{M} \delta\hat{\rho}(\omega) = \hbar\omega \delta\hat{\rho}(\omega)$  for the collective modes becomes

$$(\hbar\omega - \epsilon_i + \epsilon_j) \langle i|\delta\hat{\rho}(\omega)|j\rangle = \langle i|\delta U(\omega)|j\rangle (\rho_j - \rho_i), \quad (3.44)$$

where  $\rho_i$  and  $\epsilon_i$  are the occupation number and the energy associated with the constraint Hartree-Fock state  $|i\rangle$ , respectively. The temperature dependence may enter into the calculations through the occupation number  $\rho_i$  if it is given by the Fermi-Dirac function in terms of the single-particle energies  $\epsilon_i$ .

### 3.2.3.3 Dispersion relation method

The RPA eq.(3.44) can be solved using standard techniques [Ri81]. However, we can consider a simplified approach, and parametrize the transition density associated with an isoscalar collective mode in terms of a known operator  $\hat{F}$  such as a multipole operator,

$$\delta\hat{\rho}(\omega) = \alpha(\omega) \hat{F} \quad (3.45)$$

where  $\alpha(\omega)$  is the amplitude associated with the collective mode. This relation can be inverted using any observable  $\hat{D}$

$$\alpha(\omega) = K \text{tr} \hat{D} \delta\hat{\rho}(\omega), \quad (3.46)$$

where the normalization factor  $K_L$  is given by

$$\frac{1}{K} = \text{tr} \hat{D} \hat{F} \quad (3.47)$$

Such a density variation induces a variation of the mean-field

$$\delta U(\omega) = \alpha(\omega) \partial U / \partial \alpha \quad (3.48)$$

A dispersion relation for the frequencies of the collective modes can be deduced from the self-consistency condition that is obtained by inserting the solution of the RPA equation for  $\delta\hat{\rho}(\omega)$  into the right hand side of eq.(3.44). This gives

$$\frac{\alpha(\omega)}{K} = \sum_{i,j} \frac{\alpha(\omega) \langle i|\partial U / \partial \alpha|j\rangle \langle j|\hat{D}|i\rangle}{\hbar\omega - \epsilon_i + \epsilon_j} (\rho_j - \rho_i), \quad (3.49)$$

This dispersion relation is valid, in principle, for any choice of  $\hat{D}$ , provided that the parametrization (3.45) is a good approximation for the density fluctuations in a multipole mode. In fact, the dispersion relation is not very sensitive to the specific form of  $\hat{D}$  so we can take  $\hat{D} = \partial U / \partial \alpha$ . This gives rise to a symmetric dispersion relation,

$$\frac{1}{K} = \sum_{i,j} \frac{|\langle j|\hat{D}|i\rangle|^2}{\hbar\omega - \epsilon_i + \epsilon_j} (\rho_j - \rho_i), \quad (3.50)$$

which is equivalent to the RPA problem with a separable interaction of the form,

$$V(1, 2) = \frac{1}{2} K \hat{D}(1)\hat{D}(2), \tag{3.51}$$

with the coupling constant  $K$  given by the normalization factor in eq.(3.47).

The dispersion relation (3.50) allows to determine frequencies  $\omega$  associated with the collective modes. This dispersion relation can be solve graphically outing the intersection of the curve

$$y = \sum_{i,j} \frac{|\langle j|\hat{D}|i\rangle|^2}{\hbar x - \epsilon_i + \epsilon_j} (\rho_j - \rho_i), \tag{3.52}$$

with the line

$$y = \frac{1}{K} \tag{3.53}$$

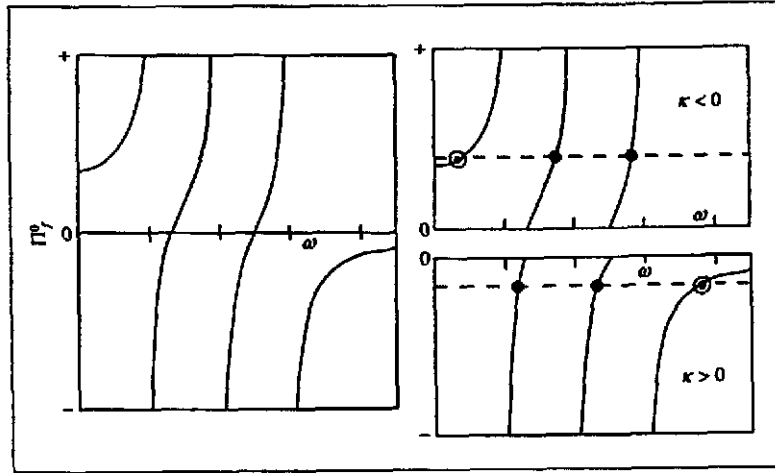


Figure 5 Schematic picture of the graphic resolution of the dispersion relation.

### 3.2.3.4 Zero-Temperature RPA

At zero-temperature the ground state is described by a single Slater determinant. The occupied states are usually called holes (h) while the unoccupied orbitals are named particles (p). In this case the RPA Eq. (3.34) reduces to the zero-temperature RPA equation :

$$i \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{ph}^{(1)} \\ \dot{\rho}_{hp}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{ph}^{(1)} \\ \rho_{hp}^{(1)} \end{pmatrix} . \tag{3.54}$$

In this equation, we have introduced the matrices  $A$  and  $B$  which are given by:

$$\begin{aligned} A_{ph,p'h'} &\equiv K_{ph,p'h'} \\ B_{ph,p'h'} &\equiv K_{ph,t'p'} \end{aligned} \tag{3.55}$$

Solving the RPA equation (3.54), we must introduce the eigenenergy and eigenvalues of the RPA matrix :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix} . \tag{3.56}$$

The positive frequencies define the eigenmodes of the nucleus and  $X$  and  $Y$ , the transition from the ground state to the excited state  $|\nu\rangle$  induced by the one-body operator  $F$  (see appendix 5.3):

$$\langle 0|F|\nu\rangle = \sum_{ph} F_{hp} X_{ph}^\nu + F_{ph} Y_{ph}^\nu = \langle\langle F||\mathcal{X}^\nu \rangle\rangle . \tag{3.57}$$

We can therefore compute the strength function associated with the operator  $F$

$$S(E) \equiv \sum_\nu |\langle 0|F|\nu\rangle|^2 \delta(E - \omega_\nu) = \sum_\nu |\langle\langle F||\rho_\nu^{(1)} \rangle\rangle|^2 \delta(E - \omega_\nu) . \tag{3.58}$$

Since the introduction of the RPA [Bo53] in nuclear physics [Gl59, Fa59a, Go59a, Ta59, Ik59, Ar60, Ba60, Ka60, Ma60, Th61a] numerous applications have been worked-out and it is beyond the scope of the present article to review them all. We will only discuss some important points and refer the reader to the existing articles and textbooks (for example see refs. [Ri81, Sp91]) for a more complete status report on this subject. We will in particular concentrate the discussion on the self-consistent RPA approaches which are fully microscopic [Be75, Be74, Li76, Bl76, Kr77, Bl77, Li76a].

Two avenues have been investigated up to now. The first approach consists in the diagonalization of the H.F.

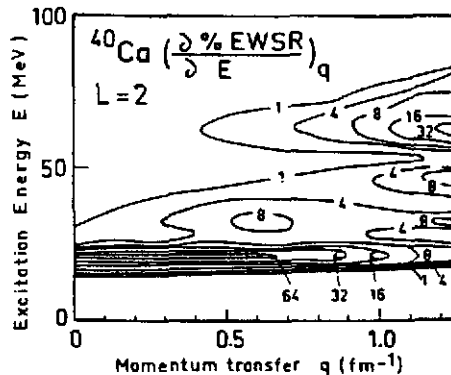


Figure 6 Quadrupole Strength : From ref. [De82] and [Bl88]. Bidimensional contour plot of the  $L=2$  response of  $^{40}\text{Ca}$  to the  $j_L(qr)$  operator as a function of the momentum transfer  $q$  and of excitation energy  $E$ .

mean-field on a discrete basis followed by a diagonalization of the RPA matrix. Figure 6 presents the quadrupole strength obtained from a self consistent RPA calculation using a finite range effective force, the Gogny force D1 [De82]. The giant quadrupole resonance is clearly observed around 20 MeV. This figure also illustrates the extreme sensitivity of the shape of the strength to the excitation operator  $F$ .

The second possibility is to compute directly the strength function in the continuum. This approach is based on the Green's function methods. The RPA Green's function can be directly computed from equation (5.21). For finite-range nuclear forces, this method presents enormous numerical difficulties. However, the problems become much simpler for zero-range effective interactions such as Skyrme forces [Be73, Sh75, Be75, Li76a, Ts78] because one can solve the Bethe-Salpeter equation (5.21) directly in coordinate space (see appendix 5.2).

An example of such a calculation is shown in Fig. 7 from [Ch88]. Only the continuum part of the strength is represented. It can be seen that this calculation predicts a width for the peaks and giant resonances. This width

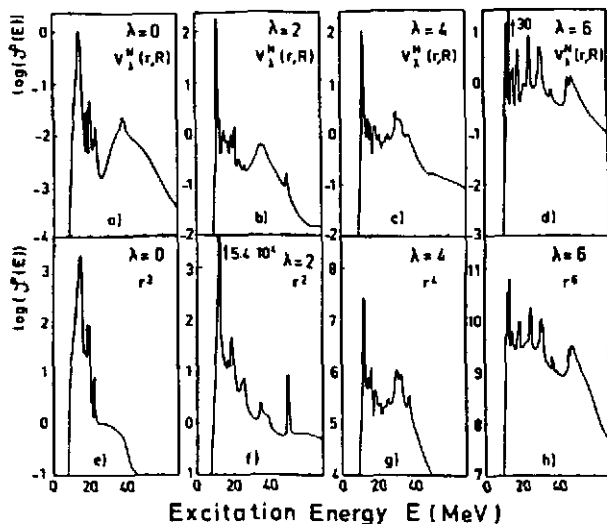


Figure 7 Multipole Strength : From ref. [Ch88] : RPA strength distributions in  $^{208}\text{Pb}$  induced by an  $^{36}\text{Ar}$  projectile calculated with : (1) the excitation operator corresponding to the  $\text{Ar}$  at a distance  $R = 11.35\text{fm}$ , (parts(a)-(d) in  $\text{MeV}$ ) ; (2)  $r^{\lambda'} Y_{\lambda 0}(r)$  with  $\lambda' = \lambda$  if  $\lambda > 1$  or  $\lambda' = \lambda + 2$  if  $\lambda \leq 1$ , (parts(e)-(h) in  $\text{fm}^{2\lambda'} \text{MeV}^{-1}$ )

includes both the Landau spreading and the escape width.

### 3.2.3.5 Multiphonon Strength

The RPA approximation is an harmonic approximation therefore we can define a multiple excitation strength as

$$S(E, n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} |\langle o|F|\nu_1\rangle|^2 \dots |\langle o|F|\nu_n\rangle|^2 \delta(E - (\omega_{\nu_1} + \dots + \omega_{\nu_n})) \quad (3.59)$$

which reduces to the usual strength function  $S(E)$  (3.58) for  $n=1$ . This multiple excitation strength can be also expressed as a folding of the strength function

$$S(E, n) = \frac{1}{n!} \int dE_1 \dots \int dE_n S(E_1) \dots S(E_n) \delta(E - (E_1 + \dots + E_n)) \quad (3.60)$$

This expression is also valid in the case of a continuous spectrum. The folding product (3.60) is intimately related to the assumption that phonons are purely harmonic vibrations. This is clearly a very crude approximation which needs to be carefully investigated. To get a handle on the magnitude of the anharmonic effects one clearly needs to go beyond the RPA. This will be the subject of the next paragraphs.

### 3.2.4 Adiabatic TDHF approximation

The adiabatic TDHF (ATDHF) approximation is intended to describe slow collective motion of large amplitude. However, from the previous discussions, it appears that giant resonances are akin to the diabatic motion of the nucleons in a rapidly vibrating mean-field. So, it may seem surprising to use the ATDHF formalism to study giant resonances. This apparent contradiction can be resolved by recalling that the adiabaticity condition is in fact defined by comparing the collective velocity measured by the collective kinetic energy with the single-particle energy times the number of nucleons involved in the motion [Ba72, Vi72, Vi75, Br76, Vi77, Ba78, Ri81]. Therefore it can be valid for the description of collective modes in which many nucleons are participating. This is precisely the case of giant resonances.

In this section we will show how the approximation leads to the definition of collective potentials and masses which give direct access to the anharmonicity of the phonons (a more detailed discussion can be found in appendix 5.4). Indeed, we will show that the problem reduces to the quantization of the collective degrees of freedom in this collective potential.

The basic idea is to decompose  $\rho$  in order to extract a velocity field and a set of collective coordinates. Since the coordinates are usually time reversal invariant quantities, Baranger and Vénéroni [Ba78] proposed to decompose the density using two time-even Hermitian matrices, a density  $\rho^{(0)}(t)$  and a velocity field  $\chi(t)$ :

$$\rho(t) = e^{i\chi(t)} \rho^{(0)}(t) e^{-i\chi(t)} \quad (3.61)$$

They also proposed the adiabatic approximation assuming that  $\rho(t)$  is very close to  $\rho^{(0)}(t)$ , i.e. that the velocity field is small enough to be treated perturbatively. Using the density (5.35) the Hartree-Fock energy can be expanded as:

$$E(\rho) = E(\rho^{(0)}) + \frac{1}{2} \ll \chi \| \mathcal{M}^{-1} \| \chi \gg \quad (3.62)$$

where we have introduced the mass tensor which reads using the RPA notation:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{K}\mathcal{F})^{-1} \quad (3.63)$$

The first term in equation (3.62) can be interpreted as a potential energy  $V(\rho^{(0)})$  whereas the second one corresponds to a kinetic energy term  $T(\chi, \rho^{(0)})$ . The energy  $E$  plays the role of a classical Hamiltonian for which  $\rho^{(0)}$  and  $\chi$  appear as conjugate variables. Therefore, the dynamical equations for  $\rho^{(0)}$  and  $\chi$  can be derived from the Hamiltonian equations:  $\|\dot{\rho}^{(0)}\| \gg \|\partial E / \partial \chi^*\|$  and  $-\|\dot{\chi}\| \gg \|\partial E / \partial \rho^{(0)}\|$ . However, they are often too difficult to solve without further approximations. In fact this approach is really useful if we can assume that the density  $\rho^{(0)}(t)$  is driven by an ensemble of collective coordinates  $Q(t)$

$$\|\rho^{(0)}(t)\| \gg \|\rho^{(0)}(Q(t))\| \gg \quad (3.64)$$

In such a case, we can write the kinetic energy as  $T = \frac{1}{2} \dot{Q} M \dot{Q}$  where the mass tensor is defined in appendix 5.4. Therefore, if we define the momentum  $P = M \dot{Q}$ , equation (3.62) yields the collective Hamiltonian

$$E(\rho) \equiv H(P, Q) = \frac{1}{2} P M P + V(Q) \quad (3.65)$$

where the potential is the mean value of the energy associated with  $\rho^{(0)}$ :  $V(Q) \equiv E(\rho^{(0)})$ . Therefore, the ATDHF approximation leads to a classical Hamiltonian similar to the one of the macroscopic approaches.

The last step of the ATDHF approximation is to requantify the classical collective Hamiltonian (3.65) in order to define the ground state and the excited states of the system. If the anharmonicity is weak the lowest excited states can be associated with the single phonon whereas the higher states can be interpreted as multiple excitations.

However before studying the spectrum of predicted excitations one must discuss the validity of the ATDHF treatment as far as the giant resonances are concerned.

The adiabaticity approximation implies that the time-odd component of any single particle wave function is small. This condition can be shown to be equivalent to the requirement that the collective kinetic energy is small in comparison with the typical particle-hole energy times the number of states participating in the collective mode. Therefore, it can be applied to the description of giant resonances.

In principle, the ATDHF treatment also gives access to the anharmonicities of the modes because the Hamiltonian (3.62) or (3.65) do not imply an harmonic approximation. Realistic calculations have been carried out with Skyrme forces [En75, Va75, Gi76, Go77, Gi80]. They all have to face the problem of defining the collective variable i.e. the collective path  $\rho^{(0)}(Q)$ . Two possibilities are often explored, either performing a constrained Hartree-Fock calculation or simply scaling the ground state density. Fig 8 shows the potential energy  $V(Q)$  computed in ref. [Gi80] using the scaling approach and Fig.9 presents the associated mass parameter.

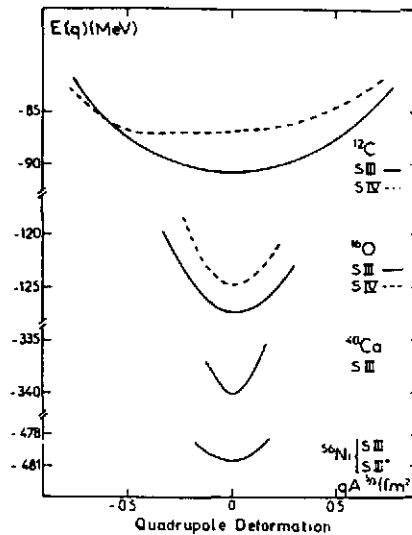


Figure 8 ATDHF Potential.: From ref. [Gi80], Potential energy  $V(\alpha)$  as a function of the quadrupole deformation parameter  $Q$  for  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  and  $^{56}\text{Ni}$ . The dashed line were obtained using the Skyrme interaction SIV while the solid curve represents the results obtained using the SIII interaction.

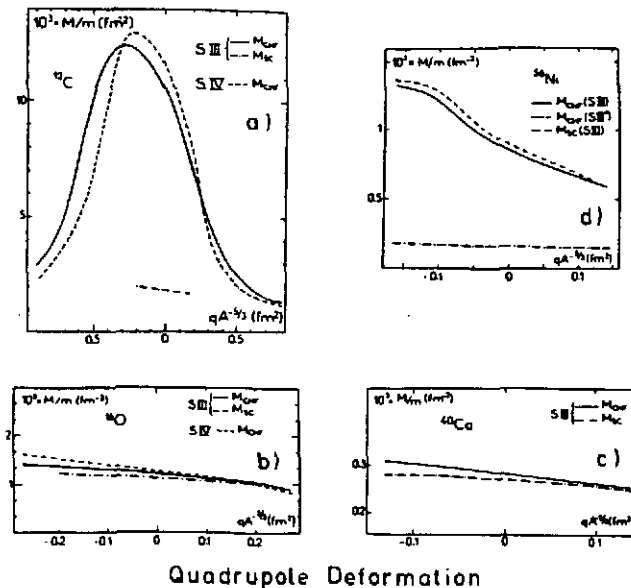


Figure 9 ATDHF Masses. : From ref.[Gi80], adiabatic mass parameters,  $M_{CHF}$ , associated with the quadrupole modes in various nuclei  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Ni}$  obtained from a constrained HF calculation with the quadrupole operator  $Q_{20}$  of the static HF solution

It can be seen that open shell nuclei such as  $^{12}\text{C}$  present strong anharmonicities whereas closed-shell nuclei can be considered as good harmonic vibrators. For example in the case of the quadrupole deformation,  $Q = \langle x^2 + y^2 - 2z^2 \rangle$ ,

of the  $^{40}\text{Ca}$  nucleus we can parametrize the potential energy and the mass as [Tr81]

$$V(Q) = \frac{1}{2}M_0\omega^2Q^2 + V_3Q^3 \quad (3.66)$$

$$M(Q) = M_0 + M_1Q, \quad (3.67)$$

where  $M_0/m_n = 0.285 \cdot 10^{-3}$  ( $m_n$  being the nucleon mass)  $M_1/m_n = -0.28 \cdot 10^{-6} \text{ fm}^{-4}$ ,  $\omega = 17.5 \text{ MeV}$  and  $V_3 = -0.14 \cdot 10^{-5} \text{ MeV fm}^{-6}$ .

The relative anharmonicity can be estimated from the ratio between the harmonic and the anharmonic parts of the potential computed at a typical deformation. If we introduce the zero point motion  $Q_0^2 = 1/M\omega$  as a typical deformation we get a relative anharmonicity  $(2V_3Q_0)/M_0\omega^2$  of the order of -0.1. This is a rather small value which is however larger than the simple estimate (2.87) which gives around -0.02 for the  $^{40}\text{Ca}$ .

The ATDHF method can be useful for the computation of non linearities and anharmonicities. However, a systematic study remains necessary to realistically extract the properties of multiphonon states. One difficulty lies in the fact that for such calculations, many degrees of freedom need to be taken into account, such as the different angular momenta  $\lambda\mu$ . Moreover, the ambiguities in the definition of the collective variable complicate the problem. In particular, one may think of using several collective variables for the same angular momentum, or even a complete set of collective operators such as in equations (5.41) and (5.42). But then the method becomes intractable. A way to construct the "good" collective variables is to introduce the RPA eigenstates and to use the ATDHF treatment to compute corrections to the RPA. In the next section we will discuss two other ways to requantify TDHF and we will discuss their predictions concerning in particular the anharmonicities. However, as far as the ATDHF approach is concerned, we have seen that the anharmonicity of the giant resonances in closed-shell nuclei is predicted to be around 10 %.

### 3.2.5 Generator Coordinate Method

In the previous section we have discussed the ATDHF approximation and have shown how this method leads to the definition of a classical Hamiltonian in terms of  $\rho^{(0)}$  and  $\chi$  (see eq. (3.61)) or in terms of some collective variables  $Q$  and  $P$  (see eq. (5.35)). These results were derived within the mean-field approximation. However, requantifying the ATDHF Hamiltonian goes beyond the mean-field approximation. Indeed, an eigenstate will correspond to a wave function  $f$  in the collective coordinate  $Q$  so that the many-body wave function can be viewed as a superposition of Slater determinants which cannot be considered as an independent particle wave function.

This idea to coherently mix several generating many-body wave functions such as Slater determinants is in fact the starting point of the method called GCM, Generator Coordinate Method [Hi53, Gr57, La74, Mo76, La76, To77, To78, Ri81]. Let us consider a continuous set of generating many-body wave functions  $|\Phi(Q)\rangle$  which are labelled by an ensemble of coordinates  $(Q_\mu)$  and let us construct a many-body wave function  $|\Psi\rangle$  as a linear superposition of the  $|\Phi(Q)\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \int dQ f(Q) |\Phi(Q)\rangle, \quad (3.68)$$

where  $f$  is a weight function. The  $|\Psi\rangle$ 's form a trial set which can be used to variationally determine the eigenstates of the exact many body problem. It should be noticed that the trial set may possibly contain all the Hilbert space. This is for example the case if  $Q$  is the one-body density itself because the Slater determinants are a basis of the Hilbert space.

Determining the extremum of  $\langle\Psi|H|\Psi\rangle - E\langle\Psi|\Psi\rangle$ , where  $E$  is a Lagrange multiplier associated with the normalization of the wave functions, yields the equation

$$\int dQ' \langle\Phi(Q')|H|\Phi(Q)\rangle f(Q) = E \int dQ \langle\Phi(Q')|\Phi(Q)\rangle f(Q), \quad (3.69)$$

when variations of  $f^*$  are considered.

The equation (3.69) can be viewed as a generalized eigenvalue problem for the weight function  $f$ , the so-called Hill-Wheeler equation [Hi53]:

$$\mathcal{H}f = ENf, \quad (3.70)$$

where  $\mathcal{H}(Q, Q') = \langle\Phi(Q)|H|\Phi(Q')\rangle$  and where  $\mathcal{N}(Q, Q') = \langle\Phi(Q)|\Phi(Q')\rangle$  is an overlap metrics.

The equation (3.70) can be solved directly in some cases by discretization of the variable  $Q$ . This method was used in different calculations of monopole and quadrupole phonon spectra [Ca73, Ab75, Gi75, Fl75, Kr76, Fl76].

One can see on table 3.1 that the CGM method predicts rather small anharmonicities.

In addition to the direct solutions of the Hill-Wheeler equation, numerous approximations have been developed to transform it into a Schrödinger equation in the collective variable  $Q$  [Fe72, Ha73, Ba73, Ho73, Gi75, Re76].

For example, assuming that the overlap metrics is Gaussian, one gets a collective Hamiltonian which is close to the ATDHF Hamiltonian except for the mass parameter [Hi53, Pe62, Ja64, Ka68, Vi75], which is generally not as good. Moreover, it should be noticed that, as far as the ambiguity in the definition of the collective variable is concerned, the CGM method faces the same problems as the ATDHF approach.



	$^{16}\text{O}$	$^{40}\text{Ca}$
$E_0$	-140.3	-403.3
$E_1$	-108.7	-374.9
$E_2$	-81.8	-347.0

Table 3.1 GCM Results. From ref. [Fl76], energies of the three first solution of the Hill-Wheeler equation for the isoscalar monopole resonance calculated using the SIII Skyrme force.

Two other avenues have been followed in the literature. The first one is to use the CGM to deduce a mapping of the fermion dynamics into a dynamics of bosons. This will be the subject of the section on boson expansions. The second avenue is to introduce schematic models. In particular the Lipkin model or other two level models can be explicitly solved [Be92]. Another classical example is given by the deformed oscillator model [Dr88] in which the single particle wave functions are simply boosted harmonic oscillator eigenfunctions. However these simple models must be considered as tests for more elaborated approximations or treatments. In particular the above models have been used to test the description of eigenstates in terms of TDHF periodic orbits as we will discuss in the next section.

### 3.2.6 Periodic orbits of TDHF

The TDHF approximation assumes that at each time  $t$  the nucleus is described by a Slater determinants or more generally a density matrix which is the exponential of a one body operator. Therefore, the TDHF equation can be considered as the evolution equation of mean values of one-body observables. In this sense, it is a classical approximation and it needs to be quantified in order to yield energy levels of the system. One standard approach is the semiclassical quantization of periodic orbits.

In fact, the importance of periodic orbits has been recognized in classical mechanics [Po1892] for more than a hundred years. The idea of obtaining the energy levels of a microscopic system by quantifying its action along periodic orbits proposed by Bohr for the description of the hydrogen atoms, was a key step towards the elaboration of quantum mechanics

In the 70's, a well-founded relation between the periodic orbits of a classical system and the energy levels of the associated quantum problem has been developed by Gutzwiller [Gu67, Gu69, Gu70, Gu71]. In particular, this author showed how to approximate the quantum Green's function (or the level density) as a sum over all possible periodic trajectories. These studies were pursued and extended by many authors [Ba72, Ba74, Be76, Be77, Pe77]. As far as the periodic orbits of mean field approximations are concerned, their connections with the energy spectrum were elucidated in several references [Ka79, Le80, Le80a, Bl81, Ne82, Za84, Dr86a].

In particular, using functional integral techniques and saddle point approximations, the role of periodic orbits was made explicit and the condition of quantization derived. The result can be qualitatively understood by noting that the Green's function in its spectral representation involves a Fourier transform in the time coordinate. Periodic orbits will dominate because they provide an equal contribution at each period. However, the phase of this contribution over a period must be a multiple of  $2\pi$  otherwise the different terms do cancel out. This condition yields the desired quantization procedure.

Then the general problem of finding exact periodic trajectories of a given Hamiltonian arises. For a classical system with few degrees of freedom this problem has already been widely discussed (see for example ref. [Za84]). In the nuclear context, similar methods were tested. For example, the method proposed in ref. [Ca85] is based on an iterative construction of a family of periodic orbits. From a periodic orbit at an energy  $E$  one can build another trajectory at an energy  $E + \delta E$  using the linear response theory. The new trajectory can be adjusted in order to be periodic through the Newton method. However, this method was only applied to schematic cases because of its intrinsic complexity when many degrees of freedom are coupled.

The method proposed in ref. [Ch86] is an iterative method based on the existence of a distance in the Liouville space constructed from the scalar product (3.28)

$$\ell(\rho, \varrho) = \ll \rho - \varrho | \rho - \varrho \gg \quad (3.71)$$

Therefore, if one starts with an arbitrary solution  $\rho(0)$ , one can first find the period  $T$  for which the distance,  $\ell(\rho(0), \rho(T))$ , is minimum. One can thus look for the small variation  $\delta\rho(0)$  which will reduce the distance  $\ell(\rho(0), \rho(T))$ . It is explained in appendix 5.5 how using a linear approximation for the evolution of  $\delta\rho$  it is possible to iteratively reduce the distance  $\ell$ .

This method was successfully applied in ref. [Ch86] to the monopole vibration. However, an exhaustive study of different vibrations remains to be done. The main difficulties associated with this method is that it requires important numerical effort. Moreover, this method faces some difficulties when considering unbound states which cannot be periodic due to their decay except if an external gas of nucleons is added which will however perturb the response.

The problem of finding periodic trajectories was recently revisited by A. Abada and D. Vautherin [Ab91, Ab92, Ab92a], who proposed an elegant method, a perturbative expansion in the amplitude of the collective vibrations, to find periodic orbits. This method is in fact a standard technique used in celestial mechanics [Po1892] or in the theory of non linear oscillators [La69].

The basic idea is to expand the density in powers of a small number, the amplitude of the oscillations  $\epsilon$

$$\rho(t) = \rho^{(0)} + \epsilon \rho^{(1)}\left(\frac{\omega t}{\omega^{(0)}}\right) + \epsilon^2 \rho^{(2)}\left(\frac{\omega t}{\omega^{(0)}}\right) + \epsilon^3 \rho^{(3)}\left(\frac{\omega t}{\omega^{(0)}}\right) + \dots, \quad (3.72)$$

where the frequency is also expanded in a power series of  $\epsilon$ :

$$\omega = \omega^{(0)} + \epsilon \omega^{(1)} + \epsilon^2 \omega^{(2)} + \epsilon^3 \omega^{(3)} + \dots \quad (3.73)$$

The dynamical equations for  $\rho^{(n)}$  are obtained from the expansion of the TDHF equations (3.26) at the  $n$ 'th order in  $\epsilon$  (see appendix 5.5).

The equation for  $\rho^{(1)}$  is the RPA equation which implies that  $\delta\rho$  can be expanded on to the RPA eigenstates as follows

$$\|\rho^{(1)}(t)\rangle \gg = \sum_{\nu} a_{\nu} \left( \|\mathcal{X}^{\nu}\rangle \gg e^{-i\omega_{\nu}^{(0)}t} + \|\mathcal{X}^{\nu\dagger}\rangle \gg e^{i\omega_{\nu}^{(0)}t} \right), \quad (3.74)$$

where the  $a_{\nu}$  are free parameters. If we are looking for periodic solutions we can only mix commensurable frequencies. The equations for  $\rho^{(n)}$  are RPA equations containing source terms generated by products of lower order terms which might be resonant. The requirement that no resonance are present in the source terms leads to the equations for the  $\omega^{(n-1)}$ . When this condition is fulfilled the equations for  $\rho^{(n)}$  can be solved. The above procedure can be iterated in order to find all the the frequencies  $\omega^{(n)}$  requiring that no resonant terms appear in the equation of evolution of  $\rho^{(n+1)}$ . The last step is to calculate the action on a given trajectory and to apply a quantization rule in order to define the deformation parameter  $\epsilon$ . (see appendix 5.5) This procedure gives corrections to the one phonon state frequency  $\omega_1$  and also to the two phonon states  $\omega_2$ . In realistic calculations, one needs to introduce the angular momentum. In refs. [Ab91, Ab92, Ab92] an ansatz is proposed in analogy with the idea of the projection onto a good angular momentum.

$^{16}\text{O}$				$^{40}\text{Ca}$			
$J^{\pi}$	$\omega^{(2)}$	$E^*$	$\delta E$	$J^{\pi}$	$\omega^{(2)}$	$E^*$	$\delta E$
$0^+$	362.4	13.793	1.683	$0^+$	421.2	10.134	2.134
$2^+$	260.7	13.251	1.141	$2^+$	121.2	8.516	0.516
$4^+$	-19.9	12.031	-0.079	$4^+$	-16.1	7.936	-0.064
$6^+$	-63.5	11.861	-0.249	$6^+$	20.9	8.085	0.085

Table 3.2 Periodic TDHF Results. From ref. [Ab92], two-octupole-phonon states in  $^{16}\text{O}$  and  $^{40}\text{Ca}$ . For each state are reported its spin and parity,  $\omega^{(2)}$  in keV, the excitation energy  $E^*$  in MeV and the shift  $\delta E$  (in MeV) with respect to the unperturbed energy  $\omega^{(0)}$ .

Table (3.2) gives the excitation energies of the two-phonon states built with the octupole low-lying collective states in  $^{16}\text{O}$  and  $^{40}\text{Ca}$ . For  $^{16}\text{O}$ ,  $\hbar\omega_3^{(2)} = 0.547\text{MeV}$  and the quantization gives  $E_1^* = 6.666\text{MeV}$  and  $E_2^* = 14.78$ . The anharmonicity defined by  $A_n = \epsilon_n^2 \omega^{(2)}/\omega$ , is equal to 9% for the first state and 18% for the second state when the angular momentum is not introduced and a splitting of 2 MeV is predicted using the projection ansatz. For the  $^{40}\text{Ca}$ ,  $\hbar\omega^{(2)} = 0.547\text{MeV}$  so that  $E_1^* = 4.63\text{MeV}$  and  $E_2^* = 11\text{MeV}$  when no projection is applied.

Ref. [Ab92] also presents results for the quadrupole state in  $^{40}\text{Ca}$ . In this case, it appears that a non-collective state is very close to the excitation energy of the two-phonon state. This case can be included in the formalism by introducing the resonant state in  $\rho^{(1)}$ . This coupling gives a first-order correction to  $\omega$  which yields a very small splitting of the two phonon states of about 1 MeV.

To conclude on the use of periodic orbits, we may say that it is a very promising and powerful method. However, many questions remain open and so there is still a lot of work to be done. In particular, the projection onto a good angular momentum is not justified: there is no reason to associate the order of the perturbative expansion to the number of phonons  $n$ . Indeed, if we are interested in 3-phonon states, the angular momenta can be coupled to  $\lambda_3$  between 0 and  $3\lambda$ . We expect that the second order  $\omega^{(2)}$  will give corrections to all the 3-phonon states, but if we use the projection assumption we realize that  $\omega^{(2)}$  does not contribute for the 3-phonon states of  $\lambda_3$  greater than  $2\lambda$ . For these states, only the third order will contribute, which is somewhat peculiar. This remark is related to the problem of coupling different states, which has not yet been studied. The last question arises from the fact that the presented methods are based on the mean-field approach. This may induce specific features or limitations which have not yet been investigated. In particular, one may want to investigate the dynamics of density matrices containing correlations, e.g.  $D = \exp(0^{(1)} + 0^{(2)})$ , where  $0^{(1)}$  is a one-body operator and  $0^{(2)}$  is a two-body operator. This approach will yield some extended TDHF approximation which will exhibit a variety of periodic orbits which can be different from the trajectories found in the mean-field approach.

The present method naturally extends previously described approaches such as the RPA and it correctly treats the Pauli exclusion principle. In the next section, we will present the boson expansion method which is supposed to be a fully quantum approach. However, the present classical approach raises questions about the dynamics of the nucleus vibrations described as non-linear oscillators. For example, it is known in classical mechanics that the response of an

anharmonic oscillator exhibits new phenomena. In particular, around a resonance  $\omega_0$ , the response is different from the linear case because it depends on the strength of the external perturbation [La69].

For example, let us consider the classical non linear damped oscillation of an oscillator with an equation of motion

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^{(0)2}x = -\alpha x^2 - \beta x^3 + \frac{f}{m} \cos \omega_f t . \quad (3.75)$$

We can see that the resonance frequency is given by  $\omega(b) = \omega^{(0)} + \omega^{(2)}b^2$ , where  $b^2$  is the amplitude of the oscillation and  $\omega^{(2)}$  is given by  $\omega^{(2)} = (3\beta/\delta\omega_{(0)} - 5\alpha^2/12\omega^{(0)3})$ . The amplitude of the forced motion is given by the equation

$$b^2 ((\omega_f - \omega(b))^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega^{(0)2}} , \quad (3.76)$$

so that the resonance looks like the schematic picture shown on Fig.(10) For a very small perturbation  $f$  we recover

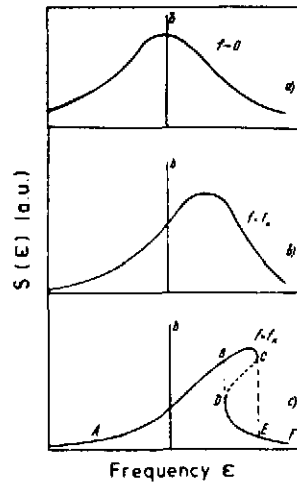


Figure 10 Classical Response : Schematic drawing of the non-linear response for increasing perturbation strength  $f$  showing a transition from a linear regime ( $f \rightarrow 0$ ) to a critical behavior  $f > f_k$ , (from top to bottom).

the usual response but when  $f$  increases the response is deformed up to a critical value

$$f_k^2 = \frac{32m^2\omega^{(0)2}\lambda^3}{3\sqrt{3}|\omega^{(2)}|} , \quad (3.77)$$

after which the strength exhibits regions with two stable and one unstable solutions. In the nuclear case we get a critical perturbation :

$$|\ll X^\nu || F_k \gg|^2 = \frac{8\Gamma^3}{3\sqrt{3}|\omega^{(2)}|} , \quad (3.78)$$

where  $\Gamma$  is the width of the state  $\nu$  and  $\omega^{(2)}$  the quadratic correction to the frequency.

In conclusion, strong fields may generate a critical behavior for the response function. Other resonances, critical or not critical, can be observed for frequencies around  $n\omega_0/m$ . These non-linear features may also be important because we may excite a resonance at the energy  $\omega$  with an external field which does not contain components at this frequency but only components at lower frequencies  $\omega_0/2$  or  $\omega_0/3$ . This may, for example, be the case for Coulomb excitation at low incident energy, which presents a cut off at high energy response. However, the anharmonic oscillation need to be studied further. In particular the discussed properties are observed in classical mechanics and may be different when quantum mechanics is applied.

### 3.2.7 An Example the Lipkin model

Let me first illustrate this method on a simple model: the Lipkin model. In this model two levels containing states labelled by the quantum number , can be occupied by particles. [?]

#### 3.2.7.1 The Hamiltonian

The energy difference between the two levels is  $\epsilon$ . The operator  $a_{\sigma,n}^\dagger$  ( $a_{\sigma,n}$ ) creates (annihilates) a particle on the level with the energy  $E = \sigma\epsilon/2$  with  $\sigma = \mp 1$  at the position  $n$ . Since each particle  $n$  can only occupied two levels we can

describe it in analogy with the spin 1/2 which is called pseudo-spin. The algebra

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\Omega} (a_{+,m}^\dagger a_{+,m} - a_{-,m}^\dagger a_{-,m}) \\ K_+ &= \sum_{m=1}^{\Omega} a_{+,m}^\dagger a_{-,m} \\ K_- &= (K_+)^\dagger = \sum_{m=1}^{\Omega} a_{-,m}^\dagger a_{+,m} \end{aligned} \quad (3.79)$$

does correspond to pseudo-spin operators which fulfils the standard SU(2) commutation algebra

$$[K_+, K_-] = 2K_0 \quad [K_0, K_\pm] = \pm K_\pm \quad (3.80)$$

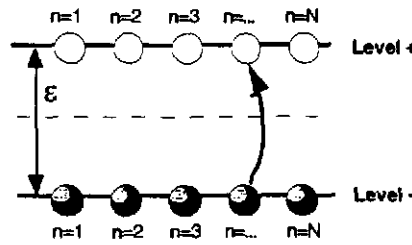


Figure 11 Schematic representation of the Lipkin model in which two levels with  $N$  available sites can be occupied by  $N$  particles.  $\epsilon$  is the energy distance between the two levels.

We introduce a residual interaction between the various particles in such a way that the Hamiltonian reads

$$H_{LMG} = \epsilon K_0 + V_1 K_x^2 \quad (3.81)$$

where

$$K_x = \frac{K_+ + K_-}{2} \quad (3.82)$$

Looking at the form of the residual interaction we can see that it can only generate jumps from the lower level to the upper one or vis versa without changing the quantum number.

### 3.2.7.2 The Hilbert space

The model we are considering thus reduces to the known problem of  $N$  coupled spin. Therefore the Hilbert space can be decomposed into irreducible subspaces with a good total pseudo-spin. The state in which all the particles occupied the lower level pertain to the unique subspace associated with the maximum pseudo-spin  $J = N/2$ . We note this state  $|J, -J\rangle$  while the other members of the considered multiplet are  $|J, M\rangle$ . It should be noticed that since the Hamiltonian is completely written in terms of the pseudo-spin operators the Hamiltonian does not couple subspace with different total pseudo-spin.

In each subspace all the operators can be computed using the pseudo-spin properties

$$\begin{aligned} K_\pm |J, M\rangle &= \sqrt{J(J+1) \pm M(M+1)} |J, M \pm 1\rangle \\ K_0 |J, M\rangle &= M |J, M\rangle \end{aligned} \quad (3.83)$$

Therefore this model can be easily exactly solved.

If we neglect the residual interaction, the ground state of the system is naturally  $|J, -J\rangle$  which energy is nothing but  $-\epsilon N/2$ . In this state all the particles are occupying the lowest accessible orbital. This is the analogous of the Hartree-Fock ground state. In the following we will use this state to construct the TDHF coherent states.

### 3.2.7.3 Coherent states of SU(2)

For this model the coherent states are naturally provided by the application of a SU(2) unitary transformation on the Hartree-Fock ground state which is equivalent to the rotation group. Therefore the parameters are nothing but the

rotation angles. In the present case using the Euler angles we can define the Slater  $|\psi(t)\rangle$ , through a rotation of the HF groundstate par rotation de ,

$$|\psi(Z(t))\rangle = \hat{R}(Z(t))|0\rangle = e^{-i\alpha(t)K_x} e^{-i\beta(t)K_y} e^{-i\gamma(t)K_z} |0\rangle \quad (3.84)$$

where  $Z = (\alpha, \beta, \gamma)$  are the Euler angles and  $K_y = (K_+ + K_-)/2i$ . If we assume that  $|0\rangle = |J, -J\rangle$  then the rotation of the angle  $\gamma$  only modify the phase and so can be omitted. Then the parameters of the coherent state are only the two Euler angles  $Z = (\alpha, \beta)$

To evaluate expectation values over the state  $|\psi(Z(t))\rangle = \hat{R}(Z(t))|0\rangle$  of any operator  $\hat{D}$  it is often convenient to introduce the inverse transformation of  $\hat{D}$  :

$$\hat{D}(Z(t)) = \hat{R}^\dagger(Z(t)) \hat{D} \hat{R}(Z(t)) \quad (3.85)$$

so that the relation

$$\langle \hat{D} \rangle (t) = \langle \psi(Z(t)) | \hat{D} | \psi(Z(t)) \rangle = \langle 0 | \hat{D}(Z(t)) | 0 \rangle \quad (3.86)$$

In particular we only need to transform the operators  $\hat{K}$ . Since  $\hat{K}$  is a vector a simple geometrical analysis shows that

$$\begin{pmatrix} K_x(Z) \\ K_y(Z) \\ K_z(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

Therefore it is easy to compute as

$$\begin{pmatrix} \langle K_x \rangle \\ \langle K_y \rangle \\ \langle K_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0 | K_x(Z) | 0 \rangle \\ \langle 0 | K_y(Z) | 0 \rangle \\ \langle 0 | K_z(Z) | 0 \rangle \end{pmatrix} = -J \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

These three relations gives the correspondence between  $\langle K \rangle$  and the Euler parameters  $Z = (\alpha, \beta)$ . It should be noticed that the  $\langle K \rangle$  is a vector of norm J therefore only two angles are needed to define it completely.

### 3.2.7.4 Mean- eldsolution

Now we can study the dynamics of the system assuming that the wave functions are restricted to coherent states  $|\psi(Z(t))\rangle$ . The evolution of the  $Z = (\alpha, \beta)$  or of the averaged value  $\langle K \rangle$  are obtained using the generalized Ehrenfest equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = - \langle [H, A] \rangle \quad (3.89)$$

where all the averages are evaluated over the coherent state  $|\psi(Z(t))\rangle$

$$\begin{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial t} \langle K_x \rangle \\ i \frac{\partial}{\partial t} \langle K_y \rangle \\ i \frac{\partial}{\partial t} \langle K_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle [K_x, H] \rangle \\ \langle [K_y, H] \rangle \\ \langle [K_z, H] \rangle \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \epsilon \langle K_y \rangle \\ \epsilon \langle K_x \rangle - V \langle K_x K_z + K_z K_x \rangle \\ V \langle K_x K_y + K_y K_x \rangle \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Using the transformation 3.85 we can evaluate the contributions due to the residual interaction using the relations

$$\langle K_x K_x + K_z K_x \rangle = \left(2 - \frac{1}{J}\right) \langle K_x \rangle \langle K_z \rangle \quad (3.91)$$

$$\langle K_x K_y + K_y K_x \rangle = \left(2 - \frac{1}{J}\right) \langle K_x \rangle \langle K_y \rangle \quad (3.92)$$

which leads to the following mean field equations

$$\begin{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial t} \langle K_x \rangle \\ i \frac{\partial}{\partial t} \langle K_y \rangle \\ i \frac{\partial}{\partial t} \langle K_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \langle K_y \rangle \\ \epsilon \langle K_x \rangle - V \left(2 - \frac{1}{J}\right) \langle K_x \rangle \langle K_z \rangle \\ V \left(2 - \frac{1}{J}\right) \langle K_x \rangle \langle K_y \rangle \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

These equations are highly non linear because the expectation values of two-body terms coming from the residual two-body interaction have been approximated by products of average values of one-body operators (i.e.  $\langle K \rangle$ ). We can try to analyze the small amplitude oscillations around the HF ground state ( $\langle K \rangle = (0, 0, -J)$ ) but in principle the corresponding dynamics could present characteristic behaviors of non-linear systems such as chaos. However, in the simple case studied here if the Hamiltonian is not time dependent the system possesses two constants of motion (the energy and the norm  $|\langle K \rangle|^2$ ) and only three degrees of freedom. Therefore in this special case the mean-field equation of motion are integrable and so the mean-field dynamics will always be regular and will present oscillations with a basic frequency and all its multiples.

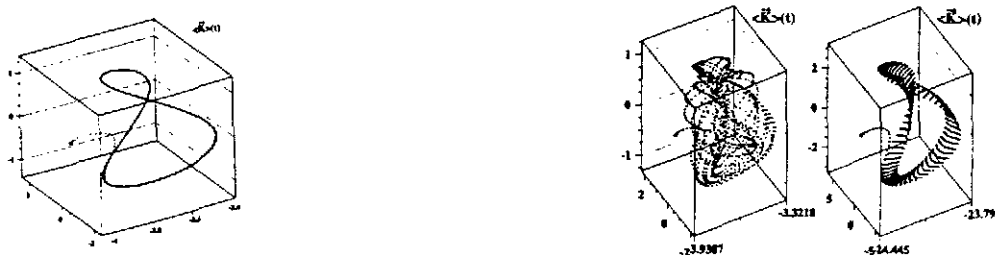


Figure 12 This figure presents the time evolution of the vector  $\langle K \rangle$  after a short excitation with an operator  $W(t)K_x$ . The left part corresponds to the mean field solution while the two diagrams on the right correspond to the exact dynamics with two different total number  $N$ .

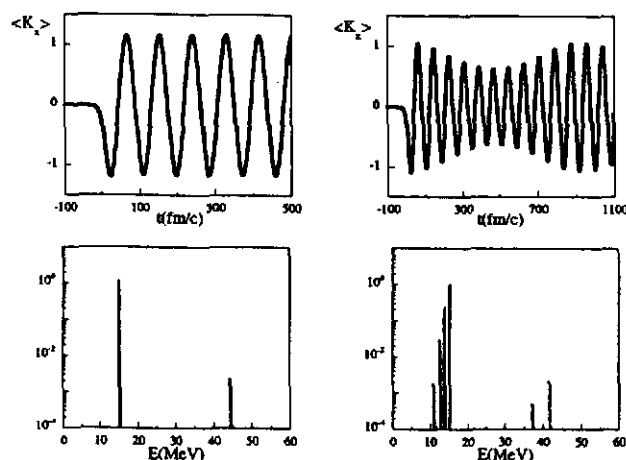


Figure 13 Time evolution of  $\langle K_x \rangle$  and its Fourier analysis after a time greater than the excitation time. The left part is the TDHF result while the right part is the exact dynamics.

### 3.2.7.5 Small amplitude response

In figure 12 and 13 we present the evolution of the Lipkin model after a short excitation with an operator  $W(t)K_x$ . One can see that, after the transient period when a time dependent external field  $W(t)$  is applied, the mean-field approach is rather smooth (it is in fact regular) and present oscillations which resemble the exact dynamics. Indeed, the frequency of the collective mode appears to be close from the exact frequencies directly related to the diagonalization of the Schrödinger equation.

However, TDHF approach fails to reproduce the details of the exact trajectory. Indeed, when going from the quantum mechanics to the mean field approach we have replace the average value of two body operators such as by essentially the simple product of two average values. This means that we have disregarded the quantum fluctuations and correlations. In the complete dynamics these quantum terms are introducing fluctuations around the mean field trajectory in such a way that the mean-field trajectory remains close to the exact one only during a finite time.

This illustrates the fact that in mean field approaches we always have only a partial knowledge of the system. Indeed except for some algebraic models the complete description of the system would require an enormous ensemble of expectation values while we have seen that the system is often described through a small subensemble of expectation values of few operators (in the present case the  $K$ 's). Therefore, in general we are forced to go beyond mean-field.

### 3.2.8 Discussion

In this section we have presented various microscopic many body theories based on extensions of the mean-field concepts. We have shown that these theories provide well-founded approaches to describe the properties of giant resonances and multiphonons. The RPA can be considered as a first step in our understanding of collective vibrations. However, the RPA is by essence a harmonic approximation and therefore we have discussed more elaborate approaches to study the properties of multiphonon states. Formally, the method presented may yield a very accurate description of the collective vibrations. In particular, the Generator Coordinate Method may in principle give an exact solution of the many-body problem. However, the general solutions of the presented extensions of the mean-field are untractable because they require the coupling of too many degrees of freedom. In fact all the results presented have been obtained considering very few collective coordinates. This fact can be considered as a general drawback of the methods presented

because not only is the choice of the collective coordinates somewhat arbitrary but very few collective degrees of freedom can be actually coupled.

We have presented the results of several calculations in which few collective vibrations are considered. Despite the diversity of the methods and approximations all the different results advocate a quasi-harmonic picture of giant resonances.

### 3.3 Boson Expansion Methods

We have discussed in the beginning of the present chapter that the collective motions of the nucleus associated with the excitation of giant resonances can be understood in terms of vibrations. This promotes the idea that the excitations of a many-fermion system can be described in terms of boson degrees of freedom. In fact, this idea is underlying numerous approximations such as phonons in solids or in nuclei, plasmons, Cooper pairs,  ${}^4\text{He}$  atoms .... Indeed the excitations of an even number of fermions carry the quantum numbers of a boson. As an example we will recall how the RPA can be recovered starting from a quasi-boson approximation for the particle-hole excitations. We will use these new concepts to extend the formalism to include the 2particle-2hole states and we will see that this so-called second-RPA allows to predict the width of giant resonances.

As far as the multiple excitations are concerned we clearly need to go beyond the RPA and the quasi boson approximation [Dy56, Us60, Be62, Ma64, Pr68, Ma71, Ha72, Sc73, Ma74, Bo75, Ma76, Bl78, Ma80, Ma80a, Ri81, Ia87, Bo88, Ca89, Be92, Ca94]. This problem finds a natural solution in the boson mapping methods which are mathematical connections between fermion pairs and bosons.

In this section, we will present different methods involving boson representations and indicate how they can be used to study the properties of multiphonon states. In particular, we will show how a harmonic approximation to the excitation spectrum of the many fermion system can be variationally defined. Treating the residual interaction between phonons will allow to predict anharmonicities. We will also discuss how the transition amplitudes can be obtained and how they may exhibit non-linear features.

#### 3.3.1 Quasi Boson Approximation

Let us first recall how the RPA approximation discussed in the previous sections is equivalent to the simple approximation that a fermion pair can be considered as a boson. Let us consider the Hamiltonian  $H_f$  of a fermionic system (e.g. a nucleus) with a two-body interaction  $V$  (c.f. Eq. (3.21)):

$$H_f = \sum_{ij} \epsilon_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ij,kl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k, \quad (3.94)$$

This Hamiltonian can be expressed in the particle-hole representation defined by the static Hartree-Fock solution [Ri81].

The RPA equations can be obtained assuming that the fermion pair operators behave as bosons. Therefore we can introduce boson degrees of freedom through the mapping:

$$a_p^\dagger a_h \longrightarrow b_{ph}^\dagger. \quad (3.95)$$

It can be seen that the Hamiltonian is expressed as a quadratic form in the boson field:

$$H_b = E_{HF} + \sum_{\alpha, \alpha'} \left( A_{\alpha, \alpha'} b_\alpha^\dagger b_{\alpha'} + \frac{1}{2} (B_{\alpha, \alpha'} b_\alpha^\dagger b_{\alpha'}^\dagger + h.c.) \right) \quad (3.96)$$

$$H_b = E_{HF} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'} A_{\alpha, \alpha'} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b^\dagger & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

where we have used the label  $\alpha$  instead of the pair indices  $(p, h)$ . The coefficients  $A$  and  $B$  can be easily obtained from the calculations of the commutators of  $b$  and  $H$ :

$$A_{\alpha\alpha'} = \langle 0 | [b_\alpha, [H_b, b_{\alpha'}^\dagger]] | 0 \rangle = \langle HF | [a_h^\dagger a_p, [H_f, a_{h'}^\dagger a_{p'}]] | HF \rangle \quad (3.98)$$

$$-B_{\alpha\alpha'} = \langle 0 | [b_\alpha, [H_b, b_{\alpha'}]] | 0 \rangle = \langle HF | [a_h^\dagger a_p, [H_f, a_{h'} a_{p'}]] | HF \rangle \quad (3.99)$$

The Hamiltonian (3.96) is nothing but the Hamiltonian of coupled harmonic oscillators which can be diagonalized as

$$H_b = E_{RPA} + \sum_{\nu} \omega_{\nu} O_{\nu}^{\dagger} O_{\nu}, \quad (3.100)$$

by introducing new bosons  $O_{\nu}$  defined by the Bogoliubov transformation::

$$O_{\nu}^{\dagger} = \sum_{\alpha} X_{\alpha}^{\nu} b_{\alpha}^{\dagger} - Y_{\alpha}^{\nu} b_{\alpha}. \quad (3.101)$$

The coefficients of the transformation,  $X^\nu$  and  $Y^\nu$ , and the energy,  $\omega_\nu$ , are obtained by solving the RPA equations (equivalent to Eq. (3.56)):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

The above derivation of the RPA demonstrates that this approximation is deeply connected with a description of the considered fermion system in terms of independent bosons. Therefore, it predicts a harmonic vibration spectrum with regularly spaced multiphonon states. As stated in the previous sections, the study of anharmonicities, non-linearities and interactions between phonons implies going beyond the RPA, i.e. beyond the quasi-boson approximation. In the next section we will mainly discuss two different methods which have been followed in the literature to achieve this goal. The first one is to extend the configuration space to two-particle two-hole excitations. This approach, called the second-RPA, should in principle describe one- and two- phonon states. Indeed, it is equivalent to the diagonalization of the total Hamiltonian in the subspace containing one and two phonon states. The second method is in principle more general because it uses a mathematical correspondence between fermion and boson dynamics. Therefore, its only limitation should be given by our ability to solve the eigenvalue problem in the boson space. However we will see that in practical calculation one must face the problem of truncating the infinite boson expansion and of the resulting possible contamination from spurious states, the boson states which does not pertain to the image of the fermion space induced by its boson mapping.

### 3.3.2 Second RPA Equation

An interesting extension of the RPA formalism is to include more complicated states in the boson definition (3.101). In particular one may consider the coupling with 2p-2h states.

Considering the 1p-1h and 2p-2h excitation as bosons and performing the Bogoliubov transformation

$$\begin{aligned} O_\nu^\dagger = & \sum_{ph} X_{ph}^\nu a_p^\dagger a_h - Y_{ph}^\nu a_h^\dagger a_p \\ & + \sum_{p<p', h<h'} X_{pp'hh'}^\nu a_p^\dagger a_{p'}^\dagger a_{h'} a_h - Y_{ph}^\nu a_h^\dagger a_{h'}^\dagger a_{p'} a_p \end{aligned} \quad (3.103)$$

yield the so-called second RPA equations [Su61, Pr65, Sa62, La64, Ya83, Dr86, Sp91]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

where the  $X$  and  $Y$  are the vectors containing the 1p-1h and 2p-2h components while the  $A$  and  $B$  are generalization of the  $A$  and  $B$  RPA matrices. These matrices couple 1p-1h and 2p-2h bosons. Their elements are obtained as the expectation value of double commutators analogous to the definitions (3.98) and (3.98) extended to include also the 2p-2h bosons.

It is often assumed that the coupling with the 2p-2h states is weak so that 1p-1h phonons can be seen as doorway states which decay into more complicated excitations. In this way the RPA (single) phonons get a spreading width when they are computed in the second RPA scheme. This width can be obtained by projecting out the 2p-2h states from the second-RPA equation (3.104). Since the  $B$  matrix does not couple to the 2p-2h bosons either to the 1p-1h or to the 2p-2h ones, the only effect of the projection is that the RPA matrix  $A$  becomes a complex, energy-dependent, matrix. Therefore, the RPA energies get an imaginary part, a spreading width. This width physically represents the decay of the phonons into 2p-2h configurations.

Figure 14 presents an example of such second-RPA calculations. It can be seen that the main effect of the

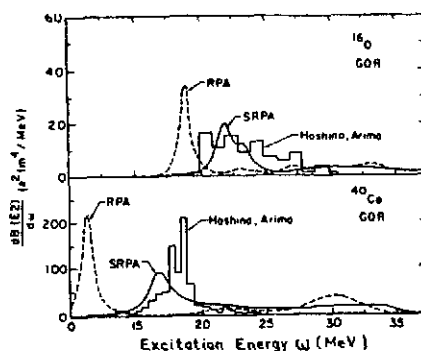


Figure 14 Second-RPA GQR Strength Function : The  $B(E_2)$ -strength distributions in  $^{16}\text{O}$  and  $^{40}\text{Ca}$  nuclei obtained solving the exact second-RPA equations (histograms) from ref. [Ho76] are compared with the RPA (dashed lines) and uncorrelated 2p-2h second-RPA (Solid lines) calculations of ref [Dr86]. This figure is extracted from ref. [Sp91].

introduction of the 2p-2h configurations is to shift the giant resonance peak and to introduce a width which is comparable to the experimental spreading width.



It should be noticed that the second-RPA can be still considered as a quasi-boson approximation and so the eigenstates can be viewed as independent bosons. Therefore the multiple excitation strength is given by the same equations (3.59) or (3.60) as in the RPA case [Ya85].

If a complete diagonalization of Eq. 3.104 is performed in the full 1p-1h and 2p-2h configuration space one can, in principle, describe one and two phonon states. Unfortunately, no systematic study of this type has been performed yet. However, one may worry about the fact that the above approach is implicitly built on a quasi-boson approximation and may, therefore, lead to some violation of the Pauli principle. Moreover, in second-RPA approach the two phonon states can be obtained in two different manners, either as a double excitation of a 1p-1h phonon or as a single excitation of a 2p-2h vibration. This may also lead to double counting and to violations of the Pauli principle.

### 3.3.3 Boson Mapping

As just mentioned, the quasi-boson approaches give rise to several questions concerning the violation of the Pauli principle and the residual interaction between phonons. These questions have found natural answers, at least in principle, in the mathematical developments of exact mapping  $\mathcal{M}$  between fermion and boson systems [Dy56, Us60, Be62, Ma64, Pr68, Ma71, Ha72, Sc73, Ma74, Bo75, Ma76, Bl78, Ma80, Ma80a, Ri81, Ia87, Bo88, Ca89, Be92, Ca94].

Indeed, using a boson mapping, the problem reduces to the diagonalization of a Hamiltonian of bosons which can explicitly be achieved using a multiphonon basis. Moreover, the boson mapping approaches are supposed to correctly treat the Pauli blocking effects and allows the derivation of a residual interaction between phonons.

The explicit construction of  $\mathcal{M}$  can be done in many ways, either conserving the commutation properties of the mapped observables (Beliaev-Zelevinsky type [Be62, Ma71, Ma74, Ma76, Ma80, Ma80a, Ri81]), or mapping first the states and then deriving the operators through the conservation of their matrix elements (Marumori type [Ma64, Ma71, Ma74, Ma76, Ot78, Ma80, Ma80a, Ri81]) or using the Generator Coordinate Method (Lambert type [Ha72, Ri81, Be92]).

Let us take the latter type as an example since the Generator Coordinate Method can be also used to discuss multiphonon excitations and anharmonicities. In the GCM method the wave functions of the fermionic system are expanded on the basis of Slater determinants  $|\Phi(Q)\rangle$  associated with a value  $Q$  of some generating coordinate:

$$|\Psi\rangle = \int dQ f(Q) |\Phi(Q)\rangle \quad (3.105)$$

Therefore, the many-fermion dynamics are mapped onto the evolution of the complex function  $f$  which is equivalent to the Bargmann representation of a boson field problem [Ba62]. In ref. [Ha72], this analogy is used to derive a mapping of the p-h degrees of freedom:

$$a_h^\dagger a_p \xrightarrow{\mathcal{M}} (a_h^\dagger a_p)_b = b_{ph} + (1 - \sqrt{2}) \sum_{p'h'} b_{p'h'}^\dagger b_{p'h} b_{ph'} + \dots \quad (3.106)$$

and

$$\begin{aligned} a_p^\dagger a_{p'} &\xrightarrow{\mathcal{M}} (a_p^\dagger a_{p'})_b = \sum_h b_{ph}^\dagger b_{p'h} \\ a_h a_{h'}^\dagger &\xrightarrow{\mathcal{M}} (a_h a_{h'}^\dagger)_b = \sum_p b_{ph}^\dagger b_{ph'} \end{aligned} \quad (3.107)$$

We can see that the quasi-boson approximation corresponds to the first terms of these expansions, namely, the first term of eq. (3.107). The remaining terms in the infinite expansion (3.107) are due to the Pauli principle.

An example of the corresponding Hamiltonian in the boson space can be found in appendix 5.6. In the following we will use the short hand notation<sup>4</sup>:

$$H_f \xrightarrow{\mathcal{M}} H_b = \sum_n \overset{m}{\underset{n}{H}} H_{\alpha_1' \dots \alpha_n'}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} b_{\alpha_1' \dots \alpha_n'}^\dagger b_{\alpha_m \dots \alpha_1} b_{\alpha_1' \dots \alpha_n'} \quad (3.108)$$

These mappings connect the fermion Hilbert space to a boson space which can be built from its vacuum  $|\phi_b\rangle$  by applying the boson creation operators so that any fermion state is associated with a boson state:

$$|\nu_f\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} |\nu_b\rangle \quad (3.109)$$

where the curved brackets represent states in the boson space. However it should be noted that, because of the antisymmetrization principle of the fermion states, the fermion space is mapped onto a subspace of the boson space. The image of the fermion world is called the physical space because all the computed quantities are meaningful only inside this space, the remaining part of the boson space being spurious. The existence of these spurious states may yield some difficulties and we refer the reader to the literature for a further discussion of this problem [Ma71, Ma74, Ma76, Ma80, Ma80a, Ri81, Bo88, Be92].

<sup>4</sup>In this equation the Hamiltonian is written in normal order with respect to the boson vacuum. However, all the discussed applications can be easily generalized to handle expansions which are not normally ordered.

### 3.3.4 A Non-Linear RPA

The boson mapping methods were used by several authors to extend the RPA. Here, we will present one of these approaches, which has been recently applied to the description of the multiple excitation of giant resonances. In ref. [Ca89, Be92, Ca94], it is proposed to use a variational principle in order to determine a harmonic approximation of  $H_b$ . This harmonic approximation will define a natural basis of the boson Fock space on which it will be convenient to compute the excitation spectrum and to derive properties such as anharmonicities.

Let us first introduce a set of bosons  $O$  by means of the generalized Bogoliubov transformation defined by [Ri81]:

$$\begin{pmatrix} b_\alpha \\ b_\alpha^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\alpha^\nu & Y_\alpha^{\nu*} \\ Y_\alpha^\nu & X_\alpha^{\nu*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_\nu \\ O_\nu^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_\alpha^* \\ \gamma_\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

The vacuum  $|\phi_O\rangle$  belonging to the new bosons  $O$  (defined by  $O|\phi_O\rangle = 0$ ) can be related to the vacuum  $|\phi_b\rangle$  of the  $b$  bosons by the Thouless theorem for bosons (see appendix E of ref. [Ri81] for more details)<sup>5</sup>:

$$|\phi_O\rangle = \exp\left(\sum_\alpha {}^1Z_\alpha b_\alpha^\dagger + \sum_{\alpha \leq \alpha'} {}^2Z_{\alpha\alpha'} b_\alpha^\dagger b_{\alpha'}^\dagger\right) |\phi_b\rangle. \quad (3.111)$$

By assuming that the vacuum  $|\phi_O\rangle$  minimizes the energy  $\langle \phi_0 | H_b | \phi_0 \rangle$  (with respect to the variational parameters  ${}^1Z$  and  ${}^2Z$ ) and by considering small variations around this vacuum we can easily demonstrate [Be92] that the minimum energy condition implies:

$${}^1_0H_\nu \equiv \langle \phi_O | [O_\nu, H_b] | \phi_O \rangle = 0 \quad (3.112)$$

$${}^2_0H^{\nu\nu'} \equiv - \langle \phi_O | [O_\nu, [H_b, O_{\nu'}]] | \phi_O \rangle = 0, \quad (3.113)$$

Moreover we can simultaneously impose:

$${}^1_0H_{\nu\nu'}^* \equiv \langle \phi_O | [O_{\nu'}, [H_b, O_\nu^\dagger]] | \phi_O \rangle = \omega_\nu \delta_{\nu\nu'}. \quad (3.114)$$

Equations (3.113-3.114) reduce to an RPA-like problem. Indeed, using the Bogoliubov transformation (3.110) these equations become:

$$\begin{pmatrix} A(\varrho, \kappa, \gamma) & B(\varrho, \kappa, \gamma) \\ B(\varrho, \kappa, \gamma)^* & A(\varrho, \kappa, \gamma)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$

where the matrices  $A$  and  $B$  are given by

$$A(\varrho, \kappa, \gamma)_{\alpha\alpha'} = \langle \phi_O | [b_\alpha, [H_b, b_{\alpha'}^\dagger]] | \phi_O \rangle \quad (3.116)$$

$$B(\varrho, \kappa, \gamma)_{\alpha\alpha'} = - \langle \phi_O | [b_\alpha, [H_b, b_{\alpha'}]] | \phi_O \rangle$$

The  $A$  and  $B$  matrices can be expressed in terms of the mean field,  $\gamma$ , the normal boson density,  $\varrho$  and the anomalous boson density,  $\kappa$ , which are defined by:

$$\gamma_\alpha \equiv \langle b_\alpha^\dagger \rangle, \quad (3.117)$$

$$\varrho_{\alpha\alpha'} \equiv \langle T_{\alpha'}^\dagger T_\alpha \rangle = \sum_\nu X_{\alpha'}^{\nu*} X_\alpha^\nu, \quad (3.118)$$

$$\kappa_{\alpha\alpha'} \equiv \langle T_{\alpha'} T_\alpha \rangle = \sum_\nu Y_{\alpha'}^{\nu*} X_\alpha^\nu, \quad (3.119)$$

where  $T_\alpha$  is the boson operator  $T_\alpha = b_\alpha - \gamma^*_{\alpha'}$ .

The extended RPA equation, (3.115) is non-linear and is associated with a subsidiary condition for determining the shift  $\gamma$ , namely:

$$C_\alpha(\varrho, \kappa, \gamma) = \langle \phi_O | [H, b_\alpha^\dagger] | \phi_O \rangle = 0. \quad (3.120)$$

Equation (3.120) corresponds to the minimization of the energy under the variations of  $\gamma$ :  $C_\alpha(\varrho, \kappa, \gamma) = \partial \langle H \rangle / \partial \gamma_\alpha^* = 0$ . Since  $\gamma_\alpha = \langle b_\alpha^\dagger \rangle$  is related through the mapping to the one-body density  $\langle a_i^\dagger a_h \rangle$  in the fermion space Eq. (3.120) can be interpreted as a Hartree-Fock approximation for fermions. Therefore Eqs. (3.115) and (3.120) correspond to a non-linear RPA coupled to a self-consistent mean field approximation for fermions. When  $\gamma$  is non zero, the solution of Eq. (3.120) corresponds to a redefinition of the HF basis and in particular of the particle or hole states. In this case a better approximation would be to consider the mapping of quasi-particle (fermion) excitations defined within a Hartree-Fock-Bogoliubov calculation (for fermions).

<sup>5</sup>It should be notice that the considered vacuum might contained a mixing of the physical and spurious states. Formally, since the boson Hamiltonian can be correctly projected on the physical subspace this is not a problem. Indeed, it is equivalent to consider a projected vacuum. However, if the Hamiltonian is not correctly projected on the physical subspace as it might be, for instance, the case when truncations of the infinite boson expansions are introduced, pollutions coming from the spurious components of the vacuum might be expected and must be controlled.

Using the solution of Eqs. (3.115) and (3.120)  $H_b$  reads:

$$H_b = \langle H_b \rangle + \sum_{\nu} \omega_{\nu} O_{\nu}^{\dagger} O_{\nu} + H_{res} \quad (3.121)$$

where  $H_{res}$  contains only terms of order higher than 3 in the bosons  $O$ . The two first terms of Eq.(3.121) define the Hamiltonian  $H_h$  corresponding to a "variationally-defined harmonic approximation" i.e.  $H_h = \langle H_b \rangle + \sum_{\nu} \omega_{\nu} O_{\nu}^{\dagger} O_{\nu}$ . The Hamiltonian  $H_{res}$  can be interpreted as a residual anharmonic coupling between phonons. The interaction between phonons originates in the terms of the fermionic force not included in the RPA treatment. It also contains terms which allow, in principle, to preserve the Pauli exclusion principle. The harmonic part of the Hamiltonian defines a multiphonon basis of the Fock space. This basis may be used to study the effects of the residual interaction between phonons, as discussed in the following.

For example, the residual interaction in the two phonon space can be obtained from:

$$\begin{aligned} & \langle \phi_0 | O_{\nu_1} O_{\nu_2} : H_{res} : O_{\nu_3}^{\dagger} O_{\nu_4}^{\dagger} | \phi_0 \rangle \\ &= \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \left( \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} H_{\alpha_3 \alpha_4}^{\alpha_1 \alpha_2} \langle \phi_0 | O_{\nu_1} O_{\nu_2} : T_{\alpha_1}^{\dagger} T_{\alpha_2}^{\dagger} T_{\alpha_3} T_{\alpha_4} : O_{\nu_3}^{\dagger} O_{\nu_4}^{\dagger} | \phi_0 \rangle \right. \\ & \quad \left. + \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} H_{\alpha_4}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \langle \phi_0 | O_{\nu_1} O_{\nu_2} : T_{\alpha_1}^{\dagger} T_{\alpha_2}^{\dagger} T_{\alpha_3}^{\dagger} T_{\alpha_4} : O_{\nu_3}^{\dagger} O_{\nu_4}^{\dagger} | \phi_0 \rangle + h.c. \right) \\ & \quad + \dots \end{aligned} \quad (3.122)$$

The strength of this interaction can be obtained using the Wick theorem and the contractions:

$$\langle \phi_0 | T_{\alpha}^{\dagger} O_{\nu}^{\dagger} | \phi_0 \rangle = Y_{\alpha}^{\nu} \quad (3.123)$$

$$\langle \phi_0 | T_{\alpha} O_{\nu} | \phi_0 \rangle = X_{\alpha}^{\nu} \quad (3.124)$$

Eq.(3.122) can be used in realistic calculations to predict the anharmonicities in the two phonon space [Ca89].

### 3.3.5 Anharmonicities of two-phonon states

The above formalism has been used in realistic calculations to study the anharmonicities of the two phonon states in  $^{40}\text{Ca}$  [Ca89]. The phonons were obtained solving the standard RPA equations. The calculation was performed using the Skyrme interaction SGII [Gi81]. The dominant RPA one-phonon states are given in table 3.3.

State	$J^{\pi}T$	$E(\text{MeV})$	%EWSR
$GD_1$	1 <sup>-</sup> 1	16.978	12
$GD_2$	1 <sup>-</sup> 1	19.569	18
$GD_3$	1 <sup>-</sup> 1	23.105	12
$GQ_1$	2 <sup>+</sup> 0	17.438	59
$GQ_2$	2 <sup>+</sup> 0	18.321	18
$LEO$	3 <sup>-</sup> 0	5.600	12
$HEO$	3 <sup>-</sup> 0	34.251	13

Table 3.3 RPA Single Phonons : From ref. [Ca89], energies of the most collective dipole, quadrupole and octupole states in  $^{40}\text{Ca}$ . In the last column the percentage of the energy-weighted sum rule is given.

The anharmonicities were computed by diagonalizing the residual interaction in a two-phonon subspace. Table 3.4 presents the results obtained for the positive parity states lying between 30 and 50 MeV of excitation energy.

From this study one can see that, as expected [Bo75], the giant resonances are good vibrators. The anharmonicities are found to be of the order of less than 1 MeV while the splitting of the different angular momenta never exceed 200 keV.

It should be noticed that the presented calculation does not include the giant dipole resonance in the charge-exchange channels. Indeed, as far as the isospin is a good quantum number, one expects to observe two multiplets of isospin  $T=0,2$  split in 2 different spins  $\lambda = 0$  or 2 and a (double) triplet of isospin and spin 1 as a result of the coupling of two  $T=1$   $S=1$  bosons<sup>6</sup>. The fact that charge-exchange phonons may contribute to the wave function in the inelastic channel is illustrated in Fig. 15. This possibility is now under study, the previous formalism being valid for particles and holes of different charge [Ca94].

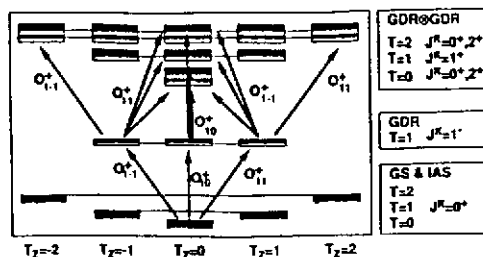


Figure 15 Coupling of Isovector Dipole Phonons : Pictorial representation of the possible coupling of phonons of isospin 1 and spin 1 (such as the GDR) in an  $N=Z$  nucleus. The figure shows that these couplings result in the creation of various spin and isospin multiplets.

## 3.3.7

## Summary and discussion

In this section we have shown that the use of boson mapping methods allows a rather convenient description of multiphonon excitations. In particular, it gives a systematic approach to study the properties of phonons built from excitations of fermions. It provides a way to address general problems such as the effects of non-linear excitations or the effects of the Pauli principle. From the practical point of view it allows to study the coupling of a large number of collective vibrations. However, one must keep in mind that as soon as the infinite boson expansion is truncated there is no guarantee about the possible effects of the spurious states. Therefore, any numerical results must be considered with some caution and must be carefully checked. One possible check discussed in the literature is to compare the approximate solutions provided by the boson method with the exact solutions of solvable schematic models. It is shown in ref. [Be92] that the boson method discussed above gives a good description of the one- and two- phonon states. Another possibility is to estimate the corrections induced by the truncated terms of the boson expansion (introducing for example the next order terms in the boson expansion) as discussed in ref. [Be92].

In this section, we have discussed the first applications of the boson method. It has been demonstrated that multiple excitations of nuclear giant resonances are nearly harmonic. Anharmonicities and non-linearities are of the order of a few per-cent. It should be noticed that the same methods have been recently applied to study the multiple excitation of plasmons in metallic clusters. In that case the anharmonicities have been found to be strong, reaching one hundred percent[Ca93].

As far as the nuclear multiphonons are concerned, many studies remain to be done, such as the coupling of the double inelastic ( $T_Z = 0$ ) isovector degrees of freedom with the double charge exchange channels in order to understand the various multiplets associated with the double excitation of the giant dipole resonance.

State	$E_0(\text{MeV})$	$J^\pi$	$\Delta E$	$\Delta E_0(\text{keV})$					
GD <sub>1</sub> * GD <sub>1</sub>	33.956	0 <sup>+</sup>	-60.0	-16.0	GD <sub>2</sub> * GD <sub>2</sub>	39.138	0 <sup>+</sup>	-9.0	130.0
		2 <sup>+</sup>	-191.0	-175.0			2 <sup>+</sup>	10.0	80.0
GQ <sub>1</sub> * GQ <sub>1</sub>	34.877	0 <sup>+</sup>	4.0	74.0	LEO * HEO	39.911	0 <sup>+</sup>	37.0	38.0
		2 <sup>+</sup>	136.0	230.0			1 <sup>+</sup>	85.0	84.0
		4 <sup>+</sup>	257.0	330.0			2 <sup>+</sup>	76.0	75.0
GQ <sub>1</sub> * GQ <sub>2</sub>	35.761	0 <sup>+</sup>	268.0	518.0			3 <sup>+</sup>	96.0	96.0
		1 <sup>+</sup>	117.0	117.0			4 <sup>+</sup>	85.0	85.0
		2 <sup>+</sup>	315.0	569.0	GD <sub>1</sub> * GD <sub>3</sub>	40.084	0 <sup>+</sup>	-79.0	-179.0
		3 <sup>+</sup>	73.0	73.0			1 <sup>+</sup>	-231.0	-231.0
4 <sup>+</sup>	351.0	570.0	2 <sup>+</sup>	-306.0	-334.0				
GD <sub>1</sub> * GD <sub>2</sub>	36.547	0 <sup>+</sup>	-373.0	-382.0	GD <sub>2</sub> * GD <sub>3</sub>	42.674	0 <sup>+</sup>	-421.0	-496.0
		1 <sup>+</sup>	-304.0	-298.0			1 <sup>+</sup>	-500.0	-506.0
		2 <sup>+</sup>	-228.0	-231.0			2 <sup>+</sup>	-358.0	-409.0
GQ <sub>2</sub> * GQ <sub>2</sub>	36.644	0 <sup>+</sup>	431.0	114.0	GD <sub>3</sub> * GD <sub>3</sub>	46.211	0 <sup>+</sup>	-71.0	-74.0
		2 <sup>+</sup>	614.0	266.0			2 <sup>+</sup>	-76.0	-80.0
		4 <sup>+</sup>	649.0	358.0					

Table 3.4 Anharmonicity Calculations : From ref. [Ca89], for the positive parity two-phonon states between 30 and 50 MeV, the energy, in MeV and the anharmonicity in keV for all the possible total spin. The unperturbed (harmonic) energy,  $E_0$ , is presented together with the perturbative estimate of the anharmonicity,  $E_0$ , and the full diagonalization of the truncated residual interaction in the two phonon sub-space,  $E$ .

### 3.3.6 Non Linear Coupling

Another important feature of the boson mapping methods is the possibility to compute non-linearities in the excitation or deexcitation processes. The physical idea is that the particle-particle or hole-hole component of the external one-body perturbation will be mapped into the product of two boson operators (c.f. eq. (3.107)). These non-linear components in the external field may, for instance, induce direct transitions from the ground state to a two-phonon state. However, it should be noticed that these transitions are possible only via the correlated part (related to the  $Y$  amplitude) of the RPA phonons.

The study of the non-linear effects has been recently performed for the electromagnetic decay from high-lying two-phonon states in  $^{40}\text{Ca}$  [Ca92]. The authors have found that the decay rate of the  $1^-$  two-phonon states built with the GQR and the GDR is only 30 times smaller than the decay rate of the GDR itself (see table 3.5). Therefore, it might be observed experimentally.

The presented calculation, however, does not include the coupling between the one- and two-phonon states which may affect the results and therefore this investigation needs to be completed [Ca94].

Transitions	Decay	Transition rate ( $\text{s}^{-1}$ )
dipole	GDR $\rightarrow$ g.s.	$0.65 \times 10^{18}$
	GDR $\otimes$ GQR $\rightarrow$ g.s.	$0.16 \times 10^{17}$
quadrupole	GQR $\rightarrow$ g.s.	$0.60 \times 10^{16}$
	GDR $\otimes$ GDR $\rightarrow$ g.s.	$0.90 \times 10^{14}$
	GQR $\otimes$ GQR $\rightarrow$ g.s.	$0.26 \times 10^{15}$

Table 3.5 Transition Rates : From ref. [Ca92], dipole and quadrupole transition rates (in  $\text{sec}^{-1}$ ) from one- and two-phonon states to the ground state.

## Chapter 4 Conclusions and perspectives.

The properties of the nucleus cannot be reduced to the properties of its constituents: it is a complex system. The fact that many properties of the nucleus are consequences of the existence of mean-field potential is a manifestation of this complexity. In particular the nucleons can thus self-organize in collective motions such as giant resonances. Therefore the study of these collective motions is a very good tool to understand the properties of the nucleus itself. The purpose of this article was to stress some aspects of these collective vibrations.

In particular we have studied how an ensemble of fermions as the nucleus can self-organize in collective vibrations which are behaving like a gas of bosons in weak interaction. The understanding of these phenomena remains one of the important subjects of actuality in the context of quantal systems in strong interaction. In particular the study of the states with one or two vibration quanta provides a direct information on the structure of nuclei close to their ground states.

Moreover, some collective states appear to be very robust against the onset of chaos. This is the case of the hot giant dipole built on top of a hot nucleus which seems to survive up to rather high temperatures. Their sudden disappearance is still a subject of controversy. It may be that the mean-field and the associated collective states are playing a crucial role also in catastrophic processes such as the phase-transitions. Indeed, when the system is diluted the collective vibrations may become unstable and it seems that these unstable modes provide a natural explanation to the self organization of the system in drops. Finally, considering the diversity of the different structures of exotic nuclei one may expect new vibrations types.

All these studies are showing the diversity of the collective motions of strongly correlated quantum systems such as the nucleus but many open questions remain to be solved.

## Chapter 5 Appendix

### 5.1 Variational formulation of Schrödinger equation.

If we now want to address the problem of the evolution of the system we will rather introduce a variational formulation of the Schrödinger equation

$$i \frac{\partial |\varphi\rangle}{\partial t} = W |\varphi\rangle \quad (5.1)$$

using an integral along a given trajectory  $|\varphi(t)\rangle$

$$I[\phi, \phi^*] = \int_{t_0}^{t_1} \langle \varphi | i \frac{\partial}{\partial t} - W |\varphi\rangle dt \quad (5.2)$$

completed with a boundary condition defining the states of the system at  $t=t_0$ . The equivalence between the Schrödinger equation (5.1) and the variational expression (5.2) can be easily demonstrated. Indeed, let me first introduce a continuous or discrete basis of the Hilbert space: . Then (5.2) reads

$$I[\phi, \phi^*] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \varphi_i^* \left( i \dot{\varphi}_i - \sum_j W_{ij} \varphi_j \right) dt \quad (5.3)$$

Since the coefficients  $\varphi_i^*$  are complex numbers we can either consider the variations of their real and imaginary parts independently or we can rather use  $\phi^*$  and  $\phi$  as two independent variables. Therefore, the requirement that the action is stationary when we add a small variation  $\delta\phi^*$  to  $\phi^*$  leads to

$$\delta I[\phi, \phi^*] = 0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \delta \varphi_i^* \left( i \dot{\varphi}_i - \sum_j W_{ij} \varphi_j \right) dt \quad (5.4)$$

If we apply no restriction on the wave functions this relation should hold for any variation  $\delta\phi^*$  this implies that

$$0 = i \dot{\varphi}_i - \sum_j W_{ij} \varphi_j \quad (5.5)$$

which is nothing but the Schrödinger equation.

### 5.2 Variational Derivation of TDHF using density matrices

Among the many derivations of the TDHF equations, we will adopt the variational method presented in ref. [Ba84, Ba85a, Ba88]. Let us introduce the generalized action

$$I[\mathcal{D}, \mathcal{A}] \equiv \text{Tr} \mathcal{A}(t_1) \mathcal{D}(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} dt \text{Tr} \mathcal{A}(t) \left( \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} + i[H, \mathcal{D}(t)] \right) \quad (5.6)$$

where the variational parameters are the time dependent operators  $\mathcal{D}(t)$  and  $\mathcal{A}(t)$ , respectively akin to a density operator and to an observable. The action (5.6) must be complemented with the boundary conditions:  $\mathcal{D}(t_0) = D(t_0)$  and  $\mathcal{A}(t_1) = A$  where  $D(t_0)$  is the known density matrix of the system at the initial time  $t_0$  and where  $A$  is the observable which one wants to measure at the final time  $t_1$ . When no restrictions are imposed on  $\mathcal{D}(t)$  and  $\mathcal{A}(t)$  the stationarity condition yields exact quantum equations of motion, i.e. the usual Liouville-Von Neumann equation for the density and the backward Heisenberg equation for the observable. Moreover, the stationary value of  $I$  corresponds to the result of the observation at time  $t_1$ :

$$I_{st} = \langle A \rangle_{|t_1} \equiv \text{Tr} \mathcal{A}(t_1) D(t_1) \quad (5.7)$$

If one restricts the trial sets to independent-particle density matrices

$$\mathcal{D}(t) = \exp \left( d(t) + \sum_{ij} d_{ij}(t) a_i^\dagger a_j \right) \quad (5.8)$$

and to one-body operators

$$\mathcal{A}(t) = a(t) + \sum_{ij} A_{ij}(t) a_i^\dagger a_j \quad (5.9)$$

the TDHF evolution [Ke76, Ri81, Ba85a]:

$$i\dot{\rho} = [W(\rho), \rho] \quad (5.10)$$

is provided as the stationarity condition of the action  $I$  with respect to the variations of  $\mathcal{A}(t)$ . In equation (5.10) the mean-field Hamiltonian  $W$  is found to be:

$$W(\rho) = \frac{\partial E(\rho)}{\partial \rho^*} , \quad (5.11)$$

where  $E$  is the total energy  $E(\rho) = \langle H \rangle = \text{Tr}HD$ . In equation (5.10) we have introduced  $\rho$ , the one-body density matrix defined as

$$\rho_{ij} \equiv \langle a_j^\dagger a_i \rangle \equiv \text{Tr}D a_j^\dagger a_i , \quad (5.12)$$

where  $a_i$  and  $a_i^\dagger$  are respectively annihilation and creation operators associated with the single particle orbital  $i$



### 5.3 the RPA and the Response of the System

In chapter 3.2.3 we have discussed the small amplitude motion around a given density  $\rho^{(0)}$  and we have derived the RPA equation

$$i\|\dot{\rho}^{(1)}\rangle\rangle = \mathcal{K}\|\rho^{(1)}\rangle\rangle, \quad (5.13)$$

by expanding the TDHF equation (3.26) to the first order in  $\rho$ ,  $\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \dots$ . This approach leads to the definition of the RPA matrix

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{L}, \quad (5.14)$$

where the super matrices  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{L}$  are defined by:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\|\sigma\rangle\rangle &= \|\{W^{(0)}, \sigma\}\rangle\rangle \\ \mathcal{F}\|\sigma\rangle\rangle &= -\|\{\rho^{(0)}, \sigma\}\rangle\rangle \\ \mathcal{L}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial \rho_{\beta}} = \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_{\alpha}^* \partial \rho_{\beta}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

In the following we will also need to introduce the eigenmodes,  $\mathcal{X}^{\nu}$ , of the RPA matrix  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K}\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle = \omega_{\nu}\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle. \quad (5.16)$$

#### Linear Response

If we are now interested in the response of the system to an external perturbation described by a one-body field  $F$  we must solve a new linearized TDHF equation which reads:

$$i\|\dot{\rho}^{(1)}\rangle\rangle = \mathcal{K}\|\rho^{(1)}\rangle\rangle + \mathcal{F}\|F\rangle\rangle. \quad (5.17)$$

If we now specify a given frequency  $\omega$  for the external field we can formally invert equation (5.17) into

$$\|\rho^{(1)}\rangle\rangle = \mathcal{G}_{RPA}\|F\rangle\rangle, \quad (5.18)$$

where we have introduced the finite-temperature RPA Green's function defined by:

$$\mathcal{G}_{RPA}(\omega) = \frac{1}{\omega - i\eta - \mathcal{K}}\mathcal{F}. \quad (5.19)$$

Using the definitions (3.33) and introducing the unperturbed HF Green's function,

$$\mathcal{G}_{HF}(\omega) = \frac{\mathcal{F}}{\omega - i\eta - \mathcal{E}}, \quad (5.20)$$

we can easily demonstrate that the so-called linearized Bethe-Salpeter relation holds:

$$\mathcal{G}_{RPA} = \mathcal{G}_{HF} + \mathcal{G}_{HF}\mathcal{L}\mathcal{G}_{RPA}. \quad (5.21)$$

Introducing the eigenmodes of the RPA, we realize that the RPA Green's function contains poles at the RPA energies and that the residues are the eigenmodes

$$\mathcal{G}_{RPA}(\omega) = \sum_{\nu} \text{sgn}(\omega_{\nu}) \frac{\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle\langle\langle\mathcal{X}^{\nu}\|}{\omega - \omega_{\nu} - i\eta}. \quad (5.22)$$

#### Response Function

The result of the measurement of the perturbation induced by the external field  $F$  is given by the response function

$$R_F(\omega) \equiv \text{tr}F\rho^{(1)} \equiv \langle\langle F\|\rho^{(1)}\rangle\rangle = \langle\langle F\|\mathcal{G}_{RPA}(\omega)\|F\rangle\rangle. \quad (5.23)$$

Using the relation  $1/(\omega - i\eta) = \mathcal{P}(1/\omega) + i\pi\delta(\omega)$ , the imaginary part of  $R_F(\omega)$  is the RPA strength function:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \Im R_F(\omega) = \sum_{\nu} \text{sgn}(\omega_{\nu}) |\langle\langle\mathcal{X}^{\nu}\|F\rangle\rangle|^2 \delta(\omega - \omega_{\nu}). \quad (5.24)$$

Therefore,  $\omega^{\nu}$  must be interpreted as an eigenenergy while  $\langle\langle F\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle$  can be related to a transition amplitude.

#### Strength Function

However to get the exact interpretation of these quantities we must study a physical process. For example, we can compute the excitation of a hot system induced by the operator  $F$  at a frequency  $\omega$ . In the finite temperature  $T = 1/\beta$  formalism the absorption probability is given by a statistical average over the initial states  $|n\rangle$  and a sum over the final states  $|m\rangle$  of the elementary transition probability  $|\langle m|F|n\rangle|^2$ :

$$S_{abs}(\omega) = \frac{1}{Z} \sum_{mn} e^{-\beta(\omega_n - \mu N_n)} |\langle m|F|n\rangle|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega) \quad (5.25)$$

In this equation indices  $m$  and  $n$  label the eigenstates of the many-body Hamiltonian  $H$ . This strength can be related to the exact two-body Green's function [Ab63, Fe71, Ch90] defined by:

$$\mathcal{G}_{ij,kl}(\omega) = \frac{1}{Z} \sum_{mn} e^{-\beta(\omega_n - \mu N_n)} \left\{ \frac{\tilde{\chi}_{ij}^{(mn)} \tilde{\chi}_{kl}^{(mn)*}}{\omega - i\eta - \omega_{mn}} - \frac{\tilde{\chi}_{ij}^{(mn)*} \tilde{\chi}_{kl}^{(mn)}}{\omega - i\eta + \omega_{mn}} \right\} \quad (5.26)$$

where  $\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$  and  $\tilde{\chi}_{ij}^{(mn)} = \langle m|a_i^+ a_j|n\rangle$  are, respectively, the transition energies and densities. In terms of the Green's function the absorption strength reads:

$$S_{abs}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - \exp(-\beta\omega)} \ll F || \Im m \mathcal{G}(\omega) || F \gg \quad (5.27)$$

The factor  $1/(1 - \exp(-\beta\omega))$  is easily understood since  $\mathcal{G}$  does not contain only the absorption mechanism but also the spontaneous emission which is equal to  $\exp(-\beta\omega)$  times the absorption.

Since  $\mathcal{G}_{RPA}$  is supposed to be a good approximation of  $\mathcal{G}$  we get

$$S_{abs}(\omega) \approx \frac{1}{1 - \exp(-\beta\omega)} S(\omega) \quad (5.28)$$

Therefore, the RPA probability,  $|\ll F || \mathcal{X}^\nu \gg|^2$ , can be identified with the absorption probability,  $e^{-\beta(\omega_n - \mu N_n)} |\langle m|F|n\rangle|^2/Z$ , times a factor  $(1 - \exp(-\beta\omega))$ , while  $\omega^\nu$  can be identify with the energy spacing between the two states  $|m\rangle$  and  $|n\rangle$ .

### Continuum RPA

The RPA Green's function can be directly computed from equation (5.21). For finite-range nuclear forces, this method presents enormous numerical difficulties. However, the problems become much simpler for zero-range effective interactions such as Skyrme forces [Be73, Sh75, Be75, Li76a, Ts78] because one can solve the Bethe-Salpeter equation (5.21) directly in coordinate space.

Indeed, using the definition of the super matrices  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{E}$  together with the  $\mathbf{r}$  representation defined by the projection on the one-body operators  $||\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \gg \equiv |\mathbf{r}_1\rangle \langle \mathbf{r}_2|$  the unperturbed Green's function (5.20) reads:

$$\mathcal{G}_{HF}(\omega, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2') \equiv \ll \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 || \mathcal{G}_{HF} || \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2' \gg \quad (5.29)$$

$$\mathcal{G}_{HF}(\omega, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2') = \langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | \frac{I(1)\rho^{(0)}(2) - \rho^{(0)}(1) I(2)}{\omega - i\eta + I(1)W(2) - W(1) I(2)} | \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2' \rangle \quad (5.30)$$

where  $I$  represents the identity operator. Introducing the single particle Green's function

$$G^0(\omega, r, r') = \langle r | \frac{1}{\omega - i\eta - W} | r' \rangle = 2m \frac{v(r_>) w(r_<)}{\mathcal{W}(v, w)} \quad (5.31)$$

where  $r_<$  and  $r_>$  denote the greater and the lesser of  $r$  and  $r'$  and  $v$  and  $w$  are two solutions, one regular and the other irregular of  $(W - \omega)\nu = 0$ ,  $\mathcal{W}(v, w)$  being their Wronskian, one gets

$$\mathcal{G}_{HF}(\omega, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1' \mathbf{r}_2') = \sum_i n_i \phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_i^*(\mathbf{r}_1') G^0(\varepsilon_i - \omega, r_2', r_2) + (\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2') (\mathbf{r}_1' \leftrightarrow \mathbf{r}_2) \quad (5.32)$$

In this equation  $\phi_i$  represents the single-particle orbital at the energy  $\varepsilon_i$  occupied by  $n_i$  nucleons. For a pure  $\delta$  force the Bethe-Salpeter equation (5.21) becomes, for the local response  $r_1 = r_2 \equiv r$ ,  $r_1' = r_2' \equiv r'$ ,

$$\mathcal{G}_{RPA}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{G}_{HF}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}'' \mathcal{G}_{HF}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \mathcal{L}(\mathbf{r}'') \mathcal{G}_{RPA}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') \quad (5.33)$$

These Green's functions can be easily computed on a lattice using expressions (5.31) and (5.32) and give directly access to the strength function (3.58).

### 5.4 Adiabatic TDHF Approximation

The basic idea of ATDHF is to introduce a velocity field and a set of collective coordinates. Since the coordinates are usually time reversal invariant quantities, Baranger and Vénéroni [Ba78] proposed to decompose the density using two time-even Hermitian matrices, a density  $\rho^{(0)}(t)$  and a velocity field  $\chi(t)$  :

$$\rho(t) = e^{i\chi(t)}\rho^{(0)}(t)e^{-i\chi(t)} . \quad (5.34)$$

They also proposed the adiabatic approximation assuming that  $\rho(t)$  is very close to  $\rho^{(0)}(t)$ , i.e. that the velocity field is small enough to be treated perturbatively. Therefore expanding the exponential operators in Eq. (5.34), the density can be written as

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \dots , \quad (5.35)$$

where

$$\rho^{(1)} = i[\chi, \rho^{(0)}] \quad (i.e. \|\rho^{(1)}\| \gg i\mathcal{F}\|\chi\|) \quad (5.36)$$

and

$$\rho^{(2)} = -\frac{1}{2} [\chi, [\chi, \rho^{(0)}]] . \quad (5.37)$$

The collective Hamiltonian can be deduced from the energy of the system in a manner very similar to the illustration presented in section 2.2.1.2 where the classical collective Lagrangian was derived from the projection of the quantum action on a family of trial function (the so-called "collective path").

Using the density (5.35) the Hartree-Fock energy can be expanded as :

$$E(\rho) = E(\rho^{(0)}) + \frac{\partial E}{\partial \rho} \rho^{(2)} + \frac{\partial^2 E}{\partial \rho \partial \rho} \rho^{(1)} \rho^{(1)} + \dots \quad (5.38)$$

Using the RPA notation, this energy, (Eq. (5.38)), can be recast as

$$E(\rho) = E(\rho^{(0)}) + \frac{1}{2} \ll \chi \| \mathcal{M}^{-1} \| \chi \gg , \quad (5.39)$$

where we have introduced the mass tensor defined as

$$\mathcal{M} = (\mathcal{K}\mathcal{F})^{-1} . \quad (5.40)$$

The first term in equation (5.39) can be interpreted as a potential energy  $V(\rho^{(0)})$  whereas the second one corresponds to a kinetic energy term  $T(\chi, \rho^{(0)})$ . The energy  $E$  plays the role of a classical Hamiltonian for which  $\rho^{(0)}$  and  $\chi$  appear as conjugate variables. Therefore, the dynamical equations for  $\rho^{(0)}$  and  $\chi$  can be derived from the Hamiltonian equations:  $\|\dot{\rho}^{(0)}\| \gg \|\partial E / \partial \chi^*\|$  and  $-\|\dot{\chi}\| \gg \|\partial E / \partial \rho^{(0)*}\|$ , which lead to the equations

$$\dot{\rho}^{(0)} = \mathcal{M}^{-1} \chi \quad (5.41)$$

and

$$-\dot{\chi} = W + \frac{1}{2} \ll \chi \| \frac{\partial \mathcal{M}^{-1}}{\partial \rho^{(0)*}} \| \chi \gg . \quad (5.42)$$

These equations together with the definition (5.39) of the collective Hamiltonian form the most general formulation of the ATDHF approximation. However, they are often too difficult to solve without further approximations. In fact this approach is really useful if we can assume that the density  $\rho^{(0)}(t)$  is driven by an ensemble of collective coordinates  $Q(t)$

$$\|\rho^{(0)}(t)\| \gg \|\rho^{(0)}(Q(t))\| . \quad (5.43)$$

In such a case, we can directly express the velocity as

$$\|\dot{\rho}^{(0)}(t)\| \gg \dot{Q} \left\| \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial Q} \right\| \gg . \quad (5.44)$$

Using the ATDHF equation (5.41),  $\|\chi\| \gg \mathcal{M} \|\dot{\rho}^{(0)}\|$  we can write the kinetic energy as

$$T = \frac{1}{2} \dot{Q} M \dot{Q} , \quad (5.45)$$

where the mass tensor is defined by<sup>1</sup>

$$M_{\mu\nu} = \ll \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial Q_\mu} \| \mathcal{M} \| \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial Q_\nu} \gg . \quad (5.46)$$

<sup>1</sup> One can recognize in the Mass Tensor  $M_{\mu\nu}$  (5.46) the polarizability tensor  $M_{\mu\nu} = \ll \partial \rho^{(0)} / \partial Q_\mu \| (i\mathcal{F}^{-1}) \mathcal{G}_{RPA}(\omega = 0) (i\mathcal{F}^{-1}) \| \partial \rho^{(0)} / \partial Q_\nu \gg$  which corresponds to the static deformation induced by the operator  $i\mathcal{F}^{-1} \partial \rho^{(0)} / \partial Q_\nu$  and measured according to the operator  $i\mathcal{F}^{-1} \partial \rho^{(0)} / \partial Q_\mu$ . It should be noticed that if we are considering the dynamics of Slater determinants,  $\rho^2 = \rho$  these operators reduce to  $i[\rho^{(0)}, \partial \rho^{(0)} / \partial Q_\mu]$  and  $i[\rho^{(0)}, \partial \rho^{(0)} / \partial Q_\nu]$ .

Therefore, if we define the momentum  $P = M\dot{Q}$ , equation (5.39) yields the collective Hamiltonian

$$E(\rho) \equiv H(P, Q) = \frac{1}{2} P M P + V(Q) \quad , \quad (5.47)$$

where the potential is the mean value of the energy associated with  $\rho^{(0)}$ :  $V(Q) \equiv E(\rho^{(0)})$ . Therefore, the ATDHF approximation leads to a classical Hamiltonian similar to the one of the macroscopic approaches.

## 5.5 Periodic Orbits of TDHF

### Iterative Construction of Periodic Orbits

The method proposed in ref. [Ch86] is an iterative method based on the existence of a distance in the Liouville space constructed from the scalar product (3.28)

$$\ell(\rho, \varrho) = \ll \rho - \varrho | \rho - \varrho \gg \quad (5.1)$$

Therefore, if one starts with an arbitrary solution  $\rho(0)$ , one can first find the period  $T$  for which this distance,  $\ell(\rho(0), \rho(T))$ , is minimum. One can thus look for the small variation  $\delta\rho(0)$  which will reduce the distance  $\ell(\rho(0), \rho(T))$ . The evolution of  $\delta\rho(t)$  is given by the RPA equation (3.30) which can be integrated formally as

$$\|\rho^{(1)}(t)\gg = \mathcal{T} \left( -i \int_0^t dt' \mathcal{K}(t') \right) \|\delta\rho(0)\gg \equiv \mathcal{U}(t) \|\delta\rho(0)\gg, \quad (5.2)$$

where  $\mathcal{T}$  is the time-ordering symbol. So the variation of distances  $\ell$  is given at the first order in  $\delta\rho$ :

$$\delta\ell = 2 \ll \rho(0) - \rho(T) | 1 - \mathcal{U}(T) | \delta\rho(0) \gg \quad (5.3)$$

Therefore, the idea is to choose  $\delta\rho(0)$  to be

$$\|\delta\rho(0)\gg = \epsilon \mathcal{P}(1 - \mathcal{U}^T) \|\rho(T) - \rho(0)\gg, \quad (5.4)$$

where  $\epsilon$  is a real positive number small enough to ensure the validity of the linear response theory. In equation (5.4),  $\mathcal{P}$  is a projector which ensures the conservation of the particle number and, if required, of the constraint:  $\rho^2 = \rho$ . In this case, the distance will always be reduced and will eventually converge to 0.

We know that the linear evolution preserves the symplectic form  $\mathcal{F}$  (see discussion of eq. (3.35)). This property implies that  $\mathcal{U}$  is a symplectic operator, as in classical mechanics [Ar74],

$$\mathcal{U}^T(T) = \mathcal{F}^{-1}(0) \mathcal{U}^{-1}(T) \mathcal{F}(T) \quad (5.5)$$

Therefore, one may use this relation to construct the variation  $\|\delta\rho(0)\gg$

$$\|\delta\rho(0)\gg = \epsilon \|\rho(T) - \rho(0)\gg + \epsilon \mathcal{F}^{-1}(0) \mathcal{U}^{-1}(T) \mathcal{F}(T) \|\rho(T) - \rho(0)\gg \quad (5.6)$$

The second term is constructed by propagating backward the perturbation

$\|\delta\rho(T)\gg = \epsilon \mathcal{F}(T) \|\rho(T) - \rho(0)\gg = \epsilon \|\rho(T), \rho(0)\gg$  and by taking  $\mathcal{F}^{-1}(0)\|\delta\rho(0)\gg$  at the time 0. If only Slater determinants are considered, this reduces to  $[\delta\rho(0), \rho(0)]$ . If we want to keep the constraint  $\rho^2 = \rho$ , we can project  $\delta\rho(0)$  on the particle hole space. Iterating this method eventually yields a periodic orbit since the distance  $\ell$  is reduced after each iteration.

### Perturbative Construction of Periodic Orbits

The basic idea of this method is to expand the density in powers of a small number, the amplitude of the oscillations  $\epsilon$

$$\rho(t) = \rho^{(0)} + \epsilon \rho^{(1)} \left( \frac{\omega t}{\omega^{(0)}} \right) + \epsilon^2 \rho^{(2)} \left( \frac{\omega t}{\omega^{(0)}} \right) + \epsilon^3 \rho^{(3)} \left( \frac{\omega t}{\omega^{(0)}} \right) + \dots, \quad (5.7)$$

where the frequency is also expanded in a power series of  $\epsilon$ :

$$\omega = \omega^{(0)} + \epsilon \omega^{(1)} + \epsilon^2 \omega^{(2)} + \epsilon^3 \omega^{(3)} + \dots \quad (5.8)$$

The dynamical equations for  $\rho^{(n)}$  are obtained from the expansion of the TDHF equations (3.26) at the  $n$ 'th order in  $\epsilon$ :

$$0 = \mathcal{W} \|\rho^{(0)}\gg \quad (5.9)$$

$$i \|\dot{\rho}^{(1)}\gg = \mathcal{K} \|\rho^{(1)}\gg \quad (5.10)$$

$$i \|\dot{\rho}^{(2)}\gg = \mathcal{K} \|\rho^{(2)}\gg + \|\mathcal{W}^{(1)}, \rho^{(1)}\gg - i \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(0)}} \|\dot{\rho}^{(1)}\gg \quad (5.11)$$

$$i \|\dot{\rho}^{(3)}\gg = \mathcal{K} \|\rho^{(3)}\gg + \dots \quad (5.12)$$

where the mean-field  $\mathcal{W}$  has been expanded in series:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^{(0)} + \epsilon \mathcal{W}^{(1)} + \epsilon^2 \mathcal{W}^{(2)} + \epsilon^3 \mathcal{W}^{(3)} + \dots \quad (5.13)$$

In equations 5.9, we have explicitly introduced the RPA matrix  $\mathcal{K}$ . It should be noticed that the equations (5.9) only define the p.h. components of  $\rho^{(n)}$ , the particle-particle or hole-hole components being defined by the relation  $\rho^2 = \rho$ .

The equation for  $\rho^{(1)}$  implies that  $\delta\rho$  is proportional to the RPA eigenstates

$$\|\rho^{(1)}(t)\rangle\rangle = \sum_{\nu} a_{\nu} \left( \|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle e^{-i\omega_{\nu}^{(0)}t} + \|\mathcal{X}^{\nu'}\rangle\rangle e^{i\omega_{\nu'}^{(0)}t} \right), \quad (5.14)$$

where the  $a_{\nu}$  are free parameters. If we are looking for periodic solutions we can only mix commensurable frequencies. The equation for  $\rho^{(2)}$  contains a source term proportional to  $\rho^{(1)}\rho^{(1)}$ , so it contains frequencies which are sums or differences of the  $\omega_{\nu}$ 's. Therefore, in order to avoid a linearly increasing solution which is non-physical, one needs to set  $\omega^{(1)} = 0$ . The situation is different in the next order,  $\rho^{(3)}$ , because equation (5.9) reads

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{K}\right)\rho^{(3)} = [W^{(1)}, \rho^{(2)}] + [W^{(2)}, \rho^{(1)}] - i\frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(0)}}\rho^{(1)}, \quad (5.15)$$

or specifying only the p.h. components

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{K}\right)\mathcal{P}\rho^{(3)} = \mathcal{P}\sigma^{(3)} - i\frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(0)}}\rho^{(1)}, \quad (5.16)$$

with  $\sigma^{(3)} = [W^{(1)}, \rho^{(2)}] + [W^{(2)}, \rho^{(1)}] + \mathcal{K}(1 - \mathcal{P})\rho^{(3)}$  and where  $\mathcal{P}$  projects on the p.h. components. The commutators on the right-hand side of equation (5.15) contain sums or differences of three frequencies  $\omega_{\nu}$  and in particular contain a resonant term  $\omega_{\nu}$ . The terms coming from the modifications of  $\omega$  are there to cancel these resonant terms which otherwise would yield non-physical solutions. This condition defines the frequency correction  $\omega^{(2)}$  requiring that the projection on the eigenstates  $\|\mathcal{X}^{\nu}\rangle\rangle$  does not contain the frequency  $\omega_{\nu}$ , i.e.  $0 = \int_0^T dt \left( \langle\langle \mathcal{X}^{\nu} | \mathcal{F}^{-1} | \sigma^{(3)} \rangle\rangle - i\frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(0)}} \langle\langle \mathcal{X}^{\nu} | \mathcal{F}^{-1} | \rho^{(1)} \rangle\rangle \right)$  so that

$$\omega^{(2)} = \omega^{(0)} \frac{\int_0^T dt \operatorname{tr} \sigma^{(3)}[\rho^{(0)}, \rho^{(1)}]}{\int_0^T dt \operatorname{tr} \rho^{(1)}[\rho^{(0)}, \rho^{(1)}]}. \quad (5.17)$$

This procedure can be iterated in order to find all the the frequencies  $\omega^{(n)}$  requiring that no resonant terms appear in the equation of evolution of  $\rho^{(n+1)}$ . The last step is to apply the quantization rule which reads

$$I \equiv \sum_h -\Theta_h + \int_0^T dt \langle h(t) | i\frac{\partial}{\partial t} - W | h(t) \rangle = n, \quad (5.18)$$

where the  $\Theta_h$  are the Floquet-Lyapounov phase defined as the phase acquired by the orbital  $h$  after one period. In ref. [Ab91, Ab92, Ab92a] the action  $I$  is approximated by

$$I \approx \epsilon^2 \int_0^T dt \operatorname{tr} W^{(1)}\rho^{(1)} + W^{(0)}\rho^{(2)} = \epsilon^2 T E^{(2)}, \quad (5.19)$$

where  $E^{(2)}$  is the second order correction to the energy  $E = E^{(0)} + \epsilon^2 E^{(2)} + \epsilon^3 E^{(3)} + \dots$ . Using the expansion of the period  $T = 1/2\pi\omega$ , we get for the  $n$  quantified states:

$$\epsilon_n^2 = n \frac{\omega^{(0)}}{E^{(2)} - n\omega^{(2)}}, \quad (5.20)$$

and so the excitation energy reads :

$$E_n^* \equiv E_n - E^{(0)} = n\omega_n = n(\omega^{(0)} + \epsilon_n^2\omega^{(2)}). \quad (5.21)$$

These equations give corrections to the one phonon state  $\omega_1$  and also to the two phonon states  $\omega_2$ .

In realistic calculations, one needs to introduce the angular momentum. This can be done by introducing the quantum numbers  $\lambda$  and  $\mu$ .  $\rho^{(1)}$  contains a sum over  $\mu$  and  $\rho^{(2)}$  and  $\omega^{(2)}$  can be expressed as

$$\rho^{(2)} = \sum_{\lambda'=0}^{\lambda} \sum_{\mu'=-2\lambda'}^{2\lambda'} \rho_{2\lambda', \mu'}^{(2)} \quad (5.22)$$

and

$$\omega^{(2)} = \sum_{\lambda'=0}^{\lambda} \sum_{\mu'=-2\lambda'}^{2\lambda'} \omega_{2\lambda', \mu'}^{(2)}. \quad (5.23)$$

However, the equations (5.20) and (5.21) do not predict any splitting of the two phonon states. In refs. [Ab91, Ab92, Ab92] the following ansatz is proposed in analogy with the idea of the projection onto a good angular momentum : the splitting of the two phonon states is obtained replacing  $\omega^{(2)}$  by  $\omega_{\lambda}^{(2)}$  in equations (5.20) and (5.21).

### 5.6 Example of a Boson Mapping of the Hamiltonian of Fermions

With the transformation (3.107), the fermion Hamiltonian is mapped onto:

$$\begin{aligned}
 H_f \xrightarrow{M} H_b = & E_0 + \sum_{ph} (\epsilon_p - \epsilon_h) b_{ph}^\dagger b_{ph} + \sum_{php'h'} V_{ph'hp'} b_{ph}^\dagger b_{p'h'} \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{pp'h'h'} [V_{pp'h'h'} b_{ph}^\dagger b_{p'h'}^\dagger + h.c.] \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{pp'h'h'} [V_{pp'h'h'} b_{ph}^\dagger b_{p'h'}^\dagger b_{p''h''} + h.c.] \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{hh'h''} [V_{ph,h'h''} b_{ph''}^\dagger b_{p'h'}^\dagger b_{p'h} + h.c.] \\
 & - \sum_{hh'h''} V_{ph,hp'} b_{ph''}^\dagger b_{p''h}^\dagger b_{p''h''} b_{p'h'} \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{hh'h''} V_{pp',p''p''} V_{pp',p''p''} b_{ph}^\dagger b_{p'h'}^\dagger b_{p''h''} b_{p''h''} \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{hh'h''} V_{hh',h''h''} b_{ph''}^\dagger b_{p'h'}^\dagger b_{p'h} b_{p'h'} \\
 & + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sum_{hh'h''} V_{pp',hh'} [b_{ph}^\dagger b_{p'h'}^\dagger b_{p''h''}^\dagger b_{p''h''} b_{p'h''} + h.c.] \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

On the right hand side of Eq.(5.24) the first four terms correspond to a harmonic Hamiltonian with particle-hole interactions. Comparing this part with the quasi-boson Hamiltonian, we find that they are quite similar, differing only by some numerical factors [Ri81]. In that sense, the RPA can be considered as an approximation where  $H_b$  is truncated at second-order in boson operators [Ri81].

# Bibliography

- [Ab63] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice - Hall Cliffs (1963)
- [Ab75] Y. Abgrall and E. Caurier, *Phys. Lett.* **56B** (1975) 229
- [Ab90] S. Aberg, H.Flocard and W.Nazarewicz, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* (1990) 439
- [Ab91] A. Abada and D. Vautherin, *Phys. Lett.* **B258** (1991) 1
- [Ab92] A. Abada and D. Vautherin, *Phys. Rev.* **C45** (1992) 2205
- [Ab92a] A. Abada, These, IPNO-T-92-03, IPN-Orsay (France) (1992)
- [Al56] K. Alder, A. Bohr, T. Huus, B. Mottelson and A. Winther, *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956) 432
- [Al96] N. Alamanos and P. Roussel-Chomaz, *Ann. Phys. (Paris)* **21** (1986) 601
- [Ar60] R. Arvieu and M. Vénéroni, *Comp. Rend. Ac. des Sci. (Paris)* **250** (1960) 992
- [Ar74] V.I. Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir, Moscow (1974)
- [Au82] N. Auerbach, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 913
- [Au90] N. Auerbach, *Ann. of Physics* **197** (1990) 376
- [Au93] T. Aumann et al. *Phys. Rev. C* **47** (1993) 1728
- [Ba47] G.C.Baldwin and G.Klaiber, *Phys. Rev.* **71** (1947) 3
- [Ba60] M. Baranger, *Phys. Rev.* **120** (1960) 957
- [Ba62] V. Bargmann, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 829
- [Ba72] M. Baranger, *J. Phys. (Paris)* **33** (1972) C5-61
- [Ba72] R. Balian and C. Bloch, *Ann. Phys. (N.Y.)* **69** (1972) 76
- [Ba73] B. Banerjee and D.M. Brink, *Z. Phys.* **258** (1973) 46
- [Ba74] R. Balian and C. Bloch, *Ann. Phys. (N.Y.)* **85** (1974) 514
- [Ba78] M. Baranger and M. Vénéroni, *Ann. Phys. (N.Y.)* **114** (1978) 123
- [Ba81] R. Balian and M. Vénéroni, *Ann. Phys. (N.Y.)* **135** (1981) 270
- [Ba83] H.W. Baer, R. Bolton, J.D.Bowman, M.D. Cooper, F. Cverna, N.S.P. King, M.Leitch, H.S. Matis, J.Alster, A. Doron, A. Erell, M.A. Moinester, E. Blackmore and E.R. Siciliano, *Nucl. Phys.* **A396** (1983) 437c
- [Ba84] R. Balian and M. Vénéroni, *Phys. Lett.* **B136** (1984) 301
- [Ba85] M. Barranco, A. Polls, S. Marcos, J. Navarro and J. Treiner, *Phys. Lett.* **B154** (1985) 96 M. Barranco, A. Polls and J. Martorell *Nucl. Phys.* **A444** (1985) 445
- [Ba85a] R. Balian and M. Vénéroni, *Ann. Phys. (N.Y.)* **164** (1985) 334
- [Ba85b] J. Bar Touv, *Phys. Rev.* **C32** (1985) 1369
- [Ba88] R. Balian and M. Vénéroni, *Ann. Phys. (N.Y.)* **187** (1988) 29
- [Ba88a] G.P. Baur and C.A. Bertulami, *Phys. Rep.* **163** (1988) 299.



- [Ba88b] B. Baur and C. Bertulani, Nucl. Phys. **A482** (1988) 313c
- [Ba88c] J.Barrette et al., Phys. Lett. **B299** (1988) 182
- [Ba92] J.Barrette et al., Phys. Rev. **C45** (1992) 2427
- [Ba92] J. Bar Touv and S. Mordechai, Phys. Rev. **C 45** (1992) 197
- [Be61] D.R. Bés, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk **33** (1961) n<sub>2</sub>
- [Be62] S.T. Beliaev and V.G. Zelevinsky, Nucl. Phys. **39** (1962) 582
- [Be73] G.F. Bertsch, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 121
- [Be74] M. Beiner, H. Flocard, N. Van Giai and P. Quentin, Physica Scripta **10A** (1974) 29
- [Be75] G.F. Bertsch and S.F.Tsai, Phys. Rep **180** (1975) 125
- [Be83]
- [Be75a] B.L. Berman, S.C. Fultz, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 713
- [Be75b] B.L. Berman, Atomic Data and Nuclear Data Tables **15** (1975) 319
- [Be76] M.V. Berry and M. Taylor, Proc. R. Soc. London **A349** (1976) 101
- [Be76a] F.E. Bertrand, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **26** (1976) 457
- [Be77] M.V. Berry and M. Talor, J. Phys. **A10** (1977) 371
- [Be81] F. E. Bertrand, Nucl. Phys. **A354** (1981) 129c
- [Be83] G.F. Bertsch, P.F. Bortignon and R.A. Broglia, Rev. Mod. Phys. **55** (1983) 287.
- [Be84] W. Besold, P.G. Reinhart and C. Toepffer, Nucl. Phys. **A431** (1984) 1
- [Be86] G.F. Bertsch and R.A. Broglia, Physic Today **39** n° 8 (1986) 44
- [Be87] F.E.Bertrand et al. Phys. Rev. **C35** (1987) 111
- [Be88] G.F. Bertsch and S. Das Gupta, Phys. Repts **160** (1988)190
- [Be89] F.E. Bertrand and J.R. Beene Proceeding of Int. Nucl. Phys. Conference, Sao Paulo (1989)
- [Be91] J.R. Beene, et al. Phys. Rev. **C41** (1991) 920
- [Be92] D. Beaumel and Ph. Chomaz, Ann. Phys. (N.Y.), **213** (1992) 405
- [Be94] J.R. Beene, et al. Proc. of the Gull Lake Nucl. Phys. Conf., U.S. August (1993), to be published in Nucl. Phys. (1994)
- [Bi89] L.Bianchi, B.Fernandez, J.Gastebois, A.Gillibert,W.Mittig and J.Barrette, Nucl. Inst. Meth. **A276** (1989) 509
- [Bl76] J.P. Blaizot, D. Gogny end B. Grammaticos, Nucl. Phys. **A265** (1976) 315
- [Bl76a] J. Blocki, J Randrup, W. H Swiatecki and C.F Tsang LBL-5014(1976)
- [Bl77] J.P. Blaizot and D. Gogny, Nucl. Phys. **A284** (1977) 429
- [Bl78] J. P. Blaizot and E.R. Marshalek, Nucl. Phys. **A309** (1978) 422,453
- [Bl80] J.P. Blaizot, Phys. Rep. **64** (1980) 171
- [Bl81] J.P. Blaizot, Phys. Lett. **107B** (1981) 331
- [Bl85] Y. Blumenfeld, J.C. Roynette, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J.P. Garron and J.C. Jacmart. Nucl. Phys. **A445** (1985) 151
- [Bl88] Y. Blumenfeld and Ph. Chomaz, Phys. Rev. **C38** (1988) 2157
- [Bl88a] J. Blocki et al, Nucl. Phys. **A477** (1988) 189
- [Bl95] J.P. Blaizot,J.F. Berger, J. Dechargé and M. Girod, Nucl Phys. **A591** (1995) 435

- [Bo37] N.Bohr and F.Kalchar, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Leirk 14 n<sub>10</sub>(1937)
- [Bo37a] W. Bothe and W. Gentner, Z. für Physik 106 (1937) 237
- [Bo39] N. Bohr and J.A. Wheeler, Phys. Rev. 56 (1939) 426
- [Bo53] D. Bohm and D. Pines Phys. Rev. 92 (1953) 609
- [Bo65] J. de Boer, R.G. Stokstad, G.P. Symons and A.Winther, Phys. Rev. Lett 14 (1965) 564
- [Bo69] A. Bohr and B. Mottelson, *Nuclear Physics*, Vol. I, Benjamin (N.Y.), (1969)
- [Bo75] A. Bohr and B. Mottelson, *Nuclear Structure Vol II*, Benjamin (N.Y.), (1975)
- [Bo76] P. Bonche, S.Koonin and J.W. Negele, Phys. Rev 13 (1976) 1226
- [Bo88] Recent developpements of the boson mapping methods are sumerized in D. Bonatsos, *Interacting Boson Model of Nuclear Structure* (chap. 15.), Oxford Science Publications, Oxford (1988).
- [Bo84] J.D. Bowman et al. Journ. dee Phys. 45 (1984) C4 351
- [Br59] G.E. Brown and M. Bolsterli, Phys. Rev. Lett. 3 (1959) 472
- [Br61] G.E. Brown, J.A. Evans and D.J. Thouless, Nucl. Phys 24 (1961) 1
- [Br62] D.M. Brink, Ph. D. Thesis University of Oxford (1955)  
P. Axel, Phys. Rev. 126 (1962) 671
- [Br65] D.M. Brink, A.F.R De Toledo Piza and A.K. Kerman Phys. Lett. 19 (1965) 413
- [Br76] D.M. Brink, M.J. Giannoni and M. Vénéroni, Nucl. Phys. A258 (1976) 237
- [Br76a] R.A. Broglia, C.H.Dasso and A. Winter, Phys. Lett. 61B (1976) 113
- [Br78] R.A. Broglia, O. Civitarese, C H. Dasso and A. Winther, Phys Lett 73B (1978)405
- [Br78a] R.A. Broglia, C H. Dasso, G. Pollarolo and A. Winther, Phys. Rep. 48 (1978)331
- [Br79] R.A. Broglia, C.U. Dasso and A.Winther proceeding of the Int. Sch. of Phys. Enrico Fermi Vienna (1979)
- [Br79a] R.A. Broglia et al, Phys Lett. B89 (1979) 22
- [Br80] R.A. Broglia, C.H.Dasso and H.Erbensen, Prog. in Part. and Nucl. Phys. Vol 4, Pergamon (N.Y.) (1980) 345.
- [Br81] R.A. Broglia, C.H.Dasso and A. Winter, Proc. Int. Sch. of Phys. E. Fermi, Course LXXVII eds R.A. Broglia, C.H.Dasso and R. Ricci (North-Holland) Amsterdam (1981) 327
- [Br83] S. Brandenburg, R. De Leo, A.G. Drentje, M.N. Harakeh, H. Sakai and A. Van der Woude, Phys. Lett. 130B (1983) 9
- [Bu84] M.Buenerd, Journ. de Phys. 45 (1984) C4 115
- [Bu94] A.Buda, PhD Thesis (1994) KVI (Groningen)
- [Ca73] E. Caurier, B. Bourotte, Bilwes and Y. Abgrall, Phys. Lett. 44B (1973) 411
- [Ca84] E. Caurier et al, Nucl. Phys. A425 (1984) 233
- [Ca85] E. Caurier, M. Ploszajczak and S. Drozd, Phys. Lett. 160B (1985) 357
- [Ca85a] E. Caurier et al, Nucl. Phys. A437 (1985) 407
- [Ca86] F. Catara and V. Lombardo, Nucl. Phys. A 455 (1986) 158
- [Ca87] F. Catara, Ph. Chomaz and A. Vitturi, Nucl. Phys. A471 (1987) 661
- [Ca88] F. Catara and Ph. Chomaz, Nucl. Phys. A482 (1988) 271c.
- [Ca89] F. Catara, Ph. Chomaz and N. V. Giai, Phys. Lett. B233 (1989) 6
- [Ca92] F. Catara, Ph. Chomaz and N.V. Giai, Phys. Lett. B277 (1992) 1
- [Ca93] F. Catara, Ph. Chomaz and N.V. Giai, to be published in Phys. Rev. B (1993)

- [Ca94] F. Catara, Ph. Chomaz and N. Van Giai, to be published
- [Ce89] L. Cerbaro, Thesis, Univ. of Padova, Italy (1989) unpublished and P. F. Bortignon, private communication.
- [Ch64] T.H. Chang, *Acta Phys. Sinica* **20** (1964) 159
- [Ch76] E. Chacón, M. Moshinsky and R.T. Sharp, *J. of Math. Phys.* **17** (1976) 668
- [Ch76a] E. Chacón and M. Moshinsky, *J. of Math. Phys.* **18** (1977) 870
- [Ch84] Ph. Chomaz, N. Frascaria, Y. Blumenfeld, J.P. Garron, J.C. Jacmart, J.C. Roynette, W. Bohne, A. Gamp, W. Von Oertzen, M. Buenerd, D. Lebrun and Ph. Martin. *Z. Phys. A* **318** (1984) 51
- [Ch84a] Ph. Chomaz, Y. Blumenfeld, N. Frascaria, J.P. Garron, J.C. Jacmart, J.C. Roynette, W. Bohne, A. Gamp, W. von Oertzen, N.V. Giai and D. Vautherin *Z. Phys. A* **319** (1984) 167
- [Ch84b] Ph. Chomaz and D. Vautherin, *Phys. Lett.* **B139** (1984) 244
- [Ch84c] Ph. Chomaz, Thèse de 3<sup>e</sup>me cycle, IPNO-T84-01, Orsay, (1984)
- [Ch86] Ph. Chomaz, H. Flocard and V. Vautherin, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1787
- [Ch86a] Ph. Chomaz, *J. Phys. Paris* **47** (1986) C4-155
- [Ch86b] Ph. Chomaz and D. Vautherin, *Phys. Lett.* **B177** (1986) 9
- [Ch87] Ph. Chomaz, N. V. Giai and S. Stringari, *Phys. Lett.* **B189** (1987) 4.
- [Ch88] Ph. Chomaz, N. V. Giai and D. Vautherin, *Nucl. Phys.* **A476** (1988) 125.
- [Ch90] Ph. Chomaz, D. Vautherin and N. Vinh Mau, *Phys. Lett.* **B242** (1990) 313
- [Ch92] Ph. Chomaz and N. V. Giai, *Phys. Lett.* **B282** (1992) 13.
- [Ch95] Ph. Chomaz and N. Frascaria; *Phys. Rep.* **252** (1995) 275
- [Ch95a] Ph. Chomaz, Mémoire d'Habilitation, Caen, (1995)
- [Ch96] Ph. Chomaz, *Ann. Phys. (Paris)* **21** (1986) 669
- [Co73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloé, *Mécanique Quantique*, Paris Hermann (1973)
- [Co92] G. Colò, P.F. Bortignon, N. V. Giai, A. Bracco and R.A. Broglia, *Phys. Lett.* **B276** (1992) 279.
- [De81] J. Decharge, M. Girod, D. Gogny and B. Grammaticos, *Nucl. Phys.* **A358** (1981) 203
- [De82] J. Decharge et al, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 982
- [De83] J. Decharge and L. Sips, *Nucl. Phys.* **A407** (1983) 1-28
- [Di30] P.A.M. Dirac, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **26** (1930) 376
- [Do83] D.H. Dowell, G. Feldman, K.A. Snover, A.M. Sandorfi and M.T. Collins, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1191
- [Dr86] S. Drożdż, V. Klent, J. Speth and J. Wambach, *Nucl. Phys.* **A451** (1986) 11
- [Dr86a] S. Drozd et al, *Ann. Phys. (N.Y.)* **171** (1986) 108
- [Dr88] S. Drozd et al, *Phys. Lett.* **206B** (1988) 567
- [Dy56] F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **102** (1956) 1217
- [Em94] H. Emling et al., Proc. of the Gull Lake Nucl. Phys. Conference - (USA) 1993, to be published in *Nucl. Phys. A.* (1994)
- [En75] Y.M. Engel, D.M. Brink, K. Goeke, S.J. Krieger and L. Vautherin, *Nucl. Phys.* **A249** (1975) 215
- [Fa59] S. Fallieros, Maryland Tech. Rept. N<sub>1</sub>128 (1959)
- [Fa59a] S. Fallieros and R.A. Ferrell, *Phys. Rev.* **116** (1959) 660
- [Fa64] U. Fano, *Lectures on the Many-Body Problem*, (E. Caianiello, Ed.), Academic Press, N.Y., (1964)
- [Fa82] S.A. Fayans, V.V Palichnik, N.I. Pyatov, *Z. Phys. A* **308** (1982) 145

- [Fa83] M. Faber, J.L. Egido and P. Ring, Phys. Lett. **B127** (1983) 5
- [Fe34] E. Fermi, Z. Phys. **29** (1924) 315
- [Fe57] R.A. Ferrell, Phys. Rev. **107** (1957) 1631
- [Fe71] A.L. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of many Particle Systems*, Mc Graw - Hill, New York (1971)
- [Fe72] L.S. Ferreira and D.H. Caldeira, Nucl. Phys. **A189** (1972) 250
- [Fe83] S.N. Fedotkin, I.N. Mikhailov and R.G. Nazmidinov, Phys. Lett. **B121** (1983) 15
- [Fl75] H. Flocard and D. Vautherin, Phys. Lett. **55B** (1975) 259
- [Fl76] H. Flocard and D. Vautherin, Nucl. Phys. **A264** (1976) 197
- [Fl81] H. Flocard and M. Weiss, Phys. Lett. **105B** (1981) 14
- [Fo88] S. Fortier, S. Gales, S.M. Austin, W. Benenson, G.W. Crawley, C. Djalali, J.H. Lee, J. van der Plicht and J.S. Winfield, Phys. Rev. **C** (1988) 14
- [Fr34] J. Frenkel *Wave Mechanics Advanced General Theory* Oxford Univ. Press, Clarendon Oxford (1934).
- [Fr77] N. Frascaria, C. Stéphan, P. Colombani, J.P. Garron, J.C. Jacmart, M. Riou and L. Tassan-Got, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 918
- [Fr80] N. Frascaria, P. Colombani, A. Gamp, J.P. Garron, M. Riou, J.C. Roynette, C. Stéphan, A. Amcaume, C. Bizard, J.L. Laville and M. Louvel. Z. Für Physik **A294** (1980) 167
- [Fr82] N. Frascaria, Proceedings of the International Conf. on Nucl. Phys. Trieste (Italy) Ch. Dasso, A. Broglia, A. Winther, Eds North Holland, Amsterdam Nucl. Phys. (1982) 617.
- [Fr86] N. Frascaria Proceeding of the XXIV International Winter Meeting on Nuclear Physics, Bormio, Italie (20-25 Janvier 1986)
- [Fr87] N. Frascaria, Y. Blumenfeld, Ph. Chomaz, J.P. Garron, J.C. Jacmart, J.C. Roynette, T. Suomijarvi and W. Mittig. Nucl. Phys. **A474** (1987) 253
- [Fr88] N. Frascaria Nucl. Phys. **A482** (1988) 245c
- [Ga85] M. Gallardo, M. Dievel, T. Dossing and R. A. Broglia, Nucl. Phys. **A443** (1985) 415
- [Ga88] J.J. Gaardhøje, Nucl. Phys. **A482** (1988) 261c
- [Ga92] J.J. Gaardhøje, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **42** (1992) 483
- [Gi75] B. Giraud and B. Grammaticos, Nucl. Phys. **A255** (1975) 141
- [Gi76] M.J. Giannoni, F. Moreau, P. Quentin, D. Vautherin, M. Veneroni and D.M. Brink Phys. Lett. **65B** (1976) 305
- [Gi80] M.J. Giannoni and P. Quentin, Phys. Rev. **C21** (1980) 2060, 2076
- [Gi81] N.V. Giai and H. Sagawa, Nucl. Phys. **A371** (1981) 1
- [Gi87] N. V. Giai, P.F. Bortignon, F. Zardi and R.A. Broglia, Phys. Lett. **B199** (1987) 155
- [Gi88] N. V. Giai, Ph. Chomaz, P.F. Bortignon, F. Zardi and R.A. Broglia, Nucl. Phys. **A 482** (1988) 437
- [Gl59] A.E. Glassgold, W. Heckrotte and K.M. Watson Ann. Phys. **6** (1959) 1
- [Gl63] R. J. Glauber, Phys. Rev **130** (1963) 2529, 131 (1963) 2766
- [Go48] M. Goldhaber and E. Teller, Phys. Rev. **74** (1948) 1046
- [Go59] F.K Gowan, in *Compte- Rendus du Congrès Interne de Physique Nucléaire*, ed. P Gargenberger, Dunod, Paris (1959) 225
- [Go59a] J. Goldstone and K. Gottfried, *Nuovo cimento* **13** (1959) 849
- [Go75] D. Gogny, Proc. of the Int. Conf. on Nucl. Selfconsistent Field, Trieste, G. Ripka and M. Porneuf, Eds. North Holland Amsterdam (1975)

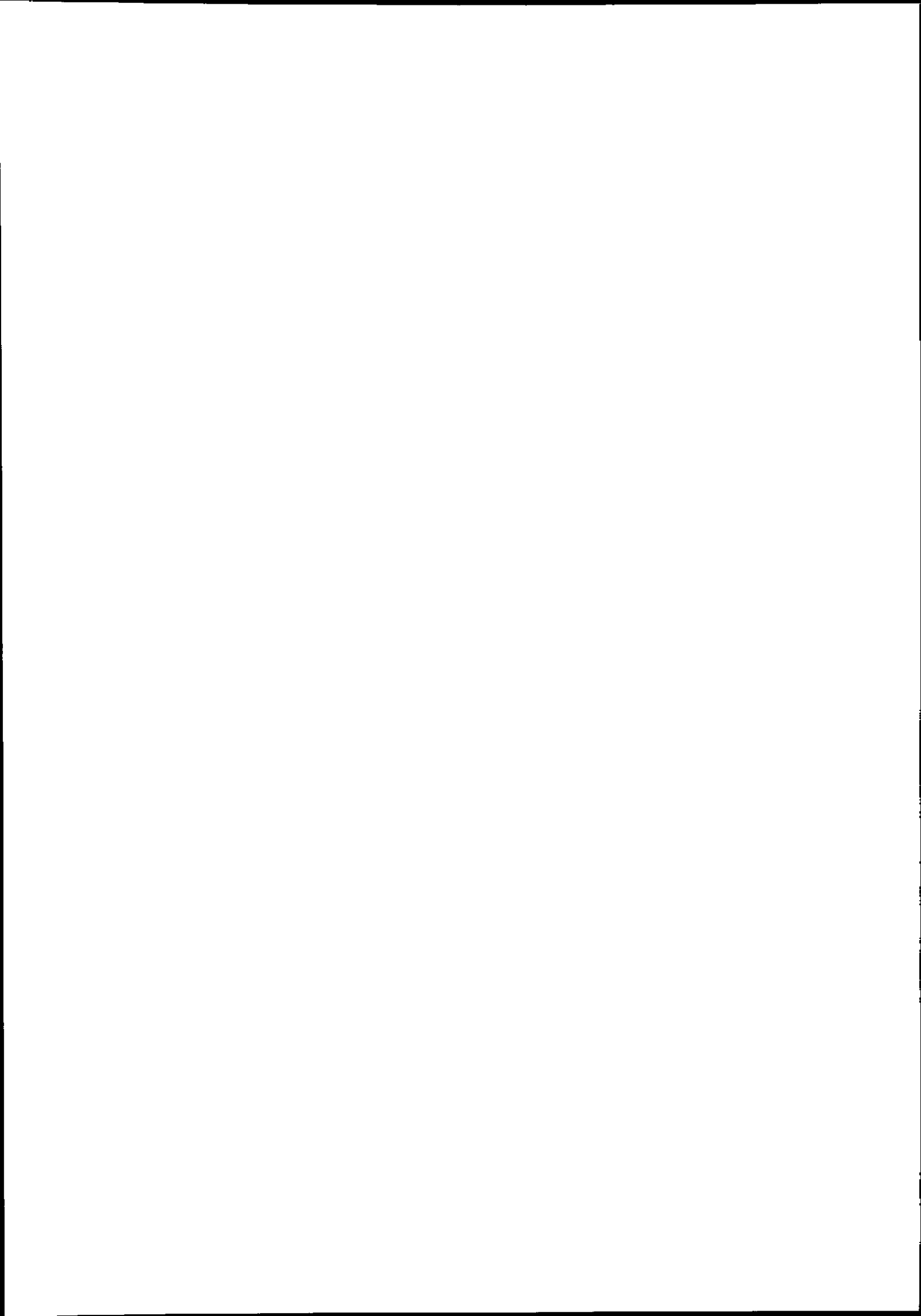
- [Go77] K. Goeke Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 212
- [Gr57] J.J. Griffin and J.A. Wheeler, Phys. Rev. **108** (1957) 311
- [Gu67] M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **8** (1967) 1979
- [Gu69] M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **10** (1969) 1004
- [Gu70] M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **11** (1970) 1791
- [Gu71] M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12** (1971) 343
- [Ha72] M. Hage-Hassan and M. Lambert, Nucl. Phys. **A188** (1972) 545
- [Ha73] P.K. Haff and L. Willets, Phys. Rev. **C7** (1973) 951
- [Ha77] M.N. Harakeh, K. van der Borg, T. Ishimatsu, H.P. Morsch, A. van der Woude and F.E. Bertrand. Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 676
- [Hi53] D.L. Hill and J.A. Wheeler, Phys. Rev. **89** (1953) 1102
- [Ho73] G. Holzwarth, Nucl. Phys. **A207** (1973) 545
- [Ho76] T. Hoshino and A. Arima, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 266
- [Ia87] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge Univ. Press. (1987)
- [Ik59] K. Ikeda et al, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **22** (1959) 663
- [Ja64] B. Jancovici and D.H. Schiff, Nucl. Phys. **58** (1964) 678
- [Ja75] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, N.Y., (1975)
- [Ja84] D. Janssen, M. Miltzer and R. Reif Nucl. Phys. **A425** (1984) 152
- [Jo84] R.V. Jolos, R. Schmidt and J. Teichert, Nucl. Phys. **A429** (1984) 139
- [Ka60] M. Kalagashi and T. Marumori, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **23** (1960) 387
- [Ka68] A. Kamlah, Z. Phys. **216** (1968) 52
- [Ka79] K.K. Kan, J.J. Griffin, P.C. Lichtner and M. Dworzecka, Nucl. Phys. **A332** (1979) 109
- [Ke62] A.K. Kerman and CM Shakin, Phys Lett. **1** (1962) 151
- [Ke76] A.K. Kerman and S.E. Koonin Ann. of Phys. (N.Y.) **100** (1976) 332
- [Ko79] M.A. Kovash, S.L. Blatt, R.N. Boyd, T.R. Donoghue, H.J. Hausman, A.D. Bacher, Phys Rev. Lett. **42** (1979) 700
- [Kr76] S. Krewald, R. Rosenfelder, J.E. Galonska and A. Faessler, Nucl. Phys. **A269** (1976) 112
- [Kr77] S. Krewald, V. Klemnt, J. Speth and A. Faessler, Nucl. Phys. **A281** (1977) 166
- [Ku92] W. Kuhn, Proc. of the 8th. Int. Wint. Workshop on Nucl. Dyn., Jackson Hole, Wy-USA, jan. 1992, Ed. B.B. Back and W. Bauer, World Scientific. (1992),
- [La41] L.D Landau, J. Phys. (USSR) **5** (1941) 71
- [La64] A. M. Lane, *Nuclear theory*, Benjamin, New York (1964)
- [La69] L.D. Landau and E.F. Lifschitz, *Mécanique Classique*, Mir, Moscow (1969) sect.28
- [La74] L.F.F. Lathourvers, Nucl. Phys. **A226** (1974) 125
- [La76] L.F.F. Lathourvers, Ann. Phys. (N.Y.) **102** (1976) 347
- [La90] G. Lauritsch and P.G. Reinhard, Nucl. Phys. **A509** (1990) 287.
- [La92] Land Collaboration, Nucl. Inst. Meth. **A314** (1992) 136
- [La93] Land Collaboration, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1767
- [Le50] J.S. Levinger and H.A. Bethe, Phys. Rev. Lett. **42** (1950) 115

- [Le79] C. Leclerc-Willain and K. Dietrich Phys. Lett. **87B** (1979) 21
- [Le80] S. Levit, J.W. Negele and Z. Paltiel, Phys. Rev. **C21** (1980) 1603
- [Le80a] S. Levit, J.W. Negele and Z. Paltiel, Phys. Rev. **bf C22** (1980) 1979
- [Lh93] I. Lhenry, T. Suomijarvi, Ph. Chomaz and N. Van Giai, Nucl. Phys. **A565** (1993) 524
- [Li65] H.J. Lipkin, N. Meshkov and A.J. Glick, Nucl. Phys. **62** (1965) 188,199,211
- [Li76] K.F. Liu and G.E.Brown, Nucl. Phys. **A265** (1976) 385
- [Li76a] K.F. Liu and N. Van Giai Phys. Lett. **65B** (1976) 23
- [Li89] E. Lippardini and S. Stringari, Phys. Rep. **175** (1989)103
- [LI92] W.J. Llope and P. Braun Munzinger, Phys. Rev. **C 45** (1992) 799
- [Ma60] T. Marumori, Prog. Theor. Phys. **24** (1960) 331
- [Ma64] T. Marumori, M. Yamamura, A. Tokunaga and K. Takad. Progr. Theor. Phys. **31** (1964) 1009 and **22** (1964) 726
- [Ma71] E.R. Marshalek, Nucl. Phys. **A161** (1971) 401
- [Ma74] E.R. Marshalek, Nucl. Phys. **A224** (1974) 221 and 245
- [Ma76] E.R. Marshalek, Phys. Lett. **62B** (1976) 5
- [Ma76a] N.Marty , A Willis, V. Comparat, R. Frascaria and M. Morlet, Orsay report IPNO76-03
- [Ma80] E.R. Marshalek, Nucl. Phys. **A347** (1980) 253
- [Ma80a] E.R. Marshalek, Phys. Lett. **95B** (1980) 337
- [Ma84] G. Maino, A. Ventura, L. Zuffi, F. Iachello, Phys. Rev. **C 30** (1984) 2101
- [Me39] O.L. Meitmer and O.R. Frirch, Nature **143** (1939) 239
- [Me83] J. Meyer, P. Quentin and M. Brack, Phys. Lett.**B133** (1983) 15
- [Mi67] A.B.Migdal, *The theory of Finite Fermi systems and Applications to Atomic Nuclei*, Wiley (Interscience) New York N.Y. (1917)
- [Mo76] M.A. Morrison, T.L. Estle and N.F. Lane, *Quantum States of Atoms, Molecules and Solids*, Printice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1976)
- [Mo88] S. Mordechai et al., Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 408
- [Mo88a] S. Mordechai, N. Auerbach, M. Burlein, H.T. Fortune, S.J. Greene, C. Fred Moore, C.L. Morris, J.M. O'Donnell, M.W. Rawool, J.D. Silk, D.L. Watson, S.H. Yoo and J.D. Zumbro, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 531
- [Mo88b] S. Mordechai et al., Phys. Rev. **C38** (1988) 2709.
- [Mo89] S. Mordechai et al, Phys. Rev. **C 40** (1989) 850
- [Mo90] S. Mordechai, H.J. Fortune, J.M. O'Donnell, G. Liu, M. Burlein, A.H. Wuosmaa, S. Greene, C.L. Morris, N. Auerbach, S.H. Yoo and C. Fred Moore, Phys. Rev. **C41** (1990) 202.
- [Mo91] S. Mordechai, H. Ward, K. Johnson, G. Kahrmanis, David Saunders, C. Fred Moore, J.M. O'Donnell, M.A. Kagarlis, D. Smith, H.T. Fortune, C.L. Morris, Phys. Rev. **C 43** (1991) R 1509
- [Mo91a] S. Mordechai and C. Fred Moore, Nature **352** (1991) 393
- [My95] W.D. Myers and W.J. Swiatecki, Nucl. Phys. **A587** (1995) 92
- [Na95] R. Nayak et al, Phys. Rev. **C52** (1995) 711
- [Ne82] J.W. Negele, Rev. Mod. Phys. **54** (1982) 913
- [Ne83] J.O. Newton, B. Herskind, R.M. Diamond, E.L. Dines, J.E. Draper, K.L. Lindenberger, C. Schuck, S. Shih, F.S. Stephens, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 1383

- [Ot78] T. Otsuka, A. Arima and F. Iachello, Nucl. Phys. **A309** (1978) 1
- [Pa68] S.C. Pang, A. Klein and R.M. Dreizler, Ann. Phys. **49** (1968) 477
- [Pe62] R.E. Peierls and D.J. Thouless, Nucl. Phys. **38** (1962) 154
- [Pe77] I. Percival, Adv. Chem. Phys. **36** (1977) 3A
- [Pe77a] A M. Perelomov, Sov. Phys. Ups **20(9)** (1977) 703.
- [Pi66] D.Pines P.Nozieres, *The Theory of Quantum Liquids*, Benjamin New York (1966) N.Y.
- [Po1892] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris (1892)
- [Po84] E.C. Pollacco, J.C. Jacmart, Y. Blumenfeld, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J.P. Garron and J.C. Roynette, Nucl. Inst. and Meth. **225** (1984) 51
- [Po86] G. Pollarolo, R.A. Broglia, and C.H.Dasso, Nucl. Phys. **A 451** (1986) 1212
- [Pr65] J. Da Providencia, Nucl. Phys. **65** (1965) 87
- [Pr68] J. Da Providencia, Nucl. Phys. **A108** (1968) 589
- [Pu77] F.Pühlhofer, Nucl. Phys. **A280** (1977) 267// M.N. Harakeh, extended version
- [Ra1877] J.W.S. Rayleigh, *Theory of Sound*, (1877), Mac Millan London
- [Ra78] J. Randrup, Nucl. Phys. **A307** (1978)319
- [Re76] P.G. Reinhard, Nucl. Phys. **A261** (1976) 291
- [Ri81] P.Ring and P.Schuck, *The Nuclear many body problem*, (1981) (Springer-Verlag N.Y.)
- [Ri84] P. Ring, L.M. Robledo, J.L. Egido and M. Faber, Nucl. Phys.A419 (1984) 261
- [Ri93] J. Ritman et al.,Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 533
- [Ro81] J.C. Roynette, N. Frascaria, Y. Blumenfeld, J.C. Jacmart, E. Plagnol, J.P. Garron, A. Gamp and H. Fuchs. Z. Phys. **A299** (1981) 73
- [Sa62] J. Sawicki, Phys. Rev. **126** (1962) 2231
- [Sa83] T. Saito, Y. Fujii, K. Saito, Y. Torizuka, T. Tohei and J. Hirota, Phys. Rev. **C28** (1983) 652
- [Sa84] H. Sagawa and G.F. Bertschi, Phys. Lett.B146 (1984) 138
- [Sc73] P. Schuck and S. Ethofer, Nucl. Phys. **A212** (1973) 269
- [Sc91] J. A. Scarpaci, Y. Blumenfeld, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J. P. Garron, J. C. Roynette, T. Suomijärvi, N. Alamanos, B.Fernandez, A. Gillibert, A. Lepine, A. Van der Woude, Phys. Lett. **258B** (1991) 279
- [Sc91b] R. Schmidt, Ph. D. Dissertation, University of Mainz (1991) GSI report n° 9-91 (to be published)
- [Sc91c] J. A. Scarpaci, These Orsay (1991)
- [Sc93] J. A. Scarpaci, Y. Blumenfeld, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J. P. Garron, J. C. Roynette, T. Suomijärvi, N. Alamanos, B.Fernandez, A. Gillibert, A. Lepine, A. Van der Woude, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3766
- [Sc93a] R.Schmidt et al., Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1767.
- [Sh75] S. Shlomo and G.F. Bertch Nucl. Phys. **A243** (1975) 507
- [Sh93] S. Shlomo and D.H. Youngblood, Phys. Rev. **C47** (1993) 529
- [Sn86] K.A. Snover, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **36** (1986) 545
- [So83] M. Sommermann, Ann. Phys. **151** (1983) 163
- [So94] U. Sonnadara et al. Proc. of the Gull Lake Nucl. Phys. Conf. August 1993 (USA) and to be published in Nuc. Phys A. (1994)
- [Sp81] J. Speth and A. Van der Woude, Rep. Progr. Phys. **44** (1981) 719
- [Sp91] J.Speth, *Electric and Magnetic Giant Resonances in Nuclei*, World Scientific (1991)

- [St50] H.Steinwedel and J.H.D. Jensen, *Z. Nat.* **5a** (1950) 413
- [Su61] H. Suhl and N. R. Werthamer, *Phys. Rev.* **122** (1961) 359
- [Su89] T. Suomijärvi, D. Beaumel, Y. Blumenfeld, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J.P. Garron, J.C. Jacmart, J.C. Roynette, J. Barrette, B. Berthier, B. Fernandez, J. Gastebois, P. Roussel-Chomaz, W. Mittig, L. Kraus, and I.Linck, *Nucl.Phys.* **A491** (1989) 314
- [Su90] T. Suomijärvi, D. Beaumel, Y. Blumenfeld, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J.P. Garron, J.C. Roynette, J. A. Scarpaci, J. Barrette, B. Fernandez, J.Gastebois and W. Mittig, *Nucl. Phys.* **A509** (1990) 369
- [Ta59] S. Takagi, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **21** (1959) 174
- [Th61] D.J. Thouless, *The Quantum Mechanics of Many Body Systems*, Academic Press, New York (1961)
- [Th61a] D.J. Thouless, *Nucl. Phys* **22** (1961) 78
- [To77] A.F.R. De Toledo Piza et al, *Phys. Rev.* **C15** (1977) 1477
- [To78] A.F.R. De Toledo Piza and E.J.V. De Passos, *Nuovo Cimento* **45B** (1978) 1
- [Tr81] H. Tricoire, C. Marty and D. Vautherin *Phys. Lett.* **100B** (1981) 106
- [Tr81a] H. Tricoire, H. Flocard and D. Vautherin *Phys. Lett.* **100B** (1981) 103
- [Ts78] S.F. Tsai, *Phys. Rev.* **C17** (1978) 1862
- [Um84] S.A. Umar, M.R. Strayer and D.J. Ernst, *Phys. Lett.* **140B** (1984) 290
- [Us60] T. Usui, *Progr. Theor. Phys.* **23** (1960) 787
- [Va75] D. Vautherin, *Phys. Lett.* **57 B** (1975) 425
- [Va84] D. Vautherin and N. Vinh Mau, *Nucl. Phys.*A422 (1984) 140
- [Vi72] F. Villars, *Proc. of the Int. Conf. on Dyn. Struct. of Nucl. States*, Mont Tremblant, 1971, D.J. Rowe, L.E. Trainor, S.S.MS. Wong, T.W. Donnelly, Eds. Toronto, Univ. Press, (1972)
- [Vi75] F. Villars, *Proc. of the Int. Conf. on Nucl. Selfconsistent Fields*, Trieste, G.Ripka and M. Porneuf, Eds. North. Holland. Amsterdam (1975)
- [Vi77] F. Villars, *Nucl. Phys* **A285** (1977) 269
- [Wa92] H. Ward, K. Johnson, G. Kahrimanis, D. Saunders, C. Fred Moore, S. Mordechai, C.L. Morris, H.T. Fortune, M. Akagarlis, D.A. Smith, J.M. O'Donnell, N. Auerbach, *Phys. Rev. C* **45** (1992) 2723
- [Wa93] H. Ward, J. Johnson, K. Johnson, S. Greene, Y. Grof, C. Fred Moore, S. Mordechai, C.L. Morris, J.M. O'Donnell and C. Whitley, *Phys. Rev. Lett* **70** (1993) 3209
- [We34] C. F. Weiszacker, *Z. Phys.* **88** (1934) 612
- [Wi34] E. J. Williams, *Phys. Rev.* **45** (1934) 729
- [Wi35] E. J. Williams, K. Dan Vidensk and S. Selsk, *Math. Fys. Med* **13** (1935) 4
- [Wi79] A. Winther and K. Alder, *Nucl. Phys.* **A319** (1979) 518
- [Wo87] A. Van der Woude, *Prog. in Part. and Nucl. Phys.* **18** (1987) 217
- [Ya83] C. Yannouleas, M. Dworzecka and J. J. Griffin, *Nucl. Phys.* **A397** (1983) 239
- [Ya85] C. Yannouleas, S. Jang and Ph. Chomaz, *Phys. Lett.* **163B** (1985) 55
- [Yo77] D.H.Youngblood, C.M. Rosza, J.M. Moss, D.R. Brown and J.D. Bronson, *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 1188
- [Yu94] V.Yu.Ponomarev et al., *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 1168.
- [Za84] I. Zahed and M. Baranger, *Phys. Rev.* **C29** (1984) 1010
- [Ze93] V. Zelevinsky, *Nucl. Phys.* (in press) C.A. Bertulani and V. Zelevinsky Preprint MSUCL-891 (1993)
- [Zw60] R. Zwanzig, *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. III (Boulder, 1960), Interscience, N.Y. (1961)





## NOYAUX EXOTIQUES: PRODUCTION, PROPRIÉTÉS ET SPÉCIFICITÉS

PIET VAN DUPPEN

Instituut voor Kern- en Stralingsfysica

University of Leuven

Celestijnenlaan 200D

B-3001 Leuven, Belgium

## RESUME:

La production de faisceaux radioactifs est présentée. Les deux méthodes principales (séparation en ligne suivie d'une post-acceleration et séparation en vol) sont comparées et leur complémentarité est soulignée. Quelques expériences sont présentées et leur impact sur la structure nucléaire des noyaux "exotiques" est discuté.

## ABSTRACT:

The production methods of energetic radioactive ion beams are reviewed emphasising the complementary aspects of the two principle production methods: isotope separation on-line followed by post-acceleration (ISOL) and in-flight separation (IFS). Examples of experiments related to exotic nuclei using both methods are given.

I.-INTRODUCTION

The radioactive nuclei building up the nuclear chart have, since the discovery of radioactivity a century ago, been the corner stones of many different studies in fundamental research and of many applications in various fields. Of course they have played and are still playing a central role in the development of nuclear- and particle physics. Nuclear-structure studies aim at a deeper understanding of the strongly interacting finite quantum many-body system and of the relation between the forces acting between the nucleons in the atomic nucleus and the fundamental forces. Recently, the nuclei at the boundaries of the nuclear chart - near the proton- en neutron driplines - have received an increased interest. The balance between protons and neutrons of these so-called *exotic* nuclei is so far from equilibrium - i.e. from the  $Z/N$ -ratio in

the valley of stability - that it is questionable if nuclear models, valid close to stability, survive at these boundaries. Experiments with these close-to-drip line nuclei will reveal critical information to guide the developments of theoretical models and to test their applicability. Furthermore, many of these still unknown nuclei are lying on nucleosynthesis paths; the reaction-, decay- and ground-state properties of some of these nuclei can play a key role in the development of reliable nucleosynthesis scenarios.

Exotic nuclei are extremely difficult to produce and study because of their extremely low production cross section and the overwhelming production of unwanted species in the same target. But recent technical developments have made it possible to produce a whole series of exotic nuclei in conditions that allow the study of their properties.

In this paper we will put the production of energetic radioactive ion beams of exotic nuclei in perspective and describe the two complementary production processes that are used nowadays: Isotope Separation On-Line (ISOL) followed by post-acceleration, and In-Flight Separation (IFS) (section II). After a general description of the process we will focus on recent technical developments in the field. In the subsequent section III, we give some "typical" examples of physics cases that are addressed with exotic beams. The examples are chosen not only because of their physics importance but also to demonstrate the complementary aspects in the production process and the detection systems. Clearly this overview will not be complete and the reader is referred to literature (see list of references) for further information, nor is the lecture intended to give an overview of all the efforts that are taking place in the field by mentioning every project separately.

One last remark about the name "exotic" before serving the main course. In 1966 a symposium on Nuclides far off the Stability Line was organised in Lysekill, Sweden. In the introduction to the proceeding of this conference Igmarr Bergström wrote: "*... the nuclei to be discussed belong to a certain group which we, lacking a better name, have called nuclei far off the stability line. It is certainly not necessary to emphasise that we mean the line of beta stability.*" It is clear that choosing a name for these short-lived, close to the drip-line nuclei has not been easy and some might think that the term "exotic" nuclei has been chosen because it is trendy. Still according to "The Concise Oxford Dictionary"<sup>1)</sup> exotic means: 1. Introduced from or originating in a foreign (especially tropical) country / 2. Attractively or remarkably strange or unusual; bizarre / 3. Of a kind newly brought into use. Some justification of the term "exotic" can be found in explanation nr. 2 and 3.

## II-THE PRODUCTION OF EXOTIC NUCLEI.

In ideal conditions the exotic nuclei should be available in copious amounts, free of any contamination, well defined in energy (the energy being variable), occupying a small phase-space volume (excellent ion-optical quantities). This is a dream of course, but we can try to make reality as close as possible to our wishes.

Various nuclear reactions in a broad energy range are used for the production of the radioactive nuclei. The most commonly used primary beams are neutrons, protons, deuterons and heavy ions and the energy varies from thermal energies over Coulomb barrier energies to relativistic energies. After the production phase the radioactive nuclei are manipulated and prepared for the experiment. This whole process must therefore fulfil as good as possible the following criteria:

1. *High production rate.*

As the cross section is a nature given number we have to optimise the beam-target combination. Furthermore, accelerators have to be used that can deliver the highest beam intensities and target systems have to be developed that can cope with the power deposition of the primary beam and of the secondary reaction products.

2. *High efficiency.*

The production rate of the very exotic nuclei will always be marginal. Therefore any manipulation of the reaction products - e.g. purification, transport to the detection system - has to be very efficient in order not to loose the few precious nuclei that we want to study.

3. *Fast.*

One general property of all near-drip line nuclei is their extremely short half life ( $\mu$ -second to second range). Therefore all processes that take place between the production process and the experiment must be extremely fast in order not to loose too much of the primary activity.

4. *Selective.*

The production process is in general not selective and the exotic nucleus of interest is only a fraction of the total amount of produced nuclei. As the peak to background ratio in every experiment is crucial, the beam delivered to the experimental set-up must in an ideal case only consist out of the nuclei of interest. Therefore the whole production process must be element and isotope selective.

In fig. 1 we show very schematically how the production process can take place.

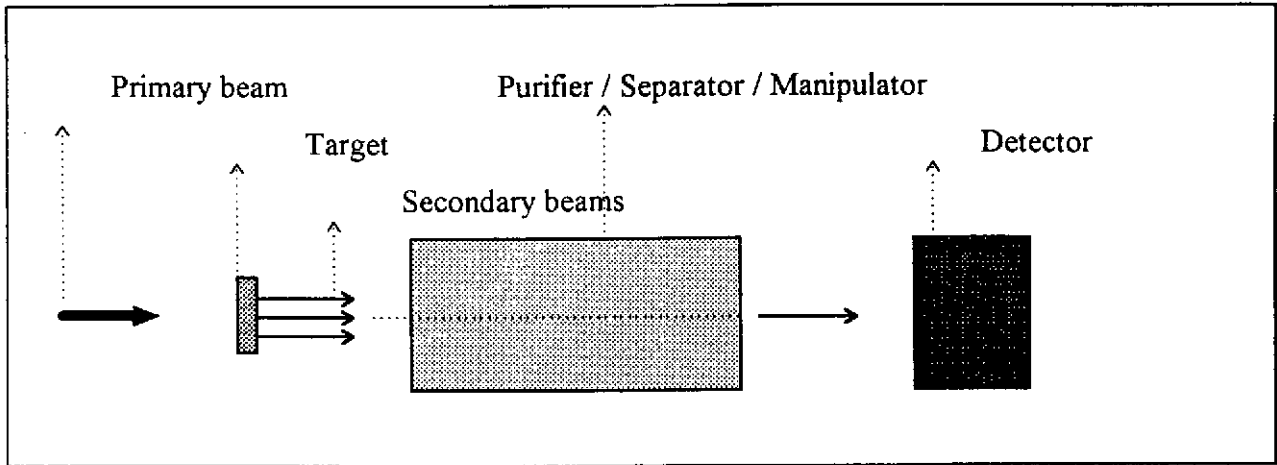


Fig. 1: Schematic drawing of an experiment to study exotic nuclei.

## II-1 NUCLEAR REACTIONS TO PRODUCE EXOTIC NUCLEI

Several nuclear reactions are used to produce exotic nuclei. For convenience one defines the luminosity of the reaction ( $L$ ) as the product of the primary beam intensity ( $N_p$ : particles/s) and the target thickness ( $N_t$ : atoms/cm<sup>2</sup>):

$$L = N_p \cdot N_t \text{ (s}^{-1} \text{ cm}^{-2}\text{)}$$

Table 1 summarises possible luminosities obtained for the most common reactions used. From this table one concludes that the highest luminosities are obtained with the energetic neutrons while the lowest with heavy-ion fusion reactions.

The different reaction mechanisms lead also to different regions in the chart of nuclei. For example fission reactions produce neutron-rich nuclei while light ion induced spallation produces predominantly neutron-deficient nuclei south-west from the target nucleus. Projectile fragmentation produces nuclei south-west of the projectile nucleus.

*Table 1: Typical luminosities of different reactions used to produce exotic nuclei. The numbers are approximate. Sometimes one uses for convenience as units for luminosity  $s^{-1} \text{ barn}^{-1}$ .*

Beam / reaction	Primary beam intensity ( $s^{-1}$ )	# target atoms ( $\text{cm}^{-2}$ )	Luminosity ( $s^{-1} \text{ cm}^{-2}$ )
low-energy protons (30 MeV) / fusion, fission	$10^{15}$	$10^{22}$	$10^{37}$
high-energy protons (1 GeV) / fission, spallation, fragmentation <sup>a</sup>	$10^{13}$	$10^{24}$	$10^{37}$
heavy ions (5 MeV/u) / fusion	$10^{13}$	$10^{19}$	$10^{32}$
thermal neutrons / fission	$5 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^{21}$	$2 \cdot 10^{36}$
energetic neutrons (100 MeV) / fission <sup>b</sup>	$10^{15}$	$10^{24}$	$10^{39}$
high-energy heavy ions / fragmentation			
E < 100 MeV/u	$10^{13}$	$10^{22}$	$10^{35}$
E > 100 MeV/u	$10^{11}$	$10^{23}$	$10^{34}$

a) example:  $p(1 \text{ GeV}, 2 \mu\text{A}) + \text{Sn-target} \rightarrow {}^{110}\text{In}$  ( $\sigma \sim 20 \text{ mbarn}$ ):  $2 \cdot 10^{11}$  atoms/s

b) Energetic neutrons are produced from 200 MeV deuteron beams like proposed by J. Nolan et al. <sup>2)</sup>

## II-2 SEPARATING EXOTIC NUCLEI

After the production process we have to separate the exotic nuclei from the primary beam and from the other unwanted secondary beams. For this purpose two complementary techniques have been developed over the last decades: the so-called isotope separation on line (ISOL) technique eventually followed by post-acceleration and the so called in-flight separation (IFS) technique. The ISOL techniques rely on the availability of the radioactive species produced in a target and thermalised in a catcher consisting out of solid, liquid or gas material. Often the target and catcher are one and the same. The isotopes are subsequently extracted from the catcher material and ionised in an ion source. After extraction from the ion source the species are mass analysed using a magnetic dipole magnet and subsequently accelerated to the required energy. The IFS method makes use of the kinematics of the reaction and some combination of magnetic- and electrical fields, and atomic processes to separate the isotopes of interest from the primary beam or from other isotopes produced in the reaction.

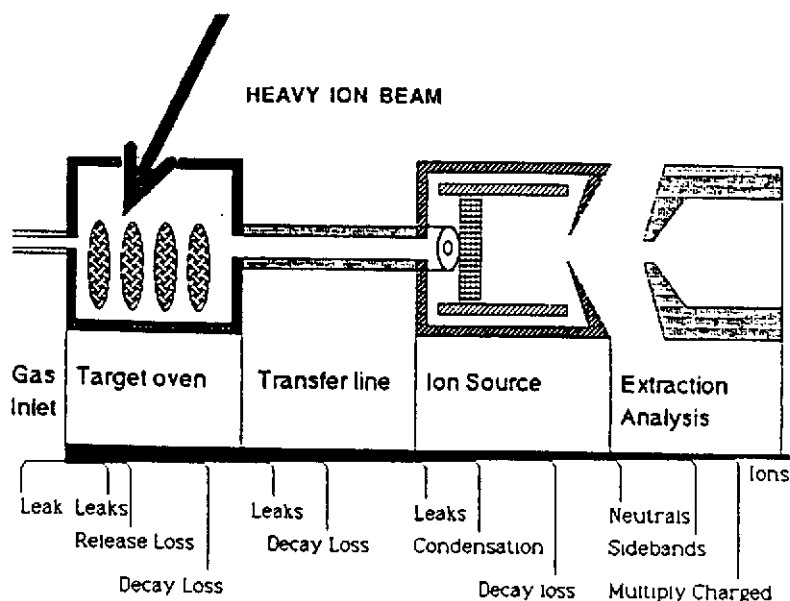


Fig.2: Schematic representation of a target-ion source system. The reaction products produced in the target have to diffuse from the target container to the ion source where they are ionised and extracted. The different loss mechanisms are shown in the bottom of the figure. The heavy ion beam indicates that these loss effects can be studied in a very precise way using energetic heavy ion beams<sup>49)</sup>.

### II.2.1 THE ISOL TECHNIQUE: FROM FAST TO SLOW TO FAST.

The first on-line isotope separators were built some thirty years ago and a vigorous development program for the target-ion source systems has been pursued since then. Fig. 2 gives a schematic drawing of the target - ion source system and points to the different limitations. After production and thermalisation in the target-catcher material the radioactive atoms have to diffuse out of the target-catcher material and effuse towards the ion source<sup>3,4,5)</sup>. Different parameters determine the release and transport properties (temperature, chemistry, absorption- and desorption coefficients). The target-catcher material itself should not be evaporated of course and this limits the target-catcher choice to materials with very low-vapour pressure and good stability at high temperature. Furthermore as the diffusion and effusion should be as fast as possible, porous material is normally used. From this it is clear that, in general, this method can't be applied to make a beam of short-lived radioactive ions from refractory elements or elements that are used as target-catcher material. Exceptions to this rule exist of course, but it would lead us too far to dwell on this interesting subject. Let us just remark that the ion guide system in which the reaction products are thermalized inside a gas cell filled with a noble gas (like helium or argon) and swept as  $1^+$  ions together with the helium gas into the front-end of the isotope separator,

overcomes this problem of chemical selectivity<sup>6)</sup>. But as the reaction products have to recoil out of the target this system can only use thin targets. On the other hand one can use the physico-chemical properties of the radioactive atoms to make already some selection. The simplest example is cooling the transfer line between the target and the ion source. By doing this one avoids the non-gaseous elements to pass from the target to the ion source. They will stick to the wall of the cold transfer line and decay, while the isotopes from gaseous elements pass further to the ion source. This technique is very powerful and used very frequently at ISOLDE to produce beams of the noble gas elements<sup>4)</sup>. Once in the ion source the atoms are ionised by electron bombardment, surface ionisation, or laser ionisation. We will not explain all the different ionisation mechanisms used in the ion sources as extended literature on this subject can be found in different textbooks<sup>7)</sup>. We will only discuss two recent developments in ion source technology: Electron Cyclotron Resonance ion sources (ECR) and laser ion sources.

- ECR ion sources:

ECR ion sources are based on electron impact ionisation. The plasma is contained in a magnetic bottle structure usually made from a combination of solenoid fields (axial confinement) and multipole fields made with permanent magnets (radial confinement). In this way a "minimum B" structure is obtained, having a minimum magnetic field in the centre of the source<sup>8)</sup>. High frequency radio frequency (RF) power is injected in the plasma and the electrons take their energy out of the RF field every time they pass the zone where the magnetic field  $B_{\text{ECR}}$  fulfils the following relation:

$$\nu_{\text{RF}} = \nu_{\text{ECR}} = e B_{\text{ECR}} / (2\pi m_e)$$

with  $\nu_{\text{RF}}$  the RF frequency and,  $e$  and  $m_e$  the charge and mass of the electron. This zone is often called the ECR zone. On-line ECR sources have been developed at different places like Louvain-la-Neuve<sup>9)</sup>, GANIL<sup>8)</sup> and Triumf<sup>10)</sup>. These sources show very high efficiencies for singly- and multiple charged ions and have proven to be very effective for noble gases. Vigorous developments to use the sources also for non-gaseous elements is underway and using the source as a charge state multiplier is currently under investigation at Grenoble<sup>11)</sup>. The fact that ECR sources produce beams of high charge state ions makes them interesting for post-acceleration as the length and thus the cost of the accelerator is much smaller.

- laser ion sources:

Resonant photo ionisation, whereby the atoms are stepwise excited by laser photons until they reach the continuum, is a very efficient and selective process. With the laser power obtained from nowadays commercial lasers one can ionise atoms of almost all elements. Furthermore by the



resonant character of these excitations one reaches a very high degree of element (eventually isotopic) selectivity. For an introduction in the field of resonant ionisation the reader is referred to the following references<sup>12, 13)</sup>. The principle of laser ionisation has been successfully implemented in an on-line ion source for the production of beams of radioactive ions in two different ways<sup>14)</sup>. At the ISOLDE facility, the laser light is shined into a hot cavity that is connected to the target container<sup>15)</sup>. The atoms that diffused from the target material and enter the hot cavity are ionised through interactions with the laser light and are subsequently subtracted from the source. At the LISOL facility, the reaction products are thermalised in a gas cell [cfr. the ion-guide principle<sup>6)</sup>] and photo ionised before they reach the exit hole of the gas cell<sup>16)</sup>. The latter approach uses the "thin target" technique as the reaction products have to recoil out of the target which makes the total production rates limited. But it has the advantage that, for certain "refractory type" elements the long diffusion times in the "thick target" approach are avoided.

After ionisation depending on the charge state the ions are either directly used for experiments or injected into the accelerator. In case of the REX-ISOLDE project<sup>17)</sup> further cooling in a Penning trap<sup>18)</sup> and subsequently injected into an EBIS ion source<sup>19, 20)</sup> for further charge state breeding is applied, prior to acceleration. This cooling and "manipulating" of radioactive ions improves substantially the beam quality and prepares the beams for specific experiments like further acceleration, injection into a high-precision trap for mass measurements, soft landing,... This development is rather new and carries a lot of potential for further developments and applications.

Finally, without going into details, different accelerator structures like cyclotrons (ARENAS<sup>3 21)</sup>, SPIRAL-GANIL<sup>22)</sup>), linear accelerators (REX-ISOLDE<sup>17)</sup>, TRIUMF-Vancouver<sup>23)</sup>, INS-Tokyo<sup>24)</sup>) and tandems (Oak-Ridge<sup>25)</sup>, EXCYPT-Catania<sup>26)</sup>) are under construction at different places.

Note that most of the first generation R&D projects are based in an existing accelerator laboratory. It is natural that the local know-how has influenced the different technical choices.

## II.2.2 IN-FLIGHT SEPARATION

In-flight separation makes use of the kinematic properties of the reaction products after the nuclear reaction. Three types of nuclear reactions are used: fission, heavy-ion fusion and heavy-ion fragmentation.

In thermal neutron induced fission on a thin heavy target, like uranium, the reaction products have a typical recoil energy of a few tens of MeV. An example of a in-flight separator using thermal neutron induced fission is Lohegrin <sup>27)</sup> at Grenoble.

Heavy-ion fusion result in a recoil velocity that can be approximated by:

$$v_R = A_P v_P / A_C$$

with  $v_R$  and  $v_P$  the velocity of the recoiling reaction products and the primary beam particles respectively and  $A_P$  and  $A_C$  the mass of the projectile and the compound nucleus respectively. As the cross sections for heavy-ion fusion are largest around the Coulomb barrier typical recoil energies vary from 0.2 to 3 MeV/u depending on the masses of the projectile and the target. The secondary products and the primary beam can be separated by a velocity filter like for example the FMA- in Argonne <sup>28)</sup> or the gas-filled separator RITU <sup>29)</sup> in Jyväskylä.

At higher energies, much higher then the Coulomb barrier, up to relativistic energies, fragmentation reactions dominate. After fragmentation the velocity of the primary and secondary products are approximately the same:  $v_f \sim v_p$  ( $v_f$  and  $v_p$  are the velocities of the fragments and the primary beam particles respectively). The fragmentation reaction gives rise to a spread ( $\sigma$ ) in momentum ( $p$ ). The relative momentum spread ( $\sigma/p_F$ ) can be approximated by:

$$\frac{\sigma}{p_F} = \frac{\sigma_0}{p_F} \sqrt{A_P - A_F}$$

with  $A_P$  and  $A_F$  the mass of the projectile and the fragment <sup>30)</sup>. One notices that the larger the number of abraded nuclei (the larger the difference in mass between the projectile and the fragment) the larger the momentum spread. For fragmentation reactions of heavy nuclei ( $A > 100$ ) at  $E = 500$  MeV/u the typical relative momentum spread is 1% and the solid angle is 1 msr <sup>31)</sup>. The separator must cope with this spread and solid angle.

In-flight separators use electrical and magnetic fields, or a combination of them, to separate the primary from the secondary beams, and the wanted from the unwanted secondary beams. By placing the magnet and electrical fields in different configurations one obtains separation according to the velocity, independent of the mass over charge ratio or visa versa. In fig.3 a schematic lay-out of a fragment separator is shown. It consists out of focusing elements

(quadrupole triplets) and magnetic dipole elements. The magnetic dipoles delivers a  $M/Q$  selection. This selection is hampered by the charge state dispersion after the nuclear reaction (different  $Q$ -values). A solution to this problem is going to much higher primary energies, where the reaction products are fully stripped. For example a primary beam of 1 GeV/u (typical energy of the GSI synchrotron) allows fully stripped ions up to  $Z \sim 80$ <sup>31)</sup>. The symmetric set-up of a fragment separator and the high energy of the secondary beam allows for another separation mechanism. By placing a piece of material (degrader) in between the two symmetric sections, the secondary beam loses a certain amount of energy per nucleon  $\propto Z^2/A_F$ . Thus isotopes with different  $Z$  will have different energy when they have passed the degrader. As a consequence they will be separated by the subsequent dipole magnet section. By shaping the piece of material in a wedge one can even get monochromatic, achromatic or homogeneous beams<sup>31)</sup>.

Finally, one should note that because of the high energy of the secondary beams they are ideally suited for being detected in transmission detector arrays. The energy loss, position and the "time of flight" (TOF) information helps identifying and tracking the secondary particles in a unique way and is one of the most powerful elements of the fragment separation technique.

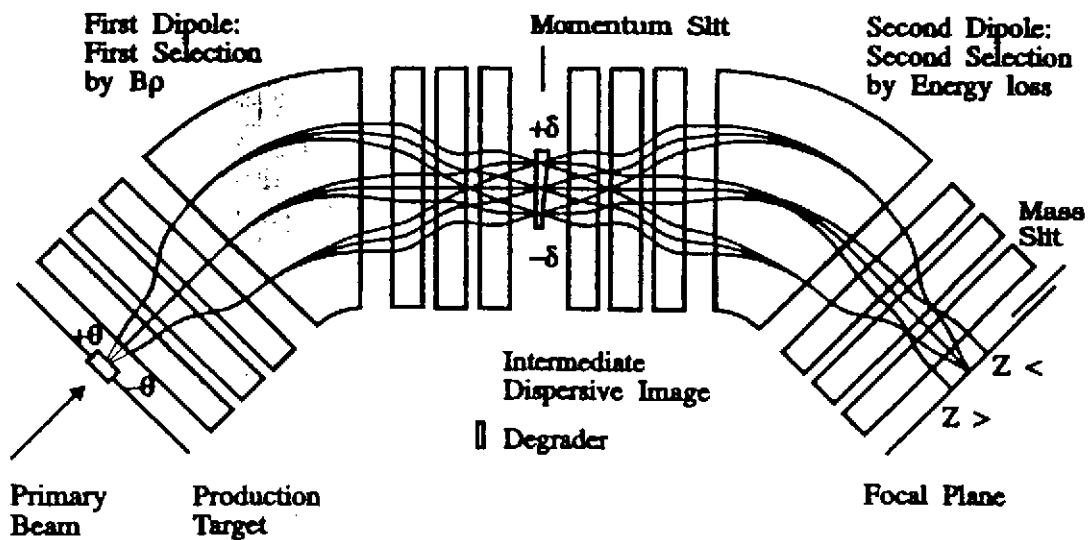


Fig. 3: Schematic representation of a fragment separator<sup>50)</sup>

### III. THE PHYSICS

In this chapter we will give a few examples of experiments that have recently been performed using radioactive ion beams. The examples are chosen to address the complementary aspects of the two different production methods <sup>32)</sup>.

#### III.1 SINGLE-NEUTRON STATES IN <sup>133</sup>SN

Properties of doubly-closed shell nuclei and nuclei in their neighbourhood are of importance for fine-tuning and understanding the shell model. Unfortunately, the number of doubly-closed shell nuclei is very small. This is especially true for the heavy nuclei: <sup>48, 56, 78</sup>Ni, <sup>100, 132</sup>Sn and <sup>208</sup>Pb. The latter is the only stable one and it is thus not surprising that the most complete information has been obtained for this nucleus. Still vigorous experimental programs are pursued in this region of the chart of nuclei. The situation around <sup>132</sup>Sn ( $Z=50$ ,  $N=82$ ) is much less understood partly due to a lack of experimental data. For example, singly particle states in <sup>133</sup>Sn have only been found recently in an experiment at ISOLDE <sup>33)</sup>. By studying the  $\beta$ -delayed neutron decay of <sup>134</sup>In, levels in <sup>133</sup>Sn were populated and their subsequent gamma decay was studied (fig. 4).

The <sup>134</sup>In nuclei were produced in proton (1 GeV) induced fission on a uranium carbide target. After surface ionisation the low-energy (60 keV) beam was sent to a detection station where its  $\beta$ -decay was studied. A combination of gamma, beta and neutron detectors was used resulting in a gamma-ray spectrum that was gated by neutron conditions as shown in fig. 5. These spectra could only be obtained because of the high degree of beam purity, the good beam intensity and the high-quality of the beam spot. From these data one was able to extract information on the single neutron states around  $N=82$ . These type of data are not only useful to test the nuclear shell model but acts as input values in realistic nuclear structure calculations.

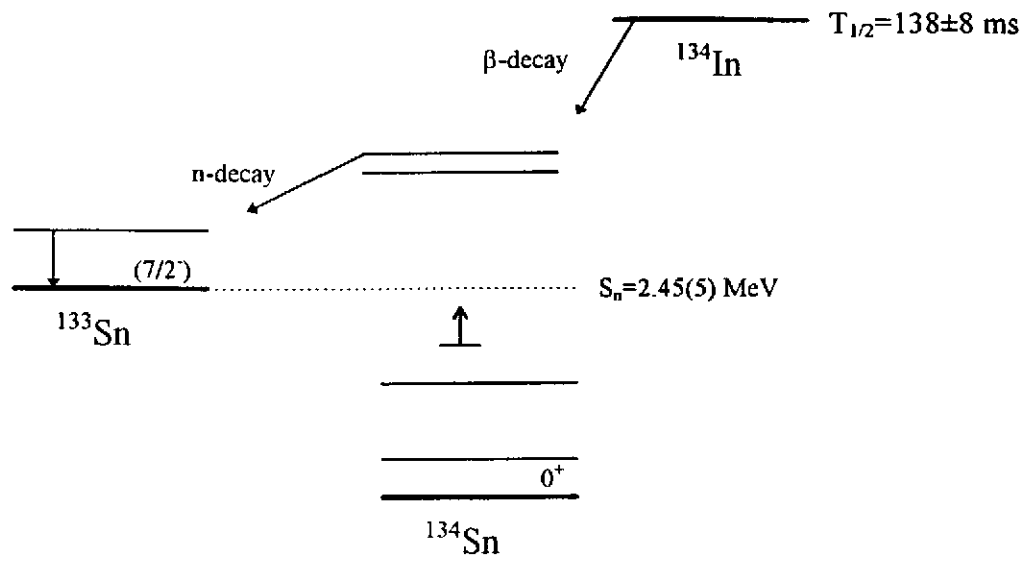


Fig. 4: Schematic drawing of the decay of  $^{134}\text{In}$

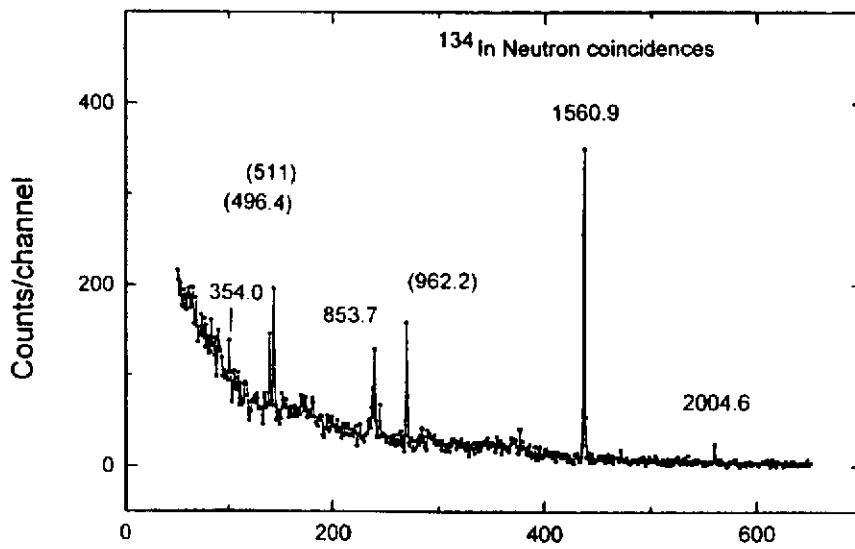


Fig. 5: Part of the neutron gated gamma spectrum obtained at mass  $134^{33)}$

### III.2 SHAPE COEXISTENCE AROUND $Z=82$

Since long experimental evidence exists for shape coexistence around the neutron deficient Pb ( $Z=82$ ) nuclei. The coexisting structure are believed to be based on proton multi-particle-multi-hole excitation across the  $Z=82$  shell gap <sup>34</sup>. In-beam as well as decay studies have delivered complementary information. For example extensive alpha decay studies were performed at several on-line isotope separators (LISOL: Louvain-la-Neuve, Belgium; ISOLDE: CERN, Geneva, Switzerland; and GSI: Darmstadt, Germany) and have revealed a large set of low-lying  $0^+$  states <sup>35</sup>. The decay characteristics have been identified as fingerprints for the underlying structure of the connected states. More recently the efforts in this field of research have been shifted from on-line isotope separators to in-flight separators because of the short half-life limitations at on-line isotope separators. Fine structure studies have revealed for example recently the first excited  $0^+$  state in <sup>188</sup>Pb and the intensity of the alpha line feeding the excited  $0^+$  state indicates a strong mixing of the regular and deformed states in the ground state of <sup>192</sup>Po <sup>36</sup>.

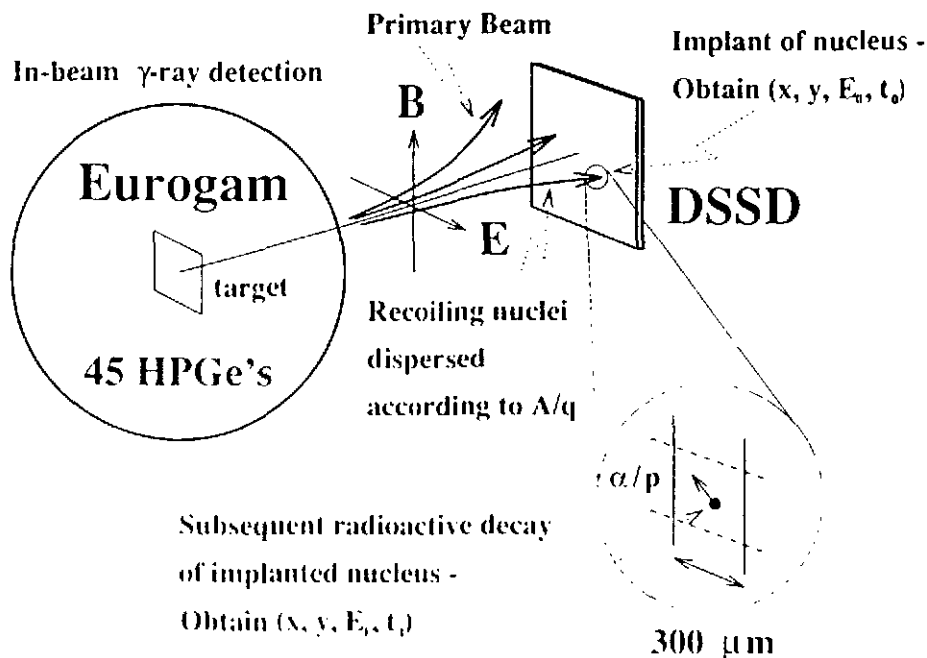
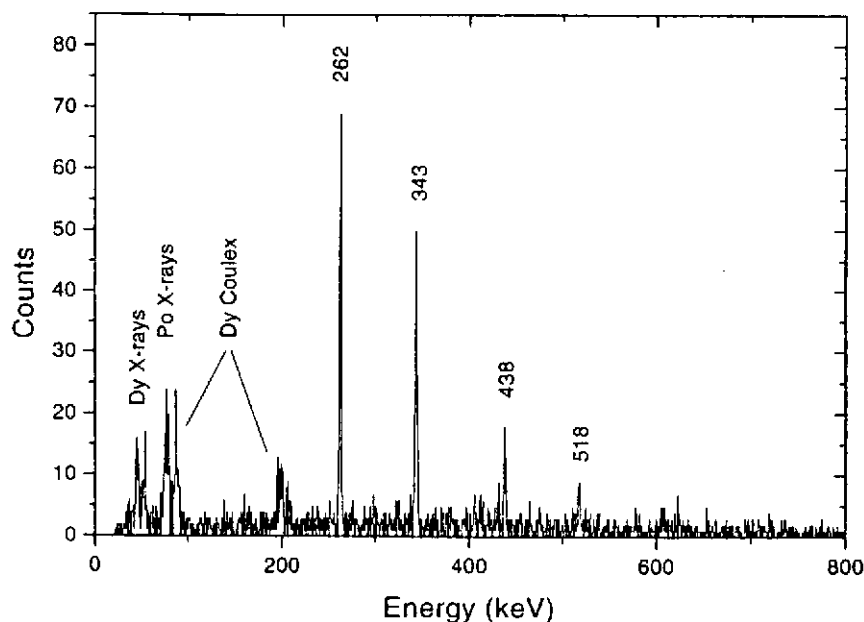
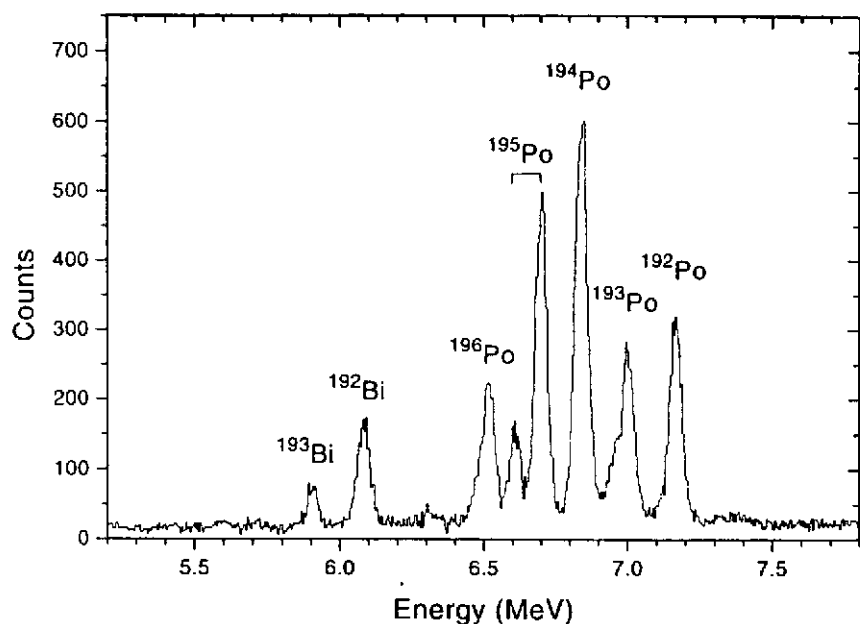


Fig. 6: The principle of recoil-decay-tagging method. Prompt  $\gamma$  rays from the in-beam reaction are detected by a Ge-array (in the case shown it was the Eurogam detector). The recoiling evaporation residues are injected into an in-flight separator (in this case the late Daresbury recoil separator) and are after suppression of the unwanted beam (mainly the primary beam) implanted in a double sided silicon strip detector (DSSD). After a certain time the implanted radioactive nucleus alpha-decays. By correlating the alpha decaying events with the  $\gamma$  events, one obtains extremely clean  $\gamma$  spectra and the alpha decay energy uniquely identifies the nucleus they belong to <sup>37</sup>.

Another very successful application in this region of the chart of nuclei are in-beam studies using the so-called recoil-decay-tagging method. This method, originally developed by E.S. Paul et al. <sup>37)</sup>, is explained in fig. 6. At the RITU in-flight separator of Jyväskylä, recently, a very extensive set of experiments have been performed getting in-beam data on several neutron-deficient Pt, Hg, Pb, Po and Rn nuclei. In fig. 7 we show as an example the gamma spectrum taken for  $^{192}\text{Po}$  using the RDT method <sup>38)</sup>. From these spectra one can conclude that indeed the deformed structure in  $^{192}\text{Po}$  has become the ground state. Similar experiments have been performed at the FMA in Argonne. The difference being that the RITU gas-filled separator only suppresses the primary beam and has no mass selectivity. But the RDT method identifies the nucleus in a unique way.

Fig. 7: The alpha spectrum recorded at the end of the RITU spectrometer in the segmented particle detector. The gamma ray spectrum obtained after correlations with alpha's from the decay of  $^{192}\text{Po}$  <sup>38)</sup>.



### III.3 $^{100}\text{Sn}$ AND OTHER EXOTICS.

The doubly magic  $^{100}\text{Sn}$  nucleus has since long been the "Holy Grail" of nuclear structure physicists. At least if one looks back into history and read some older proposals and conference proceedings. It is clear that its properties are important for our understanding of the atomic nucleus close to the proton drip-line: it is most probably the heaviest  $N=Z$  nucleus that we will be able to study experimentally. The rabbit that defended the Holy Grail in Monty Python's film is this time disguised in the form of an extremely low-cross section. Furthermore every nuclear reaction (heavy ion fusion, fragmentation) produces copious amounts of unwanted nuclei from which one has to extract the few  $^{100}\text{Sn}$ . In two independent experiments  $^{100}\text{Sn}$  was identified at GSI and GANIL<sup>39,40)</sup>. Fig. 8 shows the identification plot obtained at GSI. In total 6 counts were attributed to  $^{100}\text{Sn}$ . Because of the purity of the signal, already first decay properties of  $^{100}\text{Sn}$  could be extracted. Note for example table 1 from ref.<sup>41)</sup> where the decay properties of the six events are summarised. From these data a level scheme was deduced (fig. 9) and compared to a recent calculation of H. Grawe et al.<sup>42)</sup> The errors on the deduced values are of course too large to make any significant comparison. Still it shows the power of the method and with increasing primary beam intensity, the statistics of these experiments can be improved by two orders of magnitude. It should be noted that the intensity of  $^{100}\text{Sn}$  that can be obtained using a heavy ion fusion reaction at an on-line mass separator is much larger compared to the intensity at a fragment separator. Unfortunately the beam purity and possibilities for identification at IFS systems are superior over ISOL systems. This makes these experiments possible at the former and not (yet) at the latter. Still it is interesting to note that the first study of  $^{101}\text{Sn}$  was performed at the GSI on-line isotope separator<sup>43)</sup>.



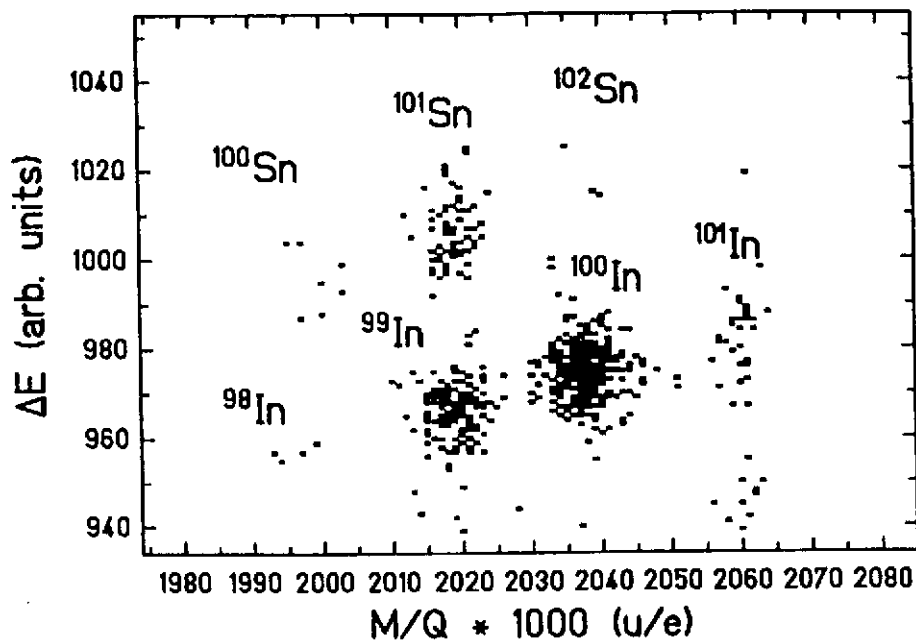


Fig. 8: Identification plot for  $^{100}\text{Sn}^{39)}$

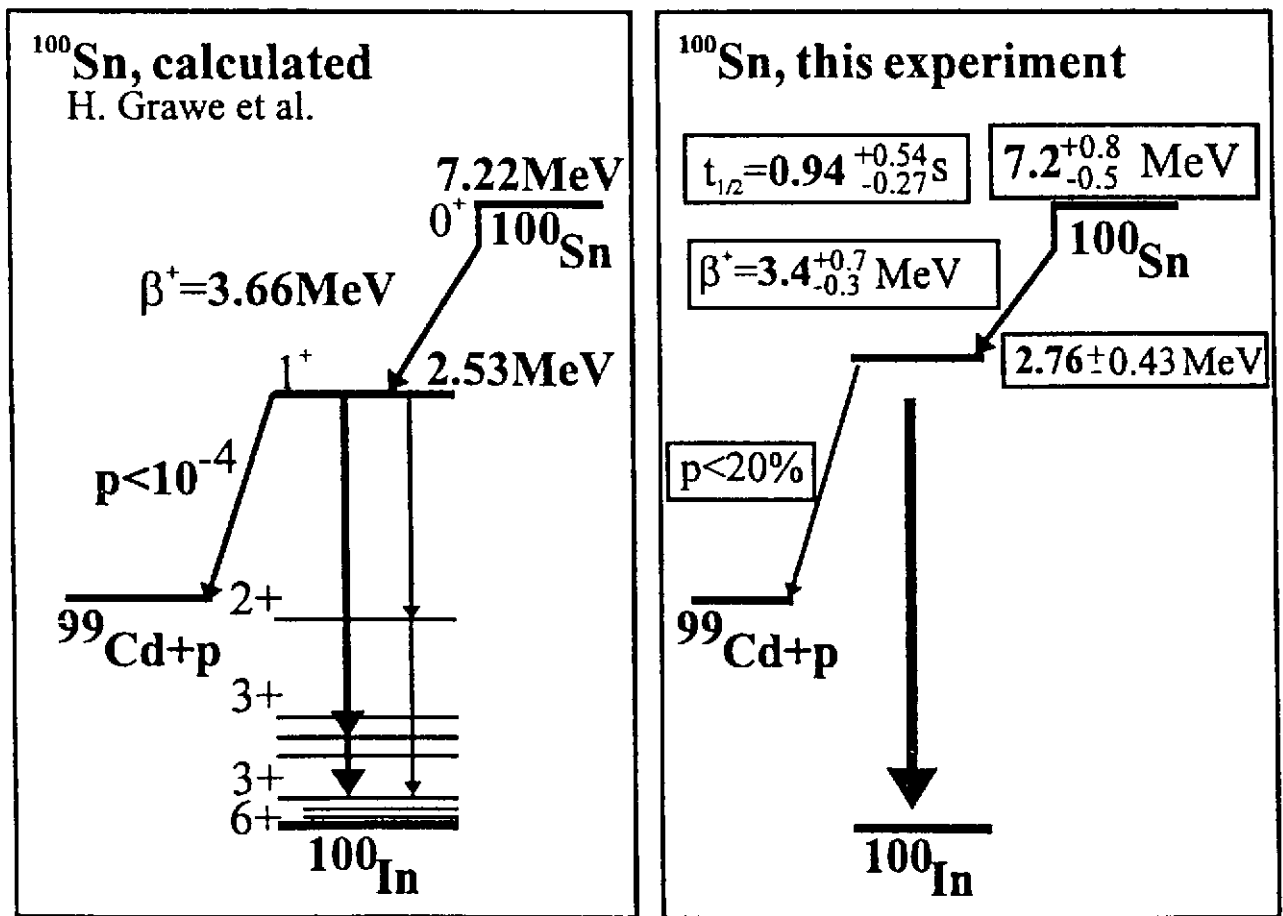


Fig. 9: Comparison of the experimental results in the decay study of  $^{100}\text{Sn}$  with shell-model calculations <sup>41, 42)</sup>

### III.4 COULOMB EXCITATION MEASUREMENTS

The region around the closed  $N=20$  and  $N=28$  neutron shell and proton number between  $Z=8$  and  $Z=20$  marks an interesting region in the chart of nuclei. For example, recent self-consistent mean field calculations performed by Werner et al. <sup>44)</sup> suggest that the sulphur isotopes ( $Z=16$ ) are moderately deformed even in the presence of the "closed shell"  $N=28$ . Experimentally this region of the chart of nuclei is not easy to access. To obtain detailed spectroscopic information like excitation energies and  $B(E2)$  transition probabilities one needs beams of radioactive ions.

One drawback using radioactive ion beams is the low intensity. Consequently the first experiments one can perform with the secondary beams are decay experiments or study reactions with a high cross section. Coulomb excitation measurements are therefore of particular interest.

At the Riken facility Motobayashi et al. <sup>45)</sup> performed a Coulomb excitation measurements using a  $^{32}\text{Mg}$  beam produced in a fragmentation reactions. They could show that  $^{32}\text{Mg}$ , although having a closed neutron number ( $N=20$ ), was strongly deformed in its ground state ( $|\beta_2| \sim 0.5$ ). More recently a series of experiments was performed at the Michigan State University Cyclotron where a position sensitive NaI(Tl) detector array was used to perform Coulomb excitation measurements on even mass isotopes of argon and sulphur <sup>46)</sup>. The secondary beams were produced in the fragmentation of 80 MeV/u  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{40}\text{Ar}$  beams. Fig. 10, taken from ref. <sup>46)</sup>, shows part of the gamma spectra obtained. The top panel shows the spectra prior to Doppler correction while the lower panel the Doppler corrected spectra are displayed. Note that the  $^{42}\text{S}$  data were obtained with a beam intensity of only 1800 atoms/second. From these data the authors could conclude that the  $^{40,42}\text{S}$  isotopes are deformed but that the  $N=28$  shell gap at least persists down to  $Z=18$ .

The relative high energy of the fragmentation beams makes the Doppler broadening a real problem. On the other hand post-accelerated radioactive ion beams (energies below or around the Coulomb barrier) combined with highly segmented Ge detector arrays makes the Doppler correction more accurate and the peak to background ratio will improve considerably. Coulomb excitation measurements are underway at different places like the SPIRAL project at GANIL <sup>22)</sup> using the so-called EXOGAM detector array and at the REX-ISOLDE facility <sup>17)</sup> using the Ge-mini ball array <sup>47)</sup>. The Ge-mini ball detector will consist out of 6 clusters of 7 detectors that are 6-fold segmented electronically: 252 individual detector energy signals.

The spatial resolution will even be further improved by radial information extracted from the rise time of the detector signal (fig. 11). First experiments at these facilities are expected in 1999.

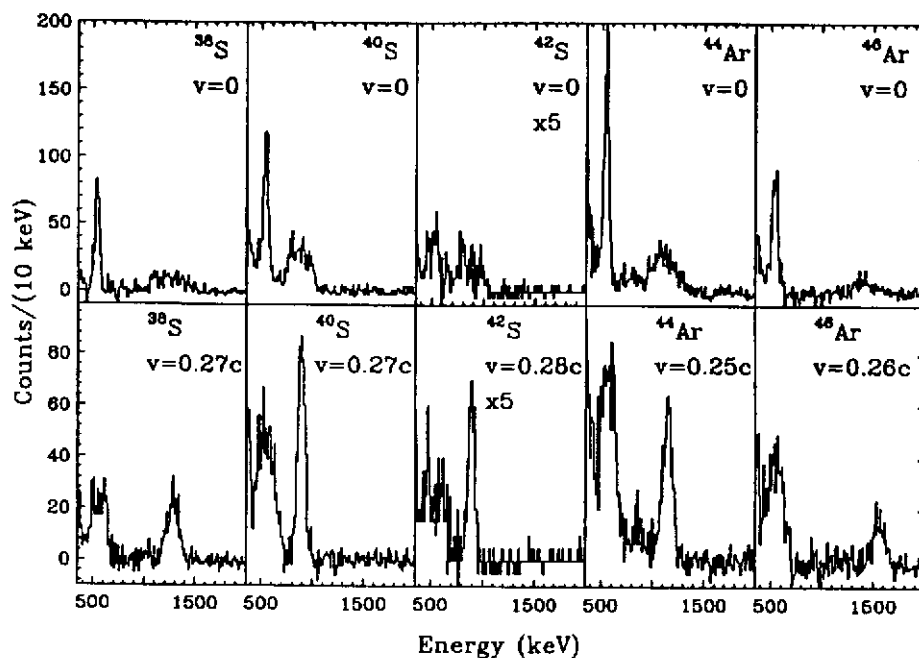


Fig. 10: Part of the gamma-ray spectra obtained in the Coulomb excitation measurement using fragmented beams of  $^{38-42}\text{S}$  and  $^{44,46}\text{Ar}$ . The top panel shows the spectra prior to Doppler shift correction, the lower panel shows the same spectra after proper Doppler shift correction <sup>46)</sup>.

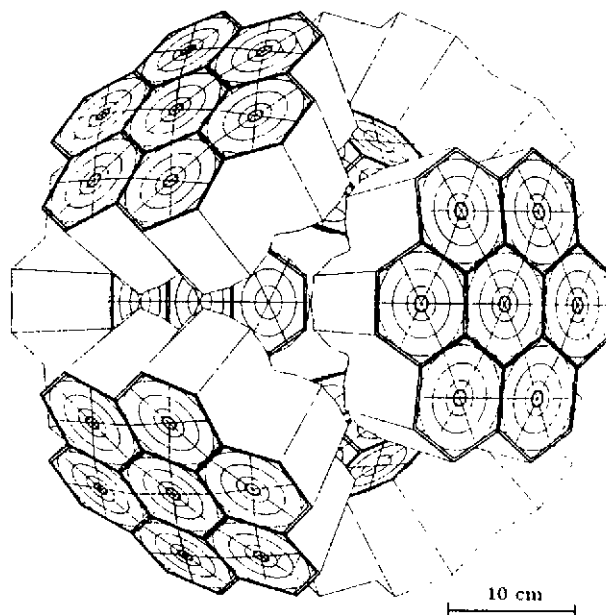


Fig. 11: Schematic drawing of the Ge-mini ball detector <sup>47)</sup>. The six-fold segmented cluster detectors form a cube configuration.

### III 5. AND OTHER REACTION WORK.

With the fragment products extensive reaction studies have been performed at relativistic energies in the framework of "halo" nuclei <sup>31)</sup> and they are discussed by N. Orr in these proceedings. Recently, first reaction studies using a post-accelerated radioactive <sup>6</sup>He beam have been performed at Louvain-la-Neuve; the elastic scattering of <sup>6</sup>He on <sup>4</sup>He, looking for the transfer of the two neutrons <sup>48)</sup>. These are the first experiments in a series that will start as soon as other ISOL+post accelerator type of facilities come into operation.

### IV CONCLUSION AND OUTLOOK

In this lecture we have tried to give a comprehensive overview of the efforts that are taking place world-wide in the research field of exotic nuclei. We have discussed the two different approaches that are developed and used for the production of energetic beams of these exotic nuclei and showed the complementary aspects of both methods. From this discussion it can be concluded that the field of in-flight separation is a mature field where different facilities are preparing for intensity upgrades of the primary beam intensity (MSU, GSI, RIKEN). The field of on-line isotope separation + post-acceleration is still in full development and several first generation facilities, that are now operational, under construction or planned, are performing important R&D work to answer the different technical issues that are raised. These efforts will finally result in the optimum design for second generation facilities.

The physics cases that have been discussed briefly have been chosen for didactical purposes to show how the different technical aspects of the production methods are related to the physics results obtained in the experiments. Interesting to note here is the fact that even with limited statistics (in case of decay studies for example) still unique information can be obtained.

Let me finally note that these radioactive ion beam developments have also an impact in other research fields like nuclear medicine, solid-state physics and atomic physics.

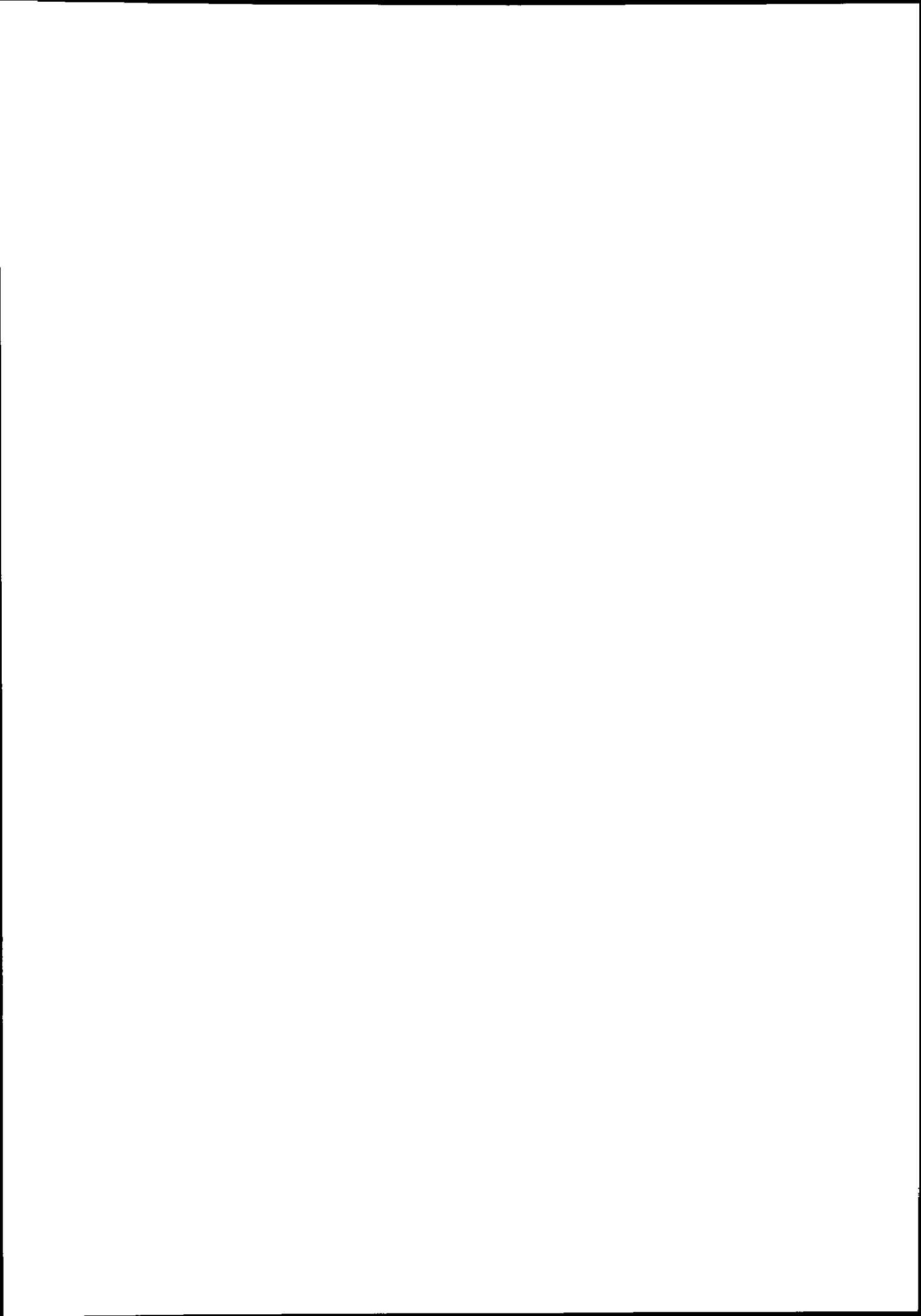
I hope I have convinced the reader that the field of "exotic nuclei" is a very lively field that got a new impulse with the availability of (energetic) radioactive ion beams of good quality (purity, ion optical properties, time structure) and intensity. Also the theoretical work in this far from stability region has regained interest and new developments are expected there as well. Maybe there will come a time that the nuclei we plan to study nowadays aren't any longer "exotic" in the sense of ref. <sup>1)</sup> ("attractively or remarkably strange or unusual; bizarre; of a kind newly

brought into use"). At that moment we will have taken a major step in the understanding of the nuclear structure and thus in the understanding of the manifestation of the strong and weak interactions in the nuclear medium under extreme conditions.

#### V. REFERENCES:

- 1) "The Concise Oxford Dictionary", ed. by R.E. Allen (Clarendon Press, Oxford) 1990
- 2) P. Nolan, "Concept for an advanced Exotic Beam Facility based on ATLAS", Phys. Div. Argonne National Laboratory (1995) 23
- 3) P. Van Duppen et al., Rev. Sci. Instr. 63 (1992) 2381
- 4) H.L. Ravn and B.W. Allardyce, in Treatise on Heavy Ion Science ed. by D.A. Bromley (Plenum, New York, 1989), vol. 8, p.363
- 5) H.L. Ravn, Nucl. Instr. and Meth. B70 (1992) 107
- 6) P. Dendooven, Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 182
- 7) B.H. Wolf, Handbook of Ion Sources (CRC, Boca Raton, FL., 1995) and "The Physics and Technology of Ion Sources" ed. by I.G. Brown (Wiley, New-York, 1989)
- 8) A.A.C. Villari, Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 35
- 9) P. Decrock et al., Nucl. Instr. and Meth. B58 (1991) 252
- 10) M. Dombisky et al., Nucl. Instr. and Meth. B70 (1992) 125
- 11) C. Tamburella, Thesis: Projet PIAFE: Production d'états de charge élevées pour des ions radioactifs, ISN, Genoble France (1996).
- 12) V.S. Lethokov, Laser Photoionization Spectroscopy (Academic Press, Orlando, 1987)
- 13) G.S. Hurst and M.G. Payne, Principles and Applications of Resonance Ionization Spectroscopy (Hilger, London, 1988)
- 14) P. Van Duppen, Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 66
- 15) V.I. Mishin et al., Nucl. Instr. and Meth. B73 (1993) 550
- 16) Y. Kudryavtsev et al., Nucl. Instr. and Meth. B114 (1996) 350
- 17) D. Habs et al. Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 218
- 18) G. Bollen, Nucl. Phys. A616 (1997) 457c
- 19) E. Beebe et al., Nucl. Instr. Meth. B93 (1994) 378
- 20) B. Visentin et al., Nucl. Instr. Meth. B101 (1995) 275
- 21) P. Van Duppen et al., Nucl. Instr. and Meth. B70 (1992) 393

- 22) A.C.C. Villari et al., Nucl. Phys. A616 (1997) 21c
- 23) P.G. Bricault et al., Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 231
- 24) S. Kubono et al., Nucl. Phys. A616 (1997) 11c
- 25) J.D. Garret, Nucl. Phys. A616 (1997) 3c
- 26) G. Ciavola et al., Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 258
- 27) P. Armbruster et al., Europhys. Lett. 47 (1987) 793, M. Bernas et al. 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Nuclei far from Stability, Rosseau Lake, Canada (1998) 768
- 28) C.N. Davids et al., Nucl. Instr. and Meth. B70 (1992) 358
- 29) M. Leino et al., Nucl. Instr. and Meth. B99 (1995) 653 and M. Leino, Nucl. Instr. and Meth. B126 (1997) 320
- 30) D.J. Morrissey, Phys. Rev. C39 (1989) 460
- 31) H. Geissel, G. Münzenberg and K. Riisager, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 45 (1995) 163
- 32) W. Nazarewicz, B. Sherrill, I. Tanihata and P. Van Duppen, Nucl. Phys. News 6 (1996) 17
- 33) P. Hoff et al., Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1020
- 34) J.L. Wood et al., Phys. Rep. 215 (1992) 101
- 35) J. Wauters et al., Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 1329
- 36) N. Bijmens et al., Zeitschr. für Phys. A356 (1996) 3
- 37) E.S. Paul et al., Phys. Rev. C51 (1995) 78
- 38) K. Helariutta et al., Phys. Rev. C54 (1996) R2799
- 39) R. Schneider et al., Zeitsch. für Physik A348 (1994) 241
- 40) M. Lewitowicz et al., Phys. Lett. B332 (1994) 20
- 41) K. Sümmerer et al., Nucl. Phys. A616 (1997) 341c
- 42) H. Grawe et al., Phys. Scr. T56 (1995) 79
- 43) Z. Janas et al., Phys. Scripta T56 (1995) 262
- 44) T.R. Werner et al., Phys. Lett. B335 (1994) 259
- 45) T. Motobayashi et al., Phys. Lett. B346 (1995) 9
- 46) H. Scheit et al., Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 3967
- 47) D. Habs et al., Progress Particle Nuclear Physics 38 (1997) 29
- 48) R. Raabe et al., Annual Report Louvain-la-Neuve (1997)
- 49) H.L. Ravn et al., Nucl. Instr. and Meth. B88 (1994) 441
- 50) B.M. Sherrill, Proc. of the "Sec. Int. Conf. on Radioactive Nuclear Beams", ed. Th. Delbar (Adam Hilger, London, 1992) 3



## Noyaux Exotiques: Haloes

Nigel Orr,  
 Laboratoire de Physique Corpusculaire,  
 IN2P3 - CNRS, ISMRA et Université de Caen,  
 14050 Caen Cedex, France

### Resumé

Un bref aperçu du halo nucléaire est présenté. Après quelques rappels historiques les caractéristiques générales des halos sont discutées dans le cadre d'un modèle simple. Les conditions gouvernant la formation des halos sont explorées, ainsi que deux sujets d'intérêts actuels: les résonances à basse énergie et les corrélations entre les nucléons du halo.

### Abstract

A brief overview of the nuclear halo is presented. Following some historical remarks the general characteristics of halo systems are discussed with reference to a simple model. The conditions governing the formation of haloes are also explored, as are two subjects of current interest — low-lying resonances and halo nucleon correlations.

## I Introduction

The size and distribution of matter in the nucleus are fundamental questions in nuclear physics. Indeed, historically such studies may be traced back to Rutherford and Chadwick who derived the first estimates of nuclear sizes from deviations in the scattering of alpha particles from pure Coulomb scattering. Subsequent experiments demonstrated that to first order the nucleus could be represented as a sphere of constant density whereby the radius is,

$$R = r_0 A^{1/3}; \quad r_0 \approx 1.2 \text{ fm} \quad (1)$$

In more recent times high energy electron scattering has been used in a similar manner to probe in detail the spatial distribution of the nucleus [1]. Such studies, as indicated in figure 1, demonstrated that the nuclear surface is diffuse. By combining electron scattering, which is sensitive to the charged matter distribution, with high energy hadron scattering differences in the neutron and proton matter distributions may be probed. For light nuclei the proton and neutron density distributions have been found to be essentially identical. For heavy nuclei differences appear as a result of the increasing  $N/Z$  ratio (1.54 for  $^{208}\text{Pb}$ ); the central neutron density becomes higher than that of the protons and a small difference



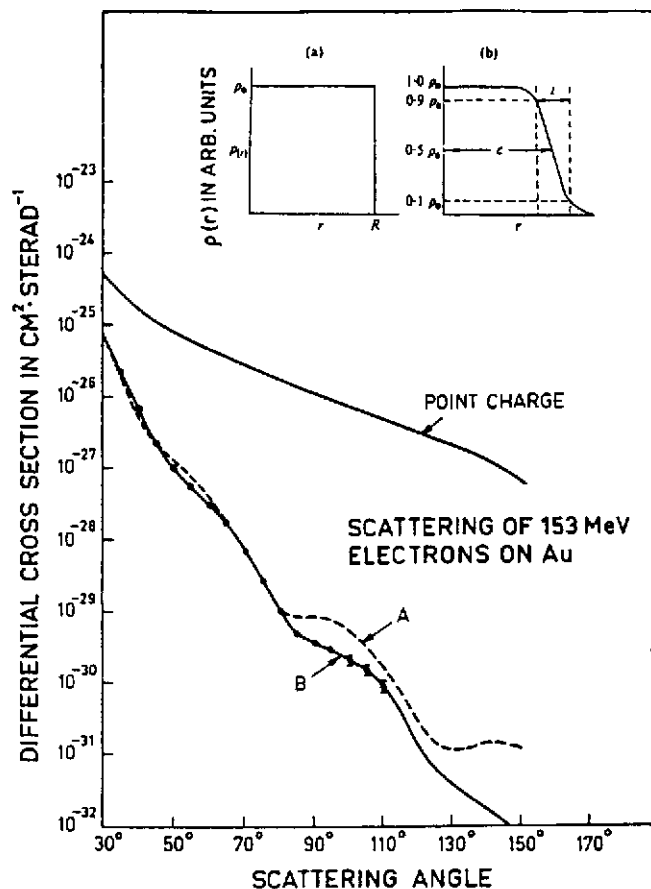


Figure 1: Angular distributions for  $e^-$ -scattering on Au for various (charge) density distributions [2]: (A)  $\rho(r) = \rho_0$  for  $r < R$ ; and (B) the Fermi distribution,  $\rho(r) = \rho_0 / [1 + e^{(r-c/a)}]$ , where the surface diffuseness is defined by  $t = 4.39a$ .  $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5}(c^2 + \frac{7}{3}\pi^2 a^2)$  and  $\langle r^2 \rangle^{1/2} < c < R$  with  $R^2 = c^2 + \frac{7}{3}\pi^2 a^2$ . For Au,  $R = 6.87\text{fm}$  (equation 1);  $c = 6.38\text{fm}$  and  $a = 0.53\text{fm}$ .

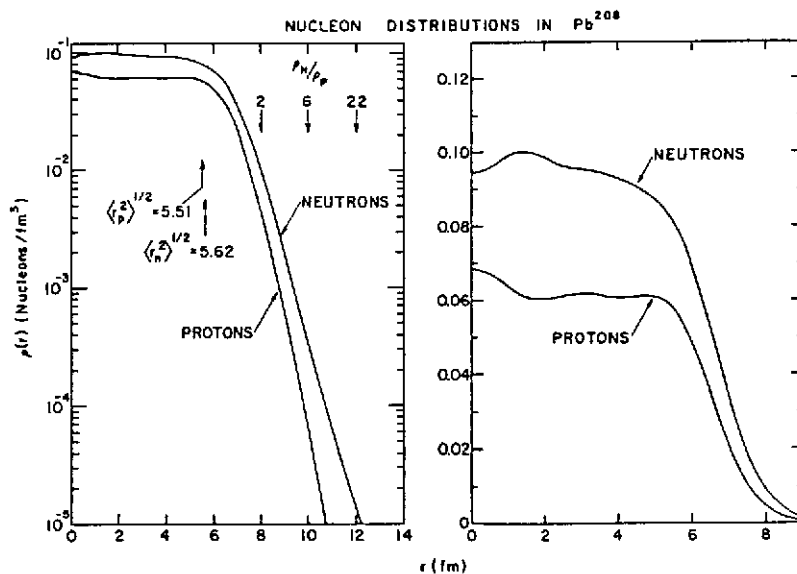


Figure 2: Calculated proton and neutron densities in  $^{208}\text{Pb}$  [4].

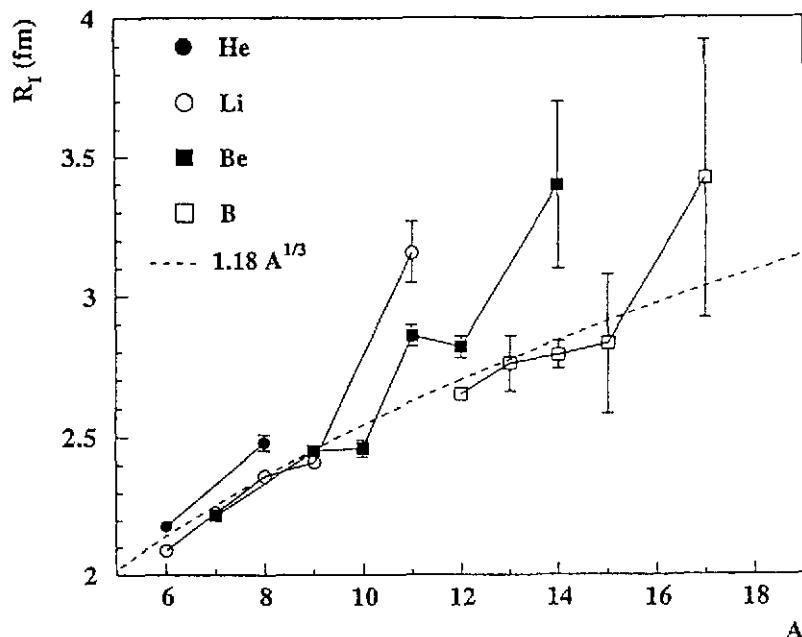


Figure 3: Interaction radii derived from high energy total interaction cross section measurements [6].

( $\sim 0.1 - 0.2$  fm) develops between the neutron and proton RMS radii (figure 2), an effect first predicted by Johnson and Teller [3].

The most extreme neutron-to-proton ratios ( $N/Z \leq 3$ ) are found at the driplines for the very light nuclei. Nuclei lying at the limits of particle stability are by definition weakly bound<sup>1</sup>, a feature which as will be seen is central to the formation of haloes. Experimentally, the conventional probes discussed above cannot be employed for nuclei far from stability due to the short halflives and very low production yields [5]. Instead relatively high cross section processes employing beams of the nuclei of interest must be used.

Pioneering experiments of this kind, in which the total interaction cross sections ( $\sigma_I$ ) for a variety of very light, neutron-rich nuclei were measured, were carried out in the mid-1980's at the BEVELAC using a simple transmission method [6]. These measurements indicated that  $^{11}\text{Li}$  ( $S_{2n}=0.3$  MeV),  $^{11,14}\text{Be}$  ( $S_n=0.5$  MeV,  $S_{2n}=1.3$  MeV) and to a lesser extent  $^{6,8}\text{He}$  exhibit much larger cross sections than expected on the basis of the systematics for the neighbouring isotopes. In simple terms the interaction cross sections obtained for light targets may be used to derive an effective interaction radius,

$$\sigma_I = \pi [R_I(\text{proj}) + R_I(\text{target})]^2 \quad (2)$$

The projectile and the large cross sections were thus interpreted<sup>2</sup> as reflecting abnormally large matter radii (figure 3).

<sup>1</sup>Typically by less than 1 MeV for the last nucleon(s) as opposed to stable nuclei where the binding energy is  $\sim 8$  MeV/nucleon.

<sup>2</sup>Following the measurement of the spin and magnetic moment of  $^{11}\text{Li}$  [7] which excluded a large deformation as the origin of the enhanced cross section.

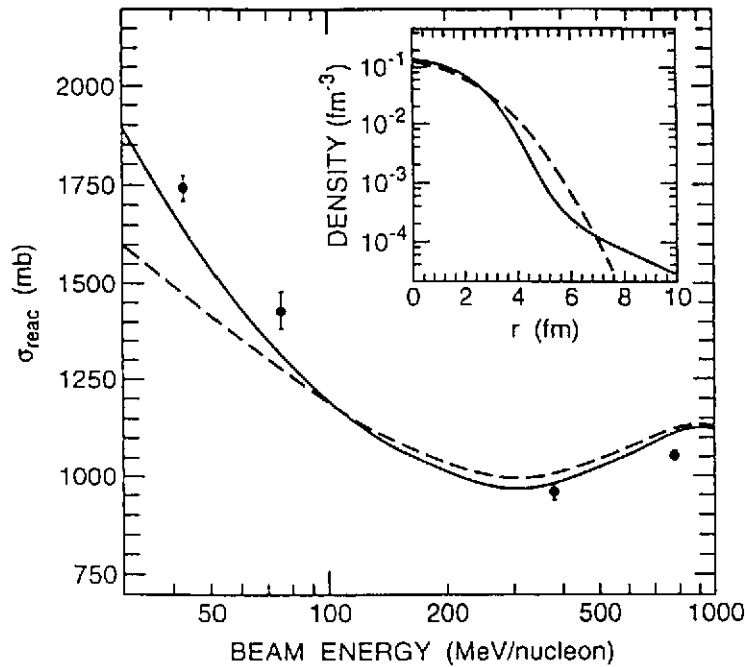


Figure 4: Total reaction cross sections for  $^{11}\text{Li}$  on a carbon target compared to Glauber model calculations for density distributions with (solid line) and without (dashed line) a halo [12].

The very weak binding of the valence neutrons in these systems suggests that it is these nucleons which are responsible for the increased sizes. The observation of a constant charge changing cross section along an isotopic chain [8] and the separability of the total interaction cross sections [9],

$$\sigma_I(A) = \sigma_I(A - \text{halo}) + \sigma(A)_{-\text{halo}} \quad (3)$$

support a model in which a "core" ( $A - \text{halo}$ ), resembling a normal nucleus, is surrounded by an extended, "halo"<sup>3</sup>, distribution formed by the valence neutrons.

As reactions at different energies probe different distance scales it has proven possible to map the density distribution of halo systems. In particular, by combining measurements of total reaction cross sections<sup>4</sup> with a reaction theory such as that of Glauber, which incorporates projectile and target density distributions<sup>5</sup>, the form of the halo has been established as a long, low density tail (figure 4).

<sup>3</sup>A term which was first coined in reference to the much smaller effects observed in heavy, stable nuclei (figure 2) [4]. Unfortunately, while the physical origins are different in the two cases the same term has been retained.

<sup>4</sup>With the recent advent of relatively intense beams of halo nuclei at very high energies, it is now becoming possible to utilise standard methods, such as proton scattering [10].

<sup>5</sup>As pointed out by Al-Khalili and Tostevin [11], the few-body structure (core + halo nucleon[s]) of halo nuclei should be explicitly taken into account. The resulting increased transparency leads to significant increases in the estimated matter radii with respect to the initial analyses of the total interaction cross section data [6].

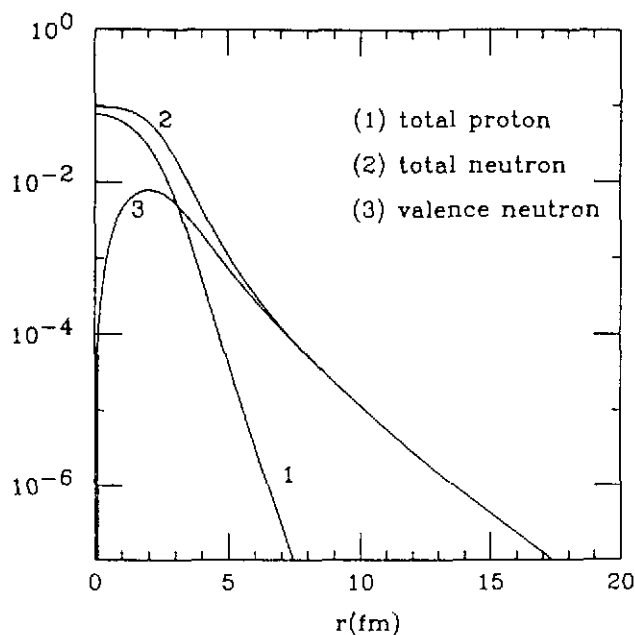


Figure 5: Density distribution for  $^{11}\text{Li}$  calculated using the Hartree-Fock model and shell model occupation probabilities [13].

## II General Properties

Having arrived at an image of the halo (figure 5), some of the physical features may be examined. To do so it is illustrative to introduce the simple quasi-deuteron model which was first applied to  $^{11}\text{Li}$  in a seminal paper by Hansen and Jonson [14]. As the name suggests, the model was developed by analogy with the deuteron, a relatively weakly bound ( $E_B = 2.2$  MeV) and extended ( $\langle r^2 \rangle^{1/2} \approx 2.2$  fm) system. Assuming a square well core potential of radius  $R$  in which the neutron is bound by  $B$ , the external solution to the Schrödinger equation is a Yukawa wavefunction of the form [14],

$$\psi(r) = \sqrt{2\pi\kappa} \frac{\exp(-r/\kappa)}{r} \frac{e^\chi}{(1+\chi)^{1/2}} \quad (4)$$

characterised by a decay length,

$$\kappa = \hbar/\sqrt{2\mu B}$$

where:  $\mu = A_h \cdot A_c / (A_h + A_c) = A_h \cdot A_c / A$  is the reduced mass;  $A$ ,  $A_c$  and  $A_h$  the masses of the nucleus, core and halo respectively; and  $\chi = R/\kappa$ .

It should be noted that a number of assumptions are implicit in the model. Firstly the core and halo are treated as inert objects with the latter considered as a dineutron in the case of a two-neutron halo such as  $^{11}\text{Li}$ . Secondly the halo neutron is assumed to have an angular momentum of zero ( $s$ -state) with respect to the core.

The mean square radius is defined, in terms of the matter density distribution,  $\rho(r)$ , as,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int \rho(r) r^4 dr}{\int \rho(r) r^2 dr} \quad (5)$$

Thus, for  $\kappa > R$ ,

$$\langle r_{halo}^2 \rangle \approx \frac{\kappa^2 (1 + 2\chi)}{2 (1 + \chi)} \quad (6)$$

and,

$$\langle r_{halo}^2 \rangle^{1/2} \sim \frac{\kappa}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{\mu B}} \quad (7)$$

Clearly then, as the binding energy decreases to zero the size of the halo diverges rapidly (figure 6, Table 1). Conversely, in the limit of large binding the halo vanishes. The halo may thus be regarded as a threshold effect whereby the loosely bound valence nucleon(s) tunnels with significant probability into the (classically forbidden) region outside the potential well. Haloes are thus expected to be confined to only the most weakly bound of states.

As the size depends inversely on the reduced mass, for the same mass and binding the halo will be more pronounced for a two-neutron halo. Furthermore, the influence on the size of the nucleus diminishes with the overall mass of the system,

$$\langle r_m^2 \rangle = \frac{A_c}{A} \langle r_c^2 \rangle + \frac{\mu}{A} \langle r_h^2 \rangle \quad (8)$$

$A$	$B$ [MeV]	$\kappa$	$\langle r_h^2 \rangle^{1/2}$ a) [fm]	$\langle r_m^2 \rangle^{1/2}$ b) [fm]	$\delta \langle r^2 \rangle^{1/2}$ c) [fm]	$\Gamma$ [MeV/c]
11	0.1	15.2	11.5	4.1	1.5	26
	0.5	6.8	5.4	2.9	0.33	58
	1.0	4.8	3.9	2.7	0.13	82
21	0.1	14.8	11.4	4.0	0.74	27
	0.5	6.6	5.4	3.4	0.12	60
	1.0	4.7	3.9	3.3	0.03	84

a) Equation 6.

b) Equation 8, with  $R_{10} = 2.60$  fm,  $R_{20} = 3.25$  fm (equation 1).

c)  $\langle r_h^2 \rangle^{1/2} - \langle r_m^2 \rangle^{1/2}$

Table 1: Quasi-deuteron model description of  $A=11$  and 21 one-neutron halo systems.

A spatially extended distribution such as the halo is characterised, via the Uncertainty Principle, by a narrow distribution in momentum of the halo neutron(s) — typically some 4-5 times narrower than that of nucleons in normal nuclei ( $p_{Fermi} \approx 225$  MeV/c). Furthermore, the distribution in momentum is directly related to the spatial wavefunction via the square of the Fourier transform. Thus the intrinsic momentum content of the halo, if experimentally accessible, could provide a powerful probe of the halo [15].

In the case of a Yukawa, the momentum density distribution is Lorentzian in form,

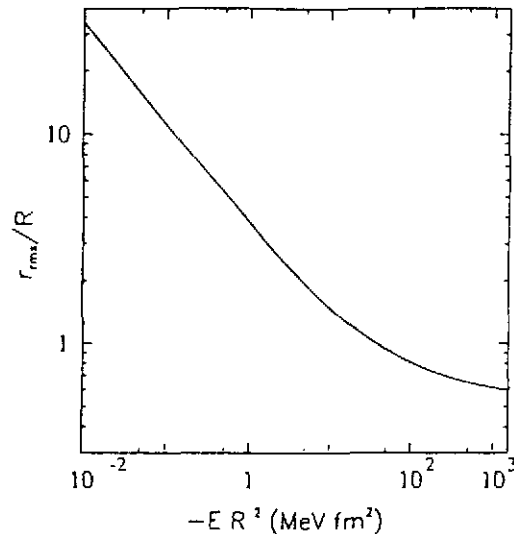


Figure 6: RMS halo radius as a function of binding energy,  $E$  (adapted from ref. [26]).

$$w(\mathbf{p}) = |\psi(\mathbf{p})|^2 = \frac{\Gamma}{2\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \mathbf{p}^2\right)^2} \quad (9)$$

characterised by,

$$\Gamma = 2\hbar/\kappa$$

Despite the simplicity of the model described here, it does provide a reasonable description of the neutron halo. Indeed, the asymptotic behaviour of wavefunctions resulting from more realistic models is typically the exponential decay of a Yukawa. In the case of  $^{11}\text{Be}$ , the physical basis of such a description is reasonably well founded as the single valence neutron is bound by only 500 keV and occupies a predominately  $2s_{1/2}$  configuration. The predicted  $\langle r_m^2 \rangle^{1/2}$  of 2.9 fm (Table 1) is in good accord with that derived from total interaction cross section measurements [6, 11].

Turning to the momenta, a distribution characterised by  $\Gamma_{\text{intrinsic}} = 58 \text{ MeV}/c$  is predicted (Table 1). In the simplest approach, the momentum distributions of the fragments — charged core or neutrons — from high energy dissociation reactions on light targets (i.e., nuclear breakup) are assumed to measure directly the internal, or intrinsic, momentum distribution; the so-called Serber or "Sudden Approximation"<sup>6</sup> [19]. As typically a single momentum component (parallel or transverse to the beam direction) is measured in an experiment, the measured distribution is modified<sup>7</sup> from the three dimensional distribution. For example, in the case of a measurement of the distribution parallel to the beam ( $z$ ) axis using a device with transverse acceptances much larger than the characteristic width of the distribution,

<sup>6</sup>A model developed, once again, for the deuteron.

<sup>7</sup>It has been suggested that for absorption (and diffraction), the wavefunction is essentially factorised in the reaction process [16]. The experimental acceptances would thus not influence the lineshape of the distribution.

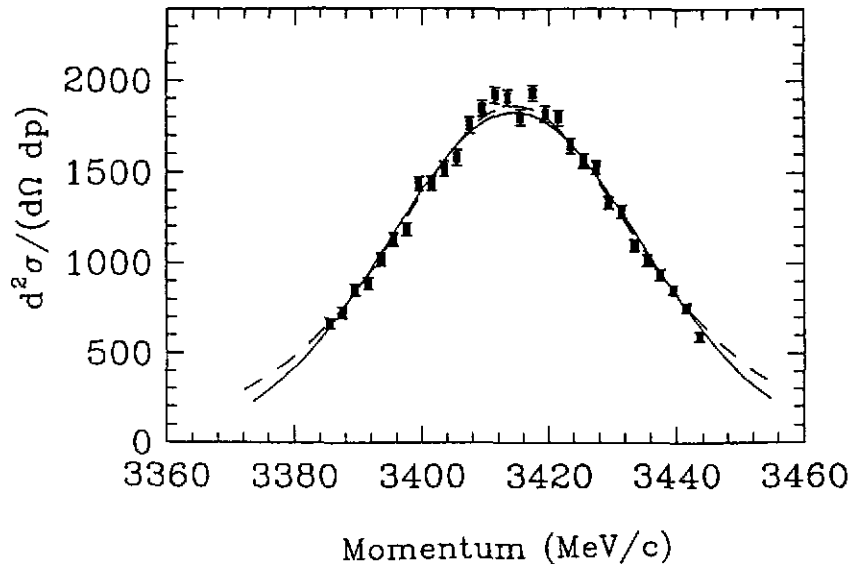


Figure 7: Longitudinal momentum distribution for  $^{10}\text{Be}$  fragments following the breakup of a 63 MeV/nucleon  $^{11}\text{Be}$  beam on a Be target [20].

$$w(p_z) = \int_{p_x} \int_{p_y} w(\mathbf{p}) dp_x dp_y \quad (10)$$

Which, in the case of the Lorentzian results in a measured distribution of the form,

$$\frac{d\sigma}{dp_z} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{\Gamma^2}{4} + p_z^2\right)^2} \quad (11)$$

where,

$$FWHM = \Gamma$$

Experimentally, the longitudinal momentum distributions for  $^{10}\text{Be}$  fragments from the breakup of  $^{11}\text{Be}$  exhibit widths of  $42 \pm 2$  MeV/c [20] (figure 7), in reasonable agreement with the  $\Gamma_{\text{intrinsic}}$  derived from the simple quasi-deuteron model (Table 1). While space does not permit a detailed discussion of fragment momentum distributions and the relationship to the intrinsic halo neutron distributions [15], it should be stressed that the simple picture presented above is in reality complicated by a number of factors. In particular, the perturbing effects of the reaction process and final state interactions (FSI) in the exit channels play roles in defining the final measured fragment momentum distribution.

In the case of FSI, the effects are most pronounced on the neutron distributions<sup>8</sup> from the breakup of two-neutron halo nuclei, whereby breakup may proceed via resonances in the unbound  $A - 1$  systems (eg.,  $^{10}\text{Li}$  in the case of  $^{11}\text{Li}$ ). As to the reaction, this will be governed by the nuclear interaction for light targets and a mixture of Coulomb and nuclear for heavy targets. For well developed halo systems the Coulomb breakup dominates, as illustrated in figure 8 [21]. In this example the heavy target reaction data is very forward

<sup>8</sup>Owing to the much smaller mass than that of the core fragment.

peaked and is well reproduced assuming Coulomb breakup. The light target data exhibits a broad distribution characteristic of diffractive dissociation — nuclear dissociation being composed of diffractive and absorptive components, typically of equal probability [16, 22].

Importantly the reaction process defines the impact parameter range for the collision, thus providing addition bias to the observed momentum distributions. In particular, the core fragment distributions for breakup on a light target — long assumed for measurements made parallel to the beam direction to provide the most direct measure of the intrinsic distributions — are limited to probing only radii greater than that of the core [15, 16, 17]<sup>9</sup>. This results in distributions narrower than the intrinsic momentum distributions; an effect that will be in general more pronounced for the less well developed haloes.

As alluded to above, another distinguishing feature of halo nuclei is a large Coulomb (or electromagnetic — EMD) dissociation cross section for the channel core + neutron(s). Given the very weak binding of the neutrons to the core, such an effect is not surprising as the (charged) core is easily separated in the Coulomb field of the target from the (uncharged) neutrons. As summarized in figure 9, the EMD cross section increases rapidly with decreasing binding of the valence neutrons and with decreasing beam energy,  $E$ . In the simple quasi-deuteron model [14],

$$\sigma_{EMD} \sim \frac{Z_{target}^2 Z_{proj}^2}{E.B} \quad (12)$$

Before closing this section, it should be stressed that the quasi-deuteron model has been discussed primarily for illustrative purposes. Indeed, even in the case of  $^{11}\text{Be}$  it represents an approximation, albeit a reasonable one. Clearly the next step in a more complete description would employ a  $2s_{1/2}$  neutron bound in a more realistic potential, such as a Woods-Saxon [16, 17]. Even then, the well known deformed nature of  $^{10,11}\text{Be}$ , and consequent mixing of higher  $l$  configurations would be ignored [23].

### III Conditions Governing Formation

As seen in the preceding section, in a simple picture the development of a halo is governed by the binding energy of the valence neutron(s) and the mass of the system. The configuration occupied by the valence neutron(s) will also influence the spatial extent of the wavefunction. In particular, neutrons in states of non-zero orbital angular momentum,  $l$ , will encounter a centrifugal barrier,

$$V(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (13)$$

As a consequence, the spatial extent of the wavefunction will be increasing limited with increasing  $l$ . The results for a single neutron bound in a square well potential ( $A_c = 10$ ) for nonzero angular momenta are displayed in figure 10. Clearly for  $l = 0$  and 1 the size of the system diverges as the binding energy approaches zero, while being confined for  $l = 2$ . The

<sup>9</sup>A strong absorption limit foreseen in the by Hüfner and Nemes [18] and Serber [19].



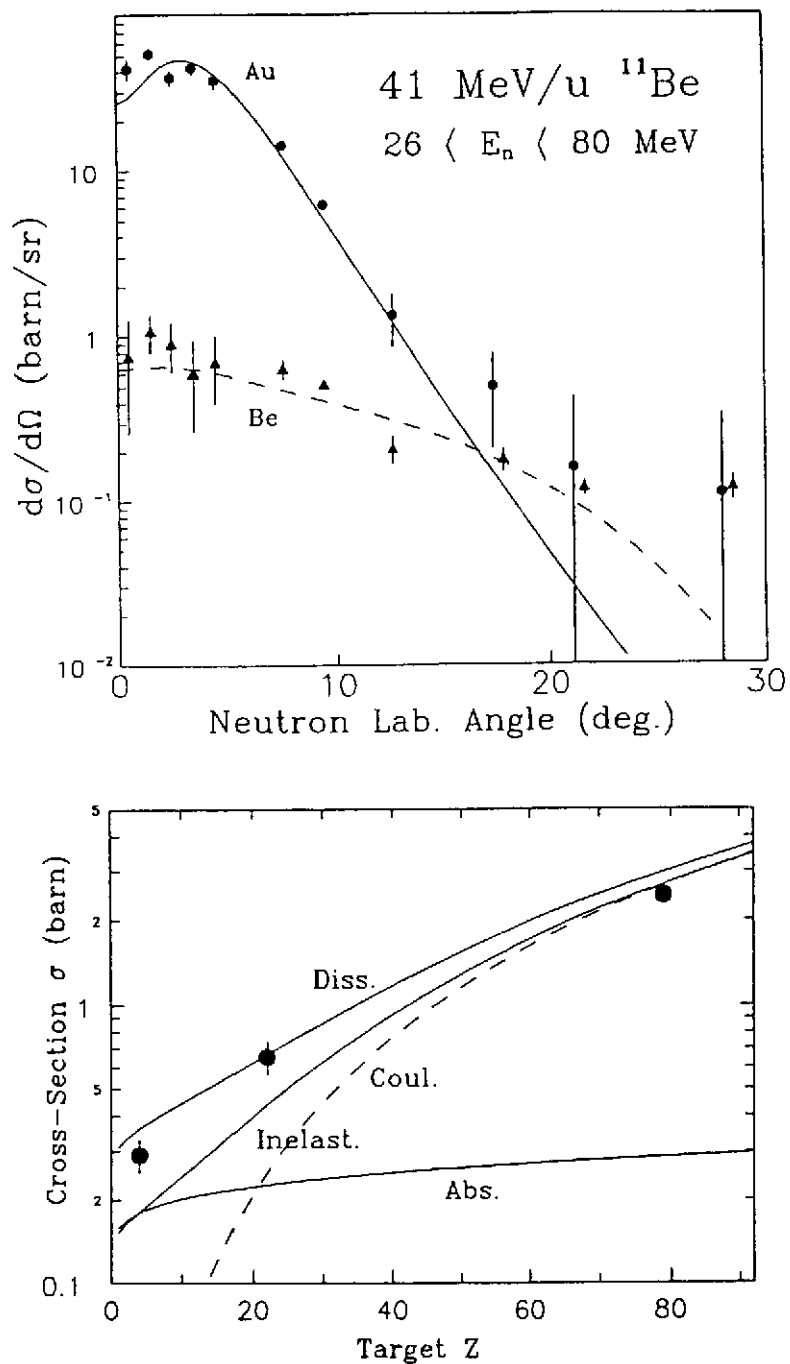


Figure 8: Upper panel: neutron angular distributions for the channel  $^{10}\text{Be} + n$  following the breakup of a 41 MeV/nucleon  $^{11}\text{Be}$  beam on Be and Au targets [21]. The calculated Coulomb and diffraction dissociation distributions for the Au and Be targets are indicated by the solid and dashed curves respectively. Lower panel: angle integrated cross sections for the same channel for Be, Ni and Au targets (points). The calculated Diss(ociation) cross section is decomposed into the Abs(orption) and Coul(omb) contributions. The line marked Inelast(ic) is the sum of both the Coulomb and diffraction dissociation contributions [22].

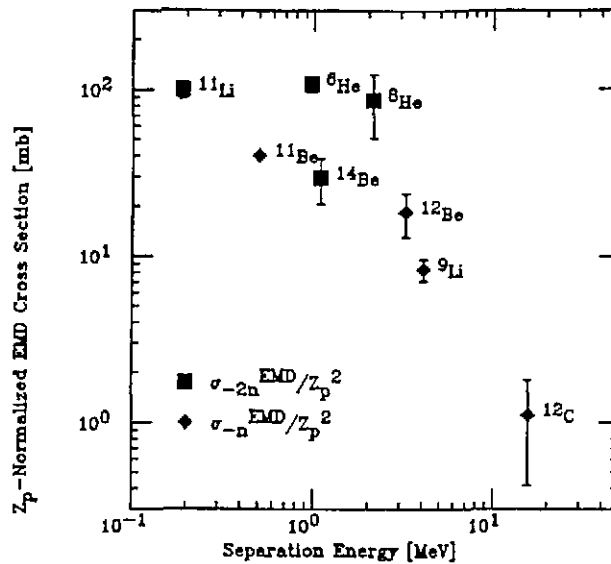


Figure 9: EMD cross sections as a function of binding energy of the valence neutrons for the dissociation of a number light nuclei [24].

confining effects of increasing angular momentum are well illustrated in figure 11, where a more realistic Woods-Saxon potential has been employed.

Using such potentials and including nonzero orbital angular momenta, as well as explicit treatment of the two-neutron halo, the general evolution of the development of halo structures with mass, binding and  $l$  (or the related hypermoment,  $K$ , for two-neutron haloes) has been explored by Fedorov *et al.* [27]. As a result some general scaling rules have been derived. In particular a limit of a few  $MeV \cdot A^{-2/3}$  on the separation energy,  $S_{n/2n}$  has been estimated for the formation of a halo. As shown in figure 12,  ${}^6\text{He}$ ,  ${}^{11}\text{Li}$ ,  ${}^{11}\text{Be}$ ,  ${}^{19}\text{C}$  and  ${}^{19}\text{B}$  conform to these limits —  ${}^{19}\text{C}$  being the subject of recent attention [29, 30], while  ${}^{19}\text{B}$  is not yet experimentally accessible. The approximate nature of such a limit is apparent in the case of  ${}^{14}\text{Be}$ , a known halo system (section II).

Before proceeding to the final section, the possibility of the existence of proton haloes must also be addressed. Considering only the binding energy and mass, two systems stand out:  ${}^8\text{B}$  ( $S_p = 0.14$  MeV) and  ${}^{17}\text{Ne}$  ( $S_{2p} = 0.96$  MeV). In the former case the valence proton has a predominantly  $\pi p_{3/2}$  configuration, while for the latter a large ( $\sim 50\%$ )  $\pi 2s_{1/2}^2$  admixture is predicted [31]. As the valence nucleon is charged, the behaviour of the wavefunction will also be affected by the Coulomb barrier,

$$U(r) = \frac{Z_{\text{halo}} Z_{\text{core}} e^2}{r} \text{erf}\left(\frac{r}{R}\right) \quad (14)$$

Thus for systems with the same mass, valence nucleon binding energy and configuration, the charged matter distribution will be more confined than that for the neutrons (figure 11). Given the added confinement provided by the Coulomb barrier, it would appear difficult to form proton haloes of appreciable size for masses beyond  $A \sim 20$ . Experimentally the situation regarding  ${}^8\text{B}$  has been somewhat unclear, with a number of contradictory claims being made. However recent measurements [32, 33, 34, 35] and theoretical work [16, 17] indicate that, while not as large as originally thought,  ${}^8\text{B}$  does possess an extended valence

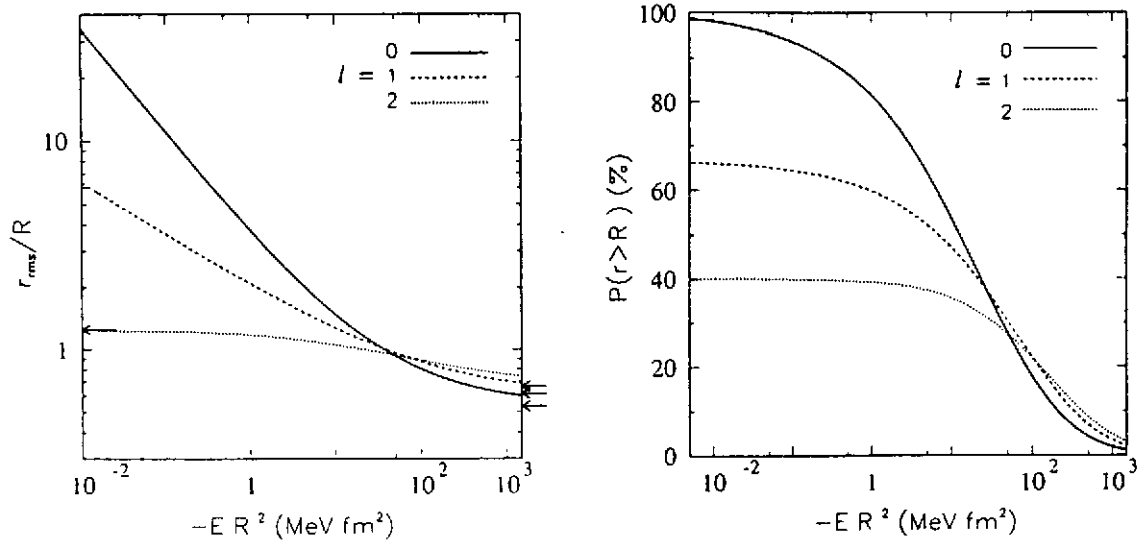


Figure 10: Left panel: RMS halo radius as a function of binding energy  $E$  and  $l$ . Right panel: Probability,  $P_l$ , of finding the valence neutron outside the square-well potential as a function of binding energy and  $l$  [26].

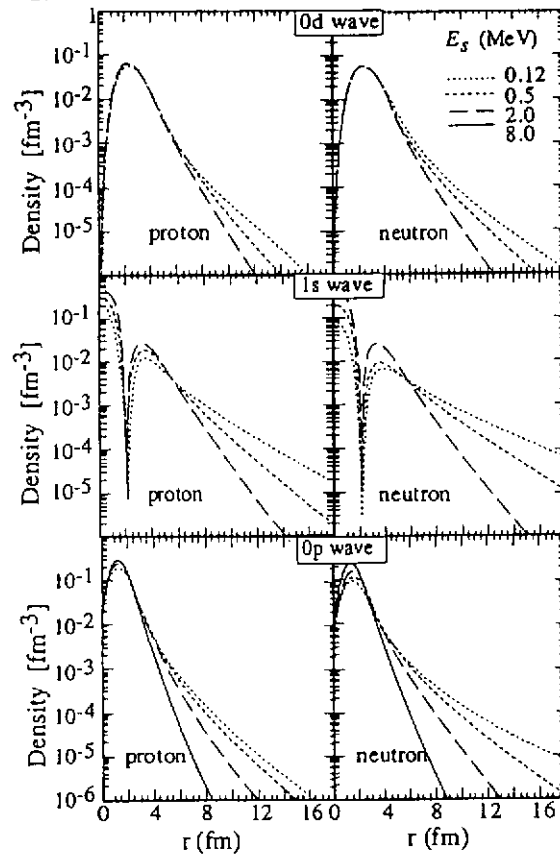


Figure 11: Single-particle density distributions ( $A_c = 7$ ) as a function of valence nucleon binding energy,  $E_S$ , and configuration [25].

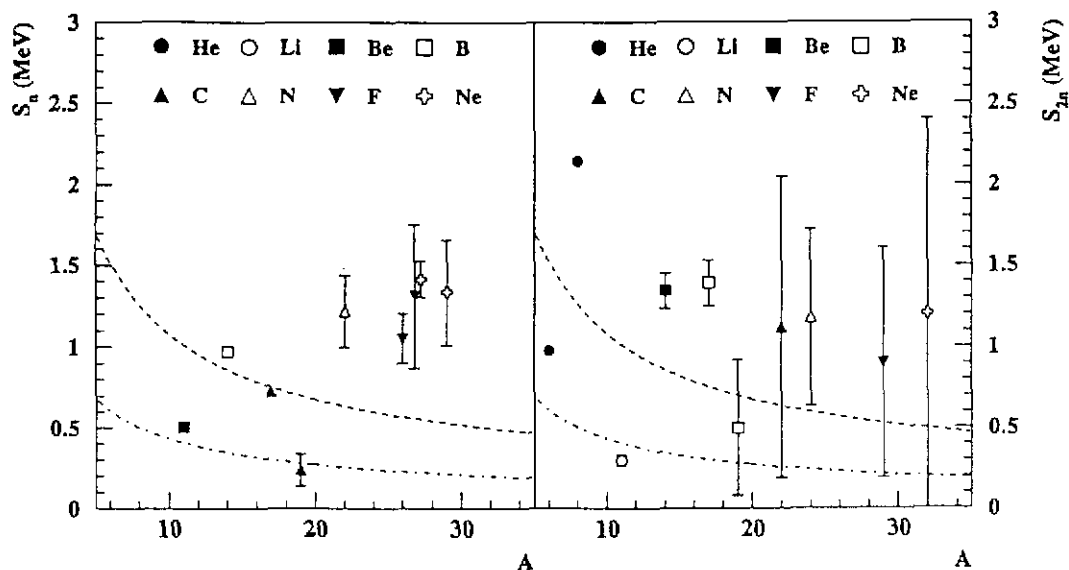


Figure 12: Separation energy,  $S_{(2)n}$ , versus mass for light, weakly bound, neutron-rich nuclei (from [28]). Dot-dashed line:  $2.A^{-2/3}$  MeV. Dashed line:  $5.A^{-2/3}$  MeV.

proton distribution. Work presently underway should shed light in the near future on  $^{17}\text{Ne}$  [36].

## IV Resonances and Correlations?

The very weak binding of the valence neutrons and the separation of the system into core and halo clusters has led to the proposal of a new type of resonance in halo nuclei; namely the "Soft Dipole Resonance" or SDR [14, 37]. In normal nuclei, oscillations (or resonances) with a multipolarity of  $\lambda = 1$  can be induced between the total neutron and total proton distributions<sup>10</sup> [2]. Such "Giant (Electric) Dipole Resonances" (GDR) have long been known and occur, owing to the relatively strong restoring force between the neutron and proton distributions, at excitation energies of  $\sim 15 - 25$  MeV. Drawing an analogy with the GDR, E1 oscillations have been postulated to occur between the core and halo neutron distribution [37]. The low binding of the halo neutrons and consequent weak restoring force would be expected to drive such a resonance to low excitation energies ( $\sim 1$  MeV); hence the term "soft"<sup>11</sup>.

As with the GDR, any soft-dipole mode should be preferentially excited via Coulomb excitation, with considerable enhancement expected for the E1 strength function,  $dB(E1)/dE_x$ , at low excitation energies. Owing to the very low binding the nucleus will, however, undergo dissociation into the core + halo neutrons. The enhanced low-lying E1 strength will thus translate into a large EMD dissociation cross section. As noted in section II, large cross sections are observed for reactions with high-Z targets — the decrease with increasing separation energy (figure 9) being inline with an increasing restoring force driving the resonance to higher excitation energies. Such high cross sections may, of course, be

<sup>10</sup>A more complete description is provided by the accompanying course of Philippe Chomaz.

<sup>11</sup>The conventional GDR would still be present at higher energies.

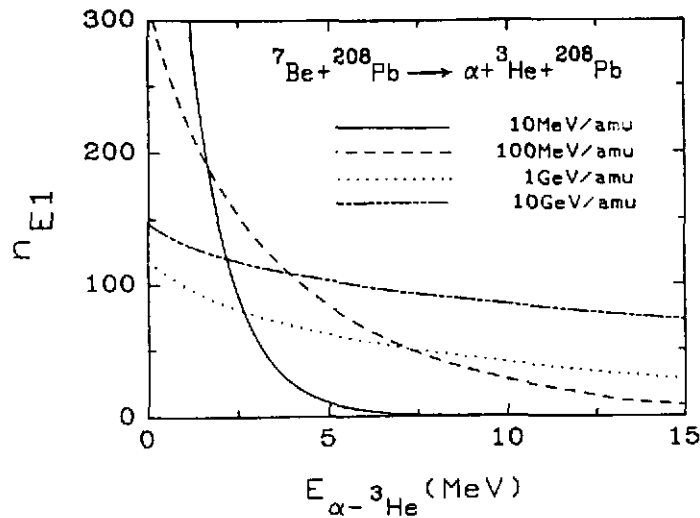


Figure 13: Example of the behaviour of the virtual photon spectrum with beam energy. In this case the  $n_{E1}$  spectrum is shown for  ${}^7\text{Be} + {}^{208}\text{Pb}$  [39].

simply associated with direct breakup to the continuum rather than via an intermediate resonance.

Experimentally the E1 strength function may be extracted from a measurement of the excitation spectrum from reactions on a high-Z target. Such reactions may be viewed as the absorption of a virtual photon, corresponding to the Coulomb field of the target. Importantly the form with excitation energy ( $E$ ) of the virtual photon spectrum,  $n_{E\lambda}$ , depends on the beam energy [38] — at low energy the spectrum is dominated by low energy photons, while at higher beam energies the spectrum becomes flatter, and excitations to higher energies become possible (figure 13). The double differential cross section ( $\sigma_C$ ) is, considering only dipole excitations [38],

$$\frac{d^2\sigma_C}{dE d\Omega} = \frac{dn_{E1}(E, \Omega)}{d\Omega} \frac{\sigma_{E1}(E)}{E} \quad (15)$$

where the dipole excitation cross section is given by,

$$\sigma_{E1} = \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E \frac{dB(E1)}{dE} \quad (16)$$

Integrating over all trajectories, equation 15 becomes,

$$\frac{d\sigma_C}{dE} = \frac{n_{E1}(E)}{E} \sigma_{E1}(E) \quad (17)$$

Thus, the dipole strength function,  $dB(E1)/dE$ , may be derived from a measurement of the Coulomb excitation spectrum,  $d\sigma_C/dE$ .

As noted above, even relatively small excitations lead to the dissociation of halo nuclei. The experimental determination of  $d\sigma_C/dE$  is thus challenging, requiring measurement of the momenta of the charged core and halo neutrons following the breakup of beams with intensities of only some  $10^2 - 10^4$  pps. From such "kinematically complete" measurements the excitation energy in the nucleus prior to breakup may be reconstructed.

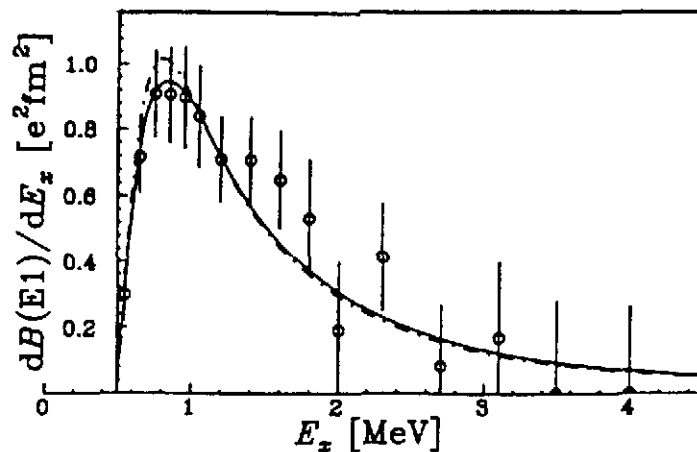


Figure 14: Dipole strength function for  $^{11}\text{Be}$ , extracted from a measurement of breakup on Pb at 72 MeV/nucleon [40]. The solid line is the prediction for direct breakup.

An example is shown in figure 14 for the reaction of a  $^{11}\text{Be}$  beam on a Pb target [40]. Here the E1 strength is seen to be concentrated at low energies, in line with expectations for an SDR. As the wavefunction is well known (section II), the dipole strength function may be calculated from first principles. Interestingly, the data is well reproduced assuming direct breakup. Further support for such non-resonant breakup is found in a comparison of the velocities of the core fragments ( $^{10}\text{Be}$ ) and the neutrons, with that of the core being on average higher than that of the neutrons. In simple terms, such a difference corresponds to the dissociation taking place around the distance of closest approach of the projectile and target, whereby only the charged core is subject to reacceleration on the outgoing leg of the trajectory. In contrast, for a resonance, the dissociation would take place on average well after the point of closest approach, thus suppressing such a velocity difference.

In the case of  $^{11}\text{Li}$  a number of experiments have been performed [41, 42, 43]. Similar enhancements in the low-lying E1 strength function are observed in all measurements at  $E_x \sim 1$  MeV (figure 15), however the observation of a core-neutron velocity difference [41] and the form of the distribution [42] suggest that the breakup is, once again, direct.

In comparing the various measurements and theoretical predictions, two important constraints must be underlined. Firstly, as noted above, the virtual photon spectrum is heavily weighted towards low energies at the lower beam energies, thus biasing these experiments towards the population of low energy excitations. This effect is further compounded by the acceptances of the experimental setups, which decrease with increasing decay energy,  $E_d$  ( $E_d = E_x - S_{(2)n}$ ). These two effects are clearly apparent in figure 15 (upper panel). It is important to note that the acceptance effects may only be calculated based on an assumed form for the excitation energy spectrum, thus precluding any model independent analysis.

Both effects may, however, be reduced by employing very high energy beams (>100 MeV/nucleon). At such energies, not only are higher excitations attainable through the increase in flux of high energy virtual photons, but the strong forward focussing of the

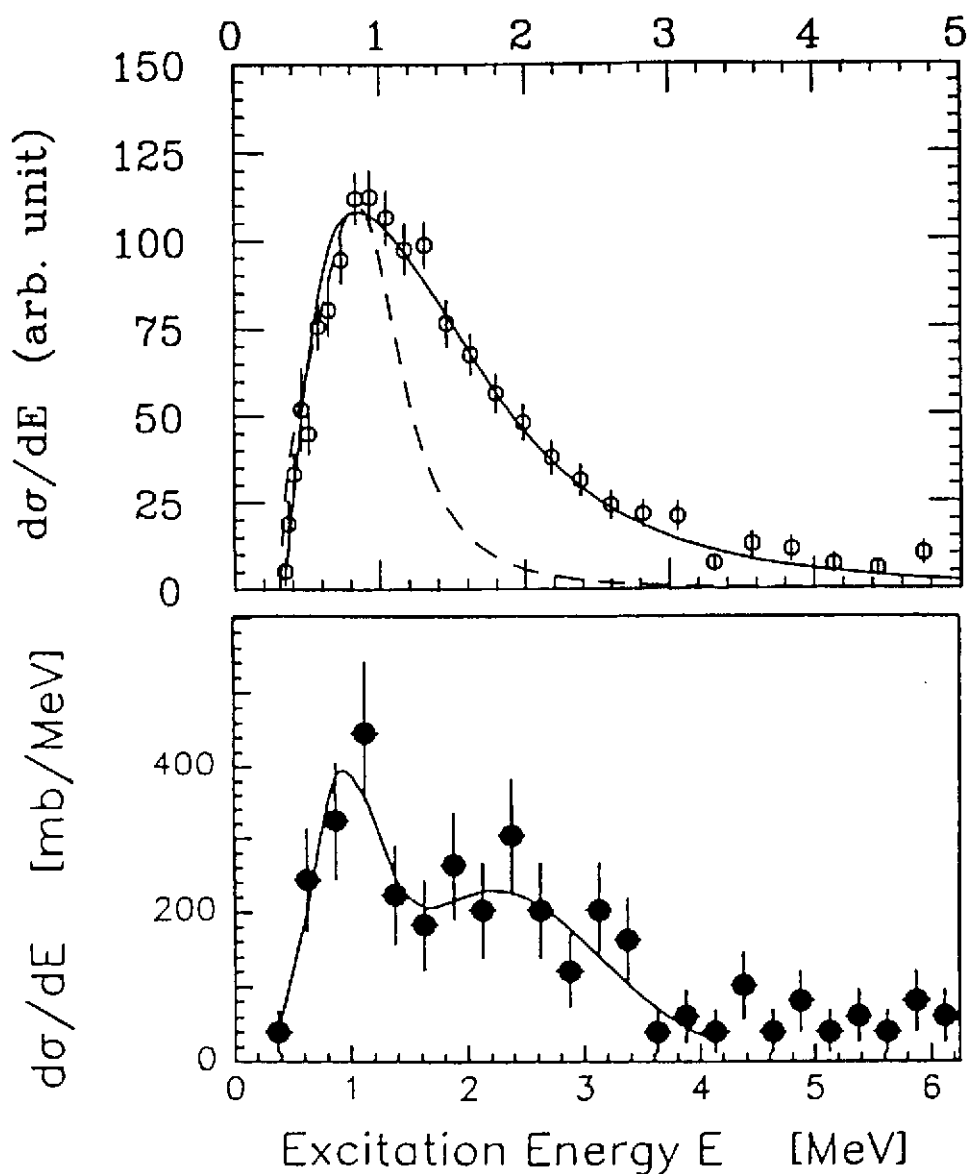


Figure 15: Invariant mass spectra for the breakup of  $^{11}\text{Li}$  on Pb at 43 MeV/nucleon [42] (upper panel) and at 280 MeV/nucleon [43] (lower panel). The lineshape obtained at 28 MeV/nucleon [41] is included in the upper panel (dashed line) for comparison; note that the normalisation is arbitrary and the uncertainties are not included. The solid line in the upper panel is a direct breakup prediction (see ref. [42] for details of the wavefunction used). The solid line in the lower panel is a two gaussian component fit to the data.

reaction products leads to 100% geometrical efficiencies. The results from the first experiment of this kind, carried out at GSI, is shown in figure 15 (lower panel), where additional strength is observed in the region of 2 MeV excitation energy.

The three-body nature of two-neutron halo systems represents one of the most intrinsically intriguing features of halo nuclei. As noted in section II, the simplest model reduces the description to a two-body system: core plus dineutron [14]. Inspired in part by this simple picture and the Borromean character<sup>12</sup> of two-neutron halo nuclei, the existence and nature of correlations between the halo neutrons has remained a central theme.

To study experimentally such correlations, processes must be sought in which the intrinsic neutron-neutron correlations are perturbed as little as possible. The avenue exploited to date has been dissociation reactions on high- $Z$  targets. Here the relatively low energy excitations (described above) involved in the breakup are hoped to provoke only minimal perturbations in the intrinsic neutron-neutron momenta<sup>13</sup>. In principle then, in the kinematically complete experiments employed to map the E1 strength, the neutron-neutron relative momenta ( $p_{n-n}$ ) may be extracted and used as a probe of correlations. Such measurements are experimentally difficult, owing primarily to the interfering effects of cross-talk, whereby neutrons may be scattered from one detector (or passive support material) into another, thus mimicking a two-neutron event or deforming the momentum of one neutron and hence the  $p_{n-n}$  [41, 45].

To date all three kinematically complete experiments on  ${}^{11}\text{Li}$  [41, 42, 43, 44] have been used to reconstruct the  $p_{n-n}$  (eg., figure 16). Attempts have been made to compare the results with respect to the very simple pictures of strong spatial correlations or none whatsoever, with a strong dineutron like component appearing to be excluded [42, 43, 44]. The simplicity of the present analyses, which do not include, for example, the possibility of distortions from the reaction, must be stressed.

Ideally, the coupling of detailed theoretical calculations with measurements such as those described should provide a clearer picture of the neutron-neutron correlations and the low-lying E1 strength. Unfortunately, the incomplete description presently available for the ground state wavefunctions of  ${}^{11}\text{Li}$ ,  ${}^{14}\text{Be}$ , etc remains a major obstacle, as does the need to correctly include the distorting effects of the reaction and FSI that govern the transformation of the ground state wavefunction to the observed excitation energy spectrum and neutron-neutron momentum distribution. In principle,  ${}^6\text{He}$  provides a stepping stone in such studies owing to the well established nature of the  $\alpha + n$  interaction ( ${}^5\text{He}$ ). However, as outlined by Vaagen *et al.* [46], the understanding of such systems (in particular the continuum) is still far from complete.

## V Conclusions and Perspectives

It is clear from the foregoing discussion that many open questions remain regarding the halo. In general terms, while the conditions governing the development of haloes have

<sup>12</sup>None of the constituent two-body subsystems are bound.

<sup>13</sup>In this context experiments conducted at the lower energies may present an advantage.



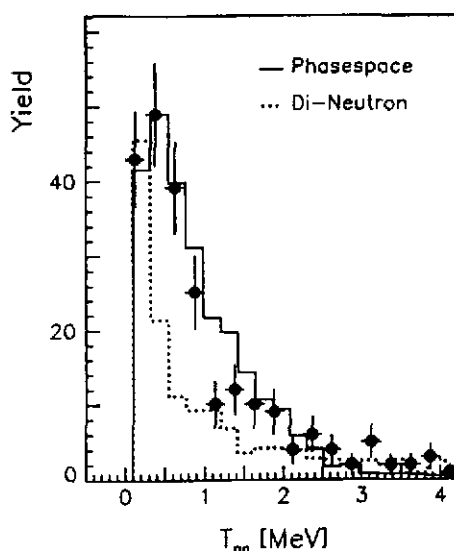


Figure 16: Neutron-neutron relative energy spectrum from the breakup of  $^{11}\text{Li}$  on Pb [43]. Simulations taking into account the excitation energy spectrum (figure 15) and experimental detection efficiencies are shown for dineutron (dotted line) and uncorrelated, or phasespace, emission (solid line). Both simulations have been arbitrarily normalised to the data.

been addressed theoretically (section III), experimentally work has only just begun with excursions beyond the mass 11 systems (eg., ref's [29, 30]). While only briefly mentioned, similar remarks apply to proton haloes. Given that the halo is essentially a threshold phenomena, many more examples probably exist as excited states than ground states. Owing to the difficulties in gaining direct information regarding the size of an excited state<sup>14</sup>, much remains to be done in this direction.

From a structural point of view, the spectroscopy of halo nuclei, including in the case of Borromean nuclei the related unbound systems ( $^5\text{He}$ ,  $^{10}\text{Li}$ ,  $^{13}\text{Be}$ ), is vital. As noted, for example, in section III, the configuration of the valence nucleons influence directly the spatial extent of the system. On the theoretical side, few-body models have made considerable progress, with reasonable success obtained in reproducing the characteristics of well know systems such as  $^6\text{He}$ . Steps have also been made towards more realistic modelling via the introduction of core degrees of freedom.

The excited state structure, and in particular putative SDR's, of halo nuclei remain, beyond the pioneering experiments described here largely unexplored. Additionally, while conceptually seductive, the investigation of correlations between halo nucleons remains in its infancy, with only the simplest of models being employed to compare with the scant experimental data. Theoretically much uncertainty remains in addressing both the SDR and correlations, stemming in part from the dearth of spectroscopic information and the complexity of including both realistic wavefunctions, reaction models and treatment of FSI.

It should be noted that space has not allowed the discussion of a number of experimental probes. For example,  $\beta$ -decay offers a potentially rich source of information via a well

<sup>14</sup>At present only  $\gamma$ -decay transition rates [47] and capture cross sections [48] can provide information on the radial extent of excited states.

understood mechanism [49]. Additionally, with the increasing intensities of secondary beams more conventional spectroscopic tools, such as direct reactions (eg. (p,p), (p,d), etc), are coming into play [50].

Perhaps the most appropriate note to end on is the following quotation which, it is hoped, captures the essence of the current situation in the field.

*"These subjects were simple but not easy. So many zero order questions had to be answered in order to even make remote sense of what was going on. Such questions still exist, ..."*

Denys Wilkinson

## VI Further Reading

Beyond the articles cited in the text referring to particular experiments or models, a number of reviews exist.

For those interested in the more general question of nuclear sizes and density distributions, exhaustive treatments may be found in the text (theoretically orientated) by Barrett and Jackson [51] and, more recently, in a review of experimental probes by Batty *et al.* [52].

For a brief and lucid overview of halo states, the review by Karsten Riisager [12] is recommended. A more complete and detailed discussion may be found in the review prepared by Gregers Hansen, Axel Jensen and Björn Jonson [53], while many of the experimental aspects of halo studies are included in a recently compiled review by Isao Tanihata [25]. A comprehensive, if slightly less up-to-date, compilation of theoretical models — concentrating in particular on three-body descriptions of Borromean systems — is provided by the reviewed prepared by the RNBT collaboration [54].

## Bibliography

- [1] R Hofstadter, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** (1957) 231
- [2] A Bohr, B Mottelson, *Nuclear Structure*, WA Benjamin, New York (1969)
- [3] MH Johnson, E Teller, *Phys. Rev.* **93** (1954) 357
- [4] JA Nolen Jr., JP Schiffer, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **19** (1969) 471
- [5] P Van Duppen, "*Les Noyaux Exotiques*", lecture notes to this School
- [6] I Tanihata *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2676; *Phys. Lett.* **106B** (1985) 380; *Phys. Lett.* **B206** (1988) 592
- [7] E Arnould *et al.*, *Phys. Lett.* **B197** (1987) 311
- [8] B Blank *et al.*, *Z. Phys.* **A343** (1992) 375
- [9] Y Ogawa *et al.*, *Nucl. Phys.* **A543** (1992) 722
- [10] GD Alkhazov *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2313
- [11] JS Al-Khalili, JA Tostevin, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3903
- [12] K Riisager, *Rev. Mod. Phys.* **66** (1994) 1105
- [13] H Sagawa, *Phys. Lett.* **B286** (1992) 7
- [14] PG Hansen, B Jonson, *Europhys. Lett.* **4** (1987) 409
- [15] NA Orr, *Nucl. Phys.* **A616** (1997) 155c
- [16] PG Hansen, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1016
- [17] H Esbensen, *Phys. Rev.* **C53** (1996) 2007; K Hencken *et al.*, *Phys. Rev.* **C54** (1996) 3043
- [18] J Hüfner, MC Nemes, *Phys. Rev.* **C23** (1981) 2538
- [19] R Serber, *Phys. Rev.* **72** (1947) 1008

- [20] JH Kelley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 30
- [21] R Anne *et al.*, Phys. Lett. **B304** (1993) 55
- [22] R Anne *et al.*, Nucl. Phys. **A575** (1994) 125
- [23] F Nunes *et al.*, Nucl. Phys. **A596** (1996) 171
- [24] T Kobayashi, *Proc. 1st Int. Conf. on Radioactive Nuclear Beams*, Sept. 1989, Berkeley, USA, ed. WD Myers, JM Nitscke, EB Norman (World Scientific, 1990) p325
- [25] I Tanihata, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **22** (1996) 157
- [26] K Riisager, AS Jensen, P Moller, Nucl. Phys. **A548** (1992) 393
- [27] DV Fedorov, AS Jensen, K Rissager, Phys. Lett. **B312** (1993) 1; Phys. Rev. **C49** (1994) 201
- [28] E Liegard, Thèse, Université de Caen (1998)
- [29] D Bazin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3569
- [30] FM Marqués *et al.*, Phys. Lett. **B381** (1996) 407
- [31] NK Timofeyuk *et al.*, Nucl. Phys. **600** (1996) 1
- [32] W Schwab *et al.*, Z. Phys. **A350** (1995) 283
- [33] JH Kelley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 5020
- [34] F Negoita *et al.*, Phys. Rev. **C54** (1996) 1787
- [35] B Blank *et al.*, Nucl. Phys. **A624** (1997) 242
- [36] A Ozawa *et al.*, Phys. Lett. **B334** (1994) 18
- [37] K Ikeda, Nucl. Phys. **A538** (1992) 355c
- [38] CA Bertulani, G Baur, Phys. Rep. **163** (1988) 299
- [39] G Baur *et al.*, Nucl. Phys. **A458** (1986) 188
- [40] T Nakamura *et al.*, Phys. Lett. **B331** (1994) 296
- [41] D Sackett *et al.*, Phys. Rev. **C48** (1993) 118; K Ieki *et al.*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 730
- [42] S. Shimora *et al.*, Phys. Lett. **B348** (1995) 29
- [43] M Zinser *et al.*, Nucl. Phys. **A619** (1997) 151

- [44] K Ieki *et al.*, Phys. Rev. **C54** (1996) 1589
- [45] Z Wang *et al.*, Nucl. Instr. Method **A397** (1997) 380
- [46] J Vaagen *et al.*, Nucl. Phys. **A616** (1997) 426
- [47] MJG Borge *et al.*, Phys. Lett. **B317** (1993) 25
- [48] T Otsuka *et al.*, Phys. Rev. **C49** (1994) R2289
- [49] K Riisager, Nucl. Phys. **A616** (1997) 169
- [50] JS Winfield *et al.*, Nucl. Instr. meth. **A396** (1997) 147
- [51] RC Barrett, DF Jackson, *Nuclear Sizes and Structure*, Clarendon Press, Oxford (1979)
- [52] CJ Batty *et al.*, Advances Nucl. Phys. **19** (1989) 1
- [53] PG Hansen, AS Jensen, B Jonson, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci **45** (1995) 591
- [54] MV Zhukov *et al.*, Phys. Rep. **231** (1993) 151

# Super et hyper déformation, du discret au continu, d'EUROGAM à EUROBALL

B. Gall

Institut de Recherches Subatomiques

23, Rue du Loess

B.P. 28 - F 67037 STRASBOURG CEDEX 2

## Résumé :

Les développements de multidétecteurs gamma tels que EUROGAM ont permis ces dernières années d'explorer en détail le phénomène de superdéformation. Le contexte physique lié à la présence d'une structure superdéformée d'un noyau atomique est présenté dans la première partie de ce cours. Les différentes techniques expérimentales accessibles avec les multidétecteurs gamma modernes, ainsi que les développements techniques liés aux différentes phases d'EUROGAM et EUROBALL sont ensuite détaillées. Suivent enfin les principaux résultats obtenus dans des domaines tels que la détermination de facteurs gyromagnétiques, la mesure de moments quadrupolaires, la meilleure compréhension de l'appariement nucléaire, le phénomène de bandes identiques et la décroissance des états superdéformés.

## Abstract :

The development of  $\gamma$ -ray multidetectors such as EUROGAM yielded the opportunity to investigate in detail the superdeformation phenomenon. A brief overview of all that the superdeformation phenomenon requires to the nucleus is first presented in this lecture. The different experimental techniques used with these detectors and the technical developments linked to the different phases of EUROGAM and EUROBALL is detailed in a second part. Finally, the major results obtained with EUROGAM like those associated to the gyromagnetic factor and quadrupole moment measurements, the identical bands phenomenon, the decay of superdeformed states and the better understanding of the behaviour of pairing correlations are discussed in a third part.

## O- Historique.

Les rapides progrès technologiques réalisés tant dans la fabrication de détecteurs au germanium de gros volume que dans l'électronique intégrée a permis de passer de multidétecteurs de première génération tels que le Château de Cristal et Tessa à EUROGAM, puis EUROBALL. Les améliorations ont été rendues nécessaires par la découverte de bandes de rotations correspondant à des structures "superdéformées". En effet, de tels états de la matière nucléaire sont

extrêmement difficiles à observer. EUROGAM I [No90, Ha91 et Be96], résultat d'une collaboration franco-britannique, correspondait à un accroissement important de l'efficacité de détection et a rempli sa mission scientifique. De nombreuses nouvelles bandes superdéformées ont ainsi pu être observées. Cela nous a amené un certain nombre de surprises telles que la découverte de bandes identiques et celle d'une éventuelle symétrie C4. Cela nous a aussi permis de mieux comprendre des aspects connus depuis bien longtemps tel l'appariement nucléaire. De cette collaboration est ensuite issu EUROGAM II permettant ainsi d'aller plus loin dans l'exploration de la structure intime du noyau. En effet, l'important accroissement de l'efficacité de détection a donné accès à de nombreuses structures superdéformées excitées. De plus, l'association de détecteurs additionnels tels que DIAMANT ou SAPHIR lors de certaines expériences a permis d'accroître la sélectivité d'EUROGAM. Il a été ainsi possible d'accéder aux orbitales nucléoniques individuelles situées au voisinage du niveau de Fermi et donc de poser de fortes contraintes aux calculs de nos collègues théoriciens. De l'élargissement de la collaboration à d'autres pays européens est né EUROBALL III [Be92] qui consacrera l'ouverture de la communauté des spectroscopistes à d'autres domaines d'étude de la structure nucléaire.

## I-Noyau Superdéformé

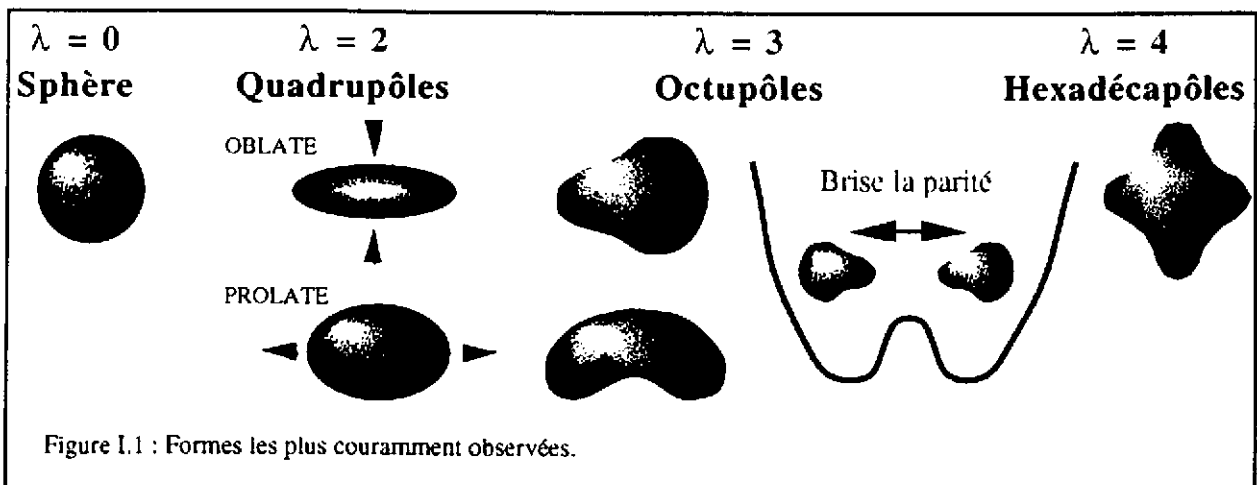
### I.1. Déformation nucléaire.

#### I.1.1. Forme des noyaux :

Les noyaux peuvent prendre divers types de déformations. Pour décrire les différentes formes accessibles au noyau, on peut paramétriser leur surface par des fonctions harmoniques sphériques

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right]$$

Ce sont les ordres les plus bas de cette distribution que l'on retrouvera le plus souvent dans la nature : le terme d'ordre zéro correspond à la sphère, l'ordre 2 à des déformations quadrupolaires. Par contre, comme il correspond à des translations, l'ordre 1 ne caractérise pas une déformation.



I.1.2. Coexistence de forme :

On constate expérimentalement que la plupart des noyaux sont déformés. Dans certains noyaux on observe même la **coexistence de plusieurs formes différentes**. C'est par exemple le cas dans le noyau  $^{194}\text{Pb}$  où on dénombre des états correspondant à une forme sphérique, des états correspondant à une déformation oblate et des états où le noyau est superdéformé. Cette coexistence de forme est la signature d'effets de couches. En effet, les énergies des différents niveaux quantiques de nucléons ne varient pas de la même façon en fonction de la déformation, ce qui peut conduire à un plus grand "gap" (interstice) entre niveaux au voisinage du niveau de Fermi pour des systèmes déformés.

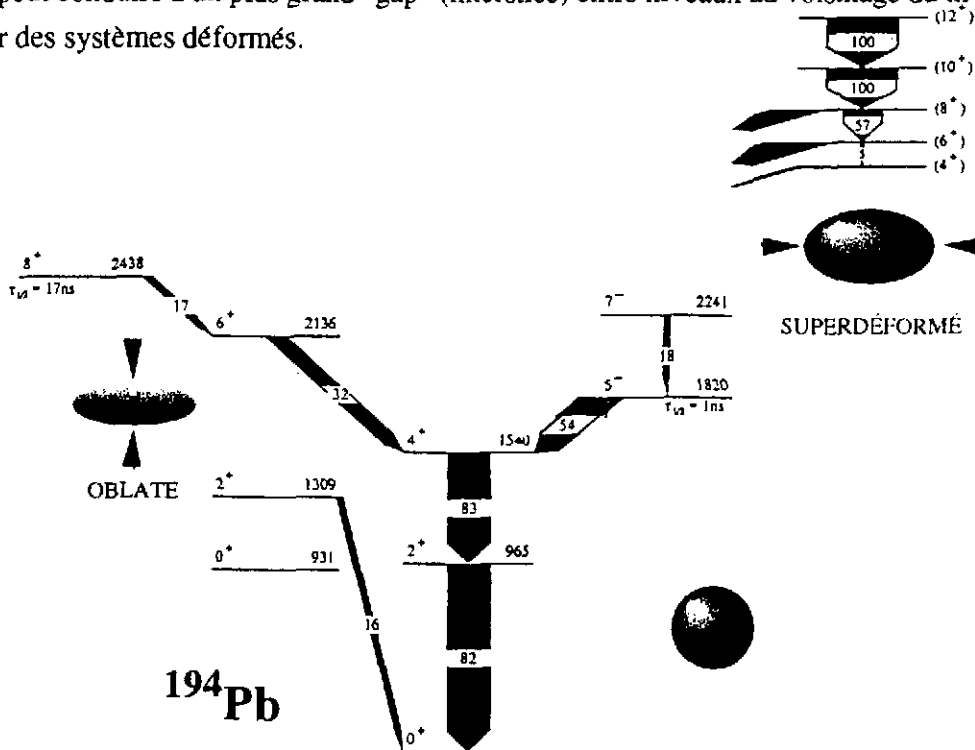


Figure I.2 : Coexistence de forme dans le noyau  $^{194}\text{Pb}$  [Ga95b].

I.2. Nombres magiques, influence de la déformation.

La notion de nombres magiques<sup>1</sup> nucléoniques (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 ...), qui a été à l'origine de la description quantique des noyaux, doit être revue. En effet, l'énergie des différents niveaux du modèle en couches varie en fonction de la déformation du noyau ce qui entraîne l'apparition de nouveaux gaps. Ainsi, de **nouveaux nombres magiques** apparaissent conduisant à la stabilisation d'autres formes nucléaires que la sphère.

<sup>1</sup>les nombres magiques correspondent aux occupations nucléoniques telles que le niveau de Fermi soit situé dans un grand gap. L'introduction d'un terme de spin-orbite dans les modèles nucléaires a permis un bon accord avec les données expérimentales.

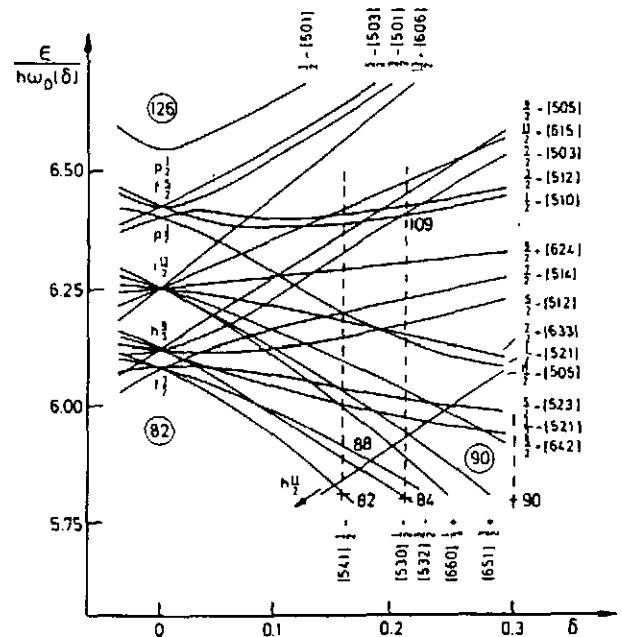


Figure I.3 : Variations des énergies à une particule en fonction de la déformation calculées à l'aide du modèle de Nilsson [RS80, p. 79].



### I.3. Orbitales intruses.

Sous l'effet conjugué du terme de spin-orbite et de la forte déformation, certaines orbitales correspondant à un nombre quantique principal  $N$  (dans un modèle du type oscillateur harmonique) se retrouvent localisées en énergie dans une couche constituée de niveaux correspondant à un nombre quantique principal moins élevé ( $N-1$ , voire  $N-2$  ...). De telles orbitales sont appelées **orbitales intruses**.

La **rotation** vient, elle aussi, perturber les schémas de niveaux statiques. En effet, l'invariance par renversement du sens du temps se brise, ce qui conduit à la **levée de la dégénérescence de Kramers**.

Les différentes orbitales ne sont pas toutes aussi sensibles à cet effet : la force de Coriolis est d'autant plus forte que la projection du moment cinétique de l'orbitale considérée sur l'axe de rotation est grande.

Les orbitales intruses ont en général un fort couplage à la rotation et un fort appariement nucléaire, ce qui conduit à des effets induits par la rotation assez importants.

Ces orbitales vont donc avoir une importance majeure dans la discussion des bandes superdéformées, car les noyaux ont alors une très **grande fréquence de rotation**.

### I.4. Excitation du noyau.

Différents types d'excitation sont permises au noyau. Celui-ci peut subir, par exemple, des excitations individuelles telles que des excitations particule-trou, pouvant conduire à l'alignement de moment angulaire. Comme les énergies nécessaires à de telles excitations sont directement liées à des différences d'énergie à une particule, elles conduisent à des irrégularités dans les schémas de niveaux. Peuvent apparaître, également, des excitations collectives, des vibrations (états à  $N$  phonons, résonances géantes,...) ou des rotations collectives (bandes de rotation). Ces excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux "réguliers".

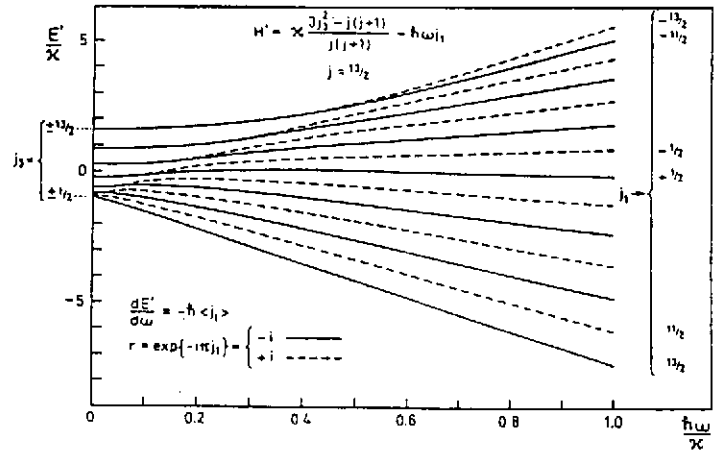


Figure I.4 : Variations des énergies à une particule en fonction de la rotation [Mo79].

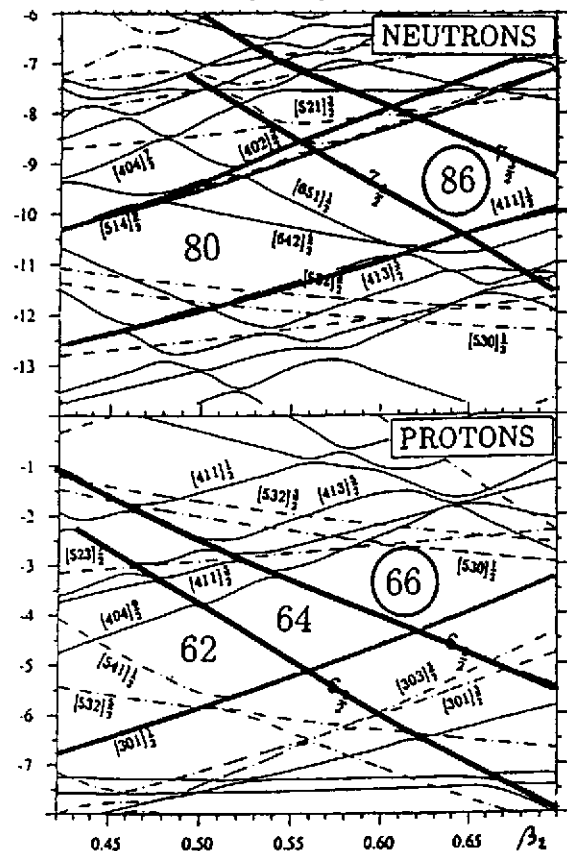


Figure I.5 : Apparition, sous l'effet de la déformation, d'orbitales intruses  $N=7$  (6) au voisinage du niveau de Fermi des neutrons (protons) de  $^{152}\text{Dy}$  [Du98].

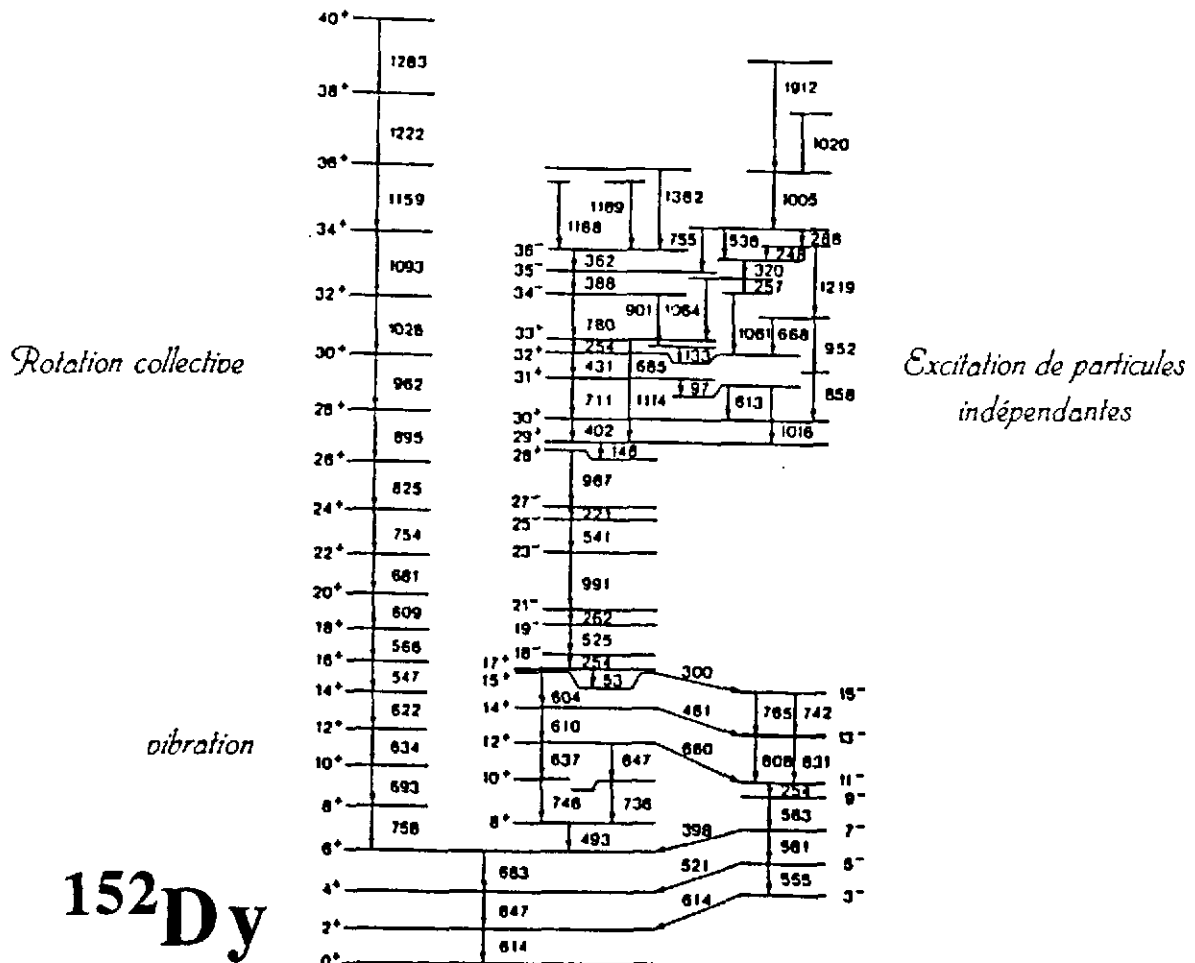


Figure I.6 : Schéma de niveaux excités de  $^{152}\text{Dy}$ . On peut y observer, sur le côté droit des espacements de niveaux irréguliers liés à des excitations individuelles et sur la gauche un comportement régulier lié à des excitations collectives [Cu88].

La présence d'un certain type d'excitation nous renseigne sur la forme du noyau. On peut voir sur le schéma de niveaux du  $^{152}\text{Dy}$  des excitations individuelles correspondant à une faible déformation et des états de vibration suivis d'états de rotation pour lesquels le noyau a une forme prolate.

## I.5. Bandes de rotation.

### I.5.1. Rotation collective - rotation individuelle :

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Ce moment angulaire peut être généré de deux manières différentes. Dans le cas de **rotation collective** le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de symétrie. Le schéma d'excitation ainsi obtenu est celui d'un rotateur quantique et présente donc une grande régularité (cf. figure I.7).

Dans le cas d'un noyau sphérique, le moment angulaire est généré par les moment angulaires individuels des nucléons. En effet, si la rotation collective est interdite, rien n'empêche les nucléons de se mouvoir et d'avoir un moment angulaire individuel. Si la somme vectorielle de ces moments est non nulle, elle définit un axe de **rotation individuelle**. Ce type d'excitations conduit à un schéma de niveaux quantiques présentant de nombreuses irrégularités (cf. figure I.7).

Collectif

$$\vec{I} = \vec{R}$$

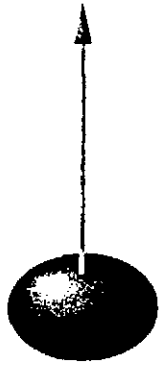
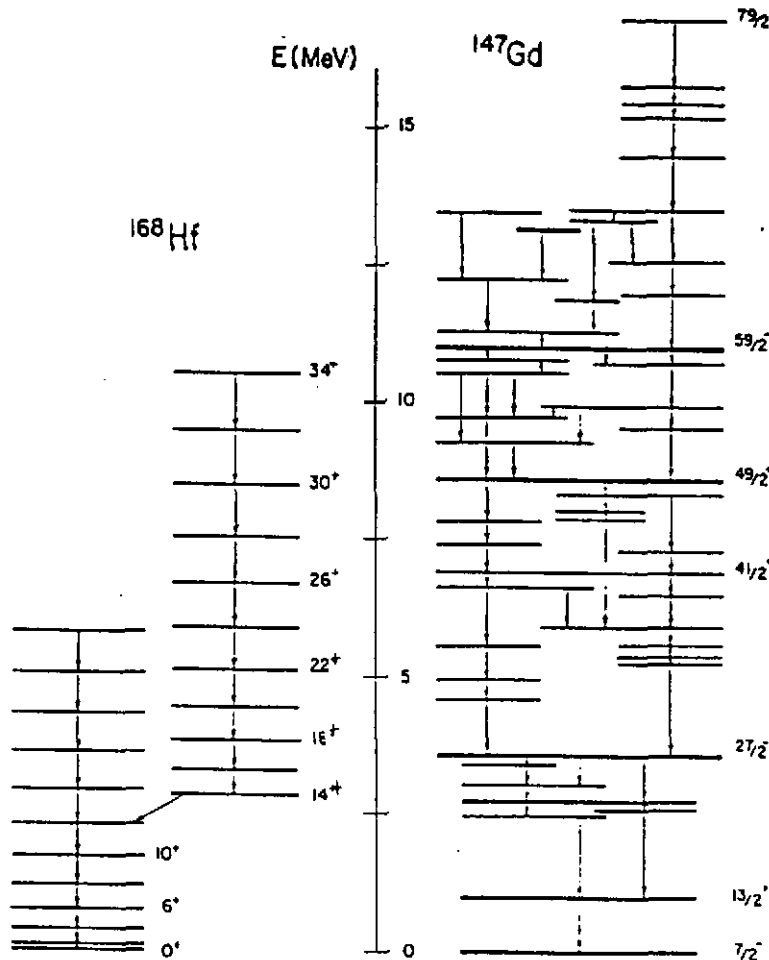


Schéma régulier

 ${}_{72}^{168}\text{Hf}_{96}$ 


Individuel

$$\vec{I} = \sum \vec{j}_i$$

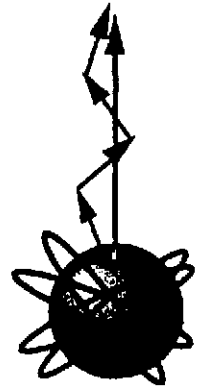


Schéma irrégulier

 ${}_{64}^{147}\text{Gd}_{83}$ 

Figure I.7 : A gauche, schéma de niveaux de  ${}^{168}\text{Hf}$  qui présente un schéma de niveaux caractéristique d'une rotation collective (dont les espacements croissent régulièrement) [S184 et Cu88]. A droite, le moment angulaire est obtenu par excitations nucléoniques individuelles. Le schéma de niveaux est donc irrégulier [Ch83 et Cu88].

### I.5.2. Structure en rotation collective ➡ Moment d'inertie dynamique :

L'énergie  $E^*(I)$  des états de rotation d'un noyau pair-pair et l'énergie des rayonnements gamma  $E_\gamma$  émis lors du passage d'un état de moment angulaire  $I$  à celui de moment angulaire  $I-2$  suivent les lois :

$$E^*(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{S}} I(I+1) + E_0$$

$$E_\gamma = E^*(I+2) - E^*(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{S}} (4I+6)$$

où  $E_0$  est l'énergie de l'état sur lequel est basée la rotation et  $\mathcal{S}$  le moment d'inertie du noyau (le cas des noyaux impairs, plus complexe, sera dans un premier temps laissé de côté dans un souci

de clarté). On peut également définir une fréquence de rotation  $\hbar\omega$  du noyau ainsi que l'écart en énergie  $\Delta E_\gamma$  entre deux raies gamma émises successivement :

$$\hbar\omega = \frac{dE}{dI} = \frac{E_\gamma}{2} \quad (\text{si } \Delta I = 2)$$

$$\Delta E_\gamma = E_\gamma(I+2) - E_\gamma(I) = \frac{4\hbar^2}{\mathfrak{I}} = \text{constante (si } \mathfrak{I} \text{ constant).}$$

On constate que cette grandeur permet de remonter à l'inertie  $\mathfrak{I}$  du noyau et surtout de quantifier ses variations en fonction de la fréquence. On peut donc définir le **moment d'inertie dynamique** :

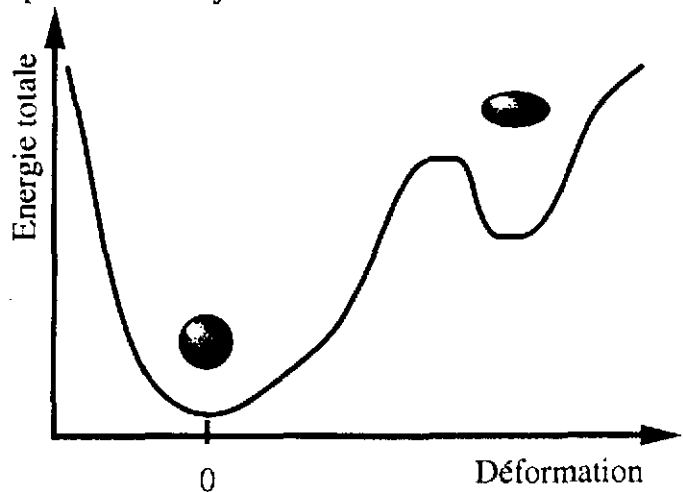
$$\mathfrak{I}^{(2)} = \frac{dI}{d\hbar\omega} = \frac{4}{\Delta E_\gamma} \quad (\text{unité : } \hbar^2 \text{MeV}^{-1})$$

Cette quantité permet de suivre l'évolution du noyau avec la fréquence de rotation. C'est un paramètre extrêmement sensible, directement accessible à l'expérimentateur. Le moment d'inertie dynamique  $\mathfrak{I}^{(2)}$  est donc largement utilisé dans les comparaisons expérience-théorie.

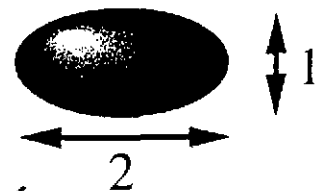
### 1.5.3. Bandes super et hyper déformées :

Les bandes de rotation collectives sont étudiées depuis de nombreuses années. Ces études ont mis en évidence des phénomènes multiples entrant en jeu dans l'évolution des structures en rotation. Un renouveau a été apporté à ce domaine par la découverte d'états excités pour lesquels le noyau est extrêmement déformé (deux fois plus long que large) et en rotation extrêmement rapide : ces familles d'états constituent ce qu'on appelle des **bandes superdéformées**.

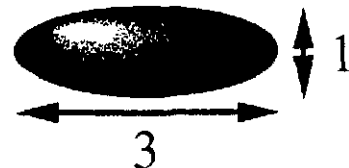
Les effets de couches entraînent, dans certaines régions de masse, l'apparition de gaps liés à des minima dans l'énergie totale, correspondant à une grande déformation. Dans certains cas de tels puits sont prédits théoriquement à spin nul (masse  $A \approx 190$ ) et dans d'autres ce puits n'apparaît qu'à grande fréquence de rotation. L'intérêt de ces bandes de rotation réside dans la présence de la barrière de potentiel séparant ces états des autres états nucléaires. Il a donc été possible d'étudier l'évolution de l'appariement



Superdéformé :



Hyperdéformé :



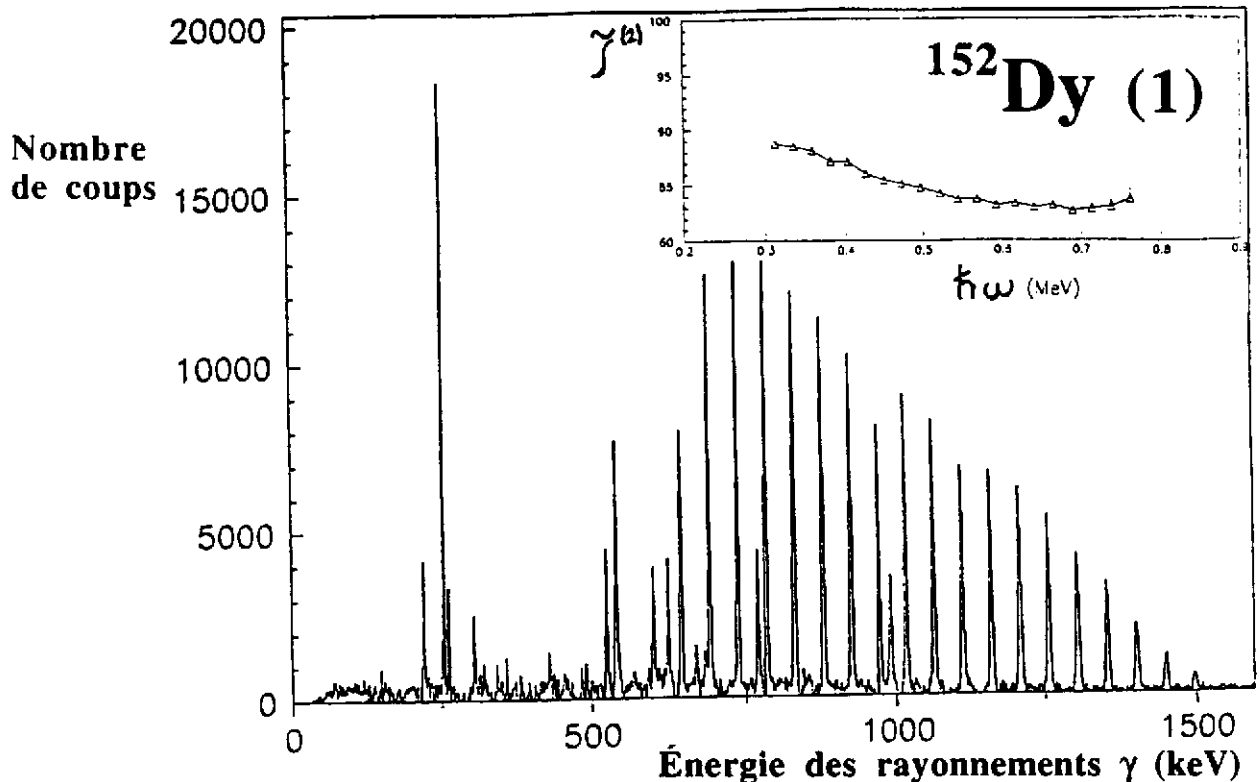


Figure I.8 : Spectre de la bande Yrast de  $^{152}\text{Dy}$  [VI97]. On notera la régularité de l'espace des transitions gamma de la bande.

en fonction de la rotation seule (la déformation étant fixée par le puits) ainsi que l'évolution liée à une orbitale particulière. Ces points ainsi que certains autres seront traités dans la suite de ce cours.

Des minima d'énergie potentielle pour une déformation encore plus grande, hyperdéformation (trois fois plus longues que larges) ont également été prédites, mais les bandes de rotation correspondantes n'ont pas encore été observées<sup>2</sup>.

## I.6. Mode de production

### I.6.1. Réaction de fusion-évaporation :

Les noyaux superdéformés sont produits par réaction dite de **fusion-évaporation**. Pour les obtenir, on accélère des ions lourds qui bombardent les noyaux de la cible avec une énergie cinétique suffisante pour vaincre la répulsion coulombienne. On forme ainsi un **noyau composé** ayant une énergie d'excitation de l'ordre de 60 à 80 MeV. S'il ne fissionne pas, ce dernier va se désexciter en émettant des particules légères (principalement des neutrons, mais également des protons ou des particules alpha). Le noyau ainsi formé terminera sa désexcitation en émettant une série de rayonnements gamma.

Dans de telles réactions, de nombreuses voies de sortie sont ouvertes (suivant le nombre et le type de particules évaporées). Le noyau que l'on cherche à produire sera, lui aussi, formé dans différents états et avec différentes valeurs du moment angulaire ce qui définit la "région d'entrée"

<sup>2</sup> Des états correspondant à une forme hyperdéformée ont été observés dans les isomères de fission par résonance dans des réactions de capture de neutrons. Les transitions gamma de la bande de rotation correspondante n'ont pas pu être mesurées vu la très forte probabilité de fission de ces états dans cette région de masse [B189].

dans le plan énergie-spin (cf. figure 1.8). Si on souhaite à étudier des structures correspondant à une rotation rapide, ainsi que leur désexcitation, on aura intérêt à choisir l'énergie de bombardement de manière à apporter un maximum de moment angulaire au noyau.

### 1.6.2. Profil d'intensité :

A haut moment angulaire, les structures de grande déformation dites **superdéformées (SD)** ayant une inertie plus grande, se retrouvent énergétiquement favorisées. Ainsi, lorsqu'on cherche à peupler des **bandes superdéformées**, on se place à haut spin. On est donc dans des conditions de spin et énergie d'excitation telles que le processus de **fission** entre fortement en compétition avec la production des noyaux à étudier (On peut d'ailleurs en tirer parti pour étudier les états de grand spin des noyaux produits de fission (Po98)). La **fission** peut donc **limiter** l'alimentation des bandes SD à haut moment angulaire. Si, par contre, on apporte trop peu de moment angulaire on peuple principalement les structures de faible déformation dites de déformation normale (ND).

L'optimum de production de bandes superdéformées se trouve donc dans un **triangle magique** limité par la ligne yrast SD, la limite de fission et les structures ND excitées par rapport aux structures SD.

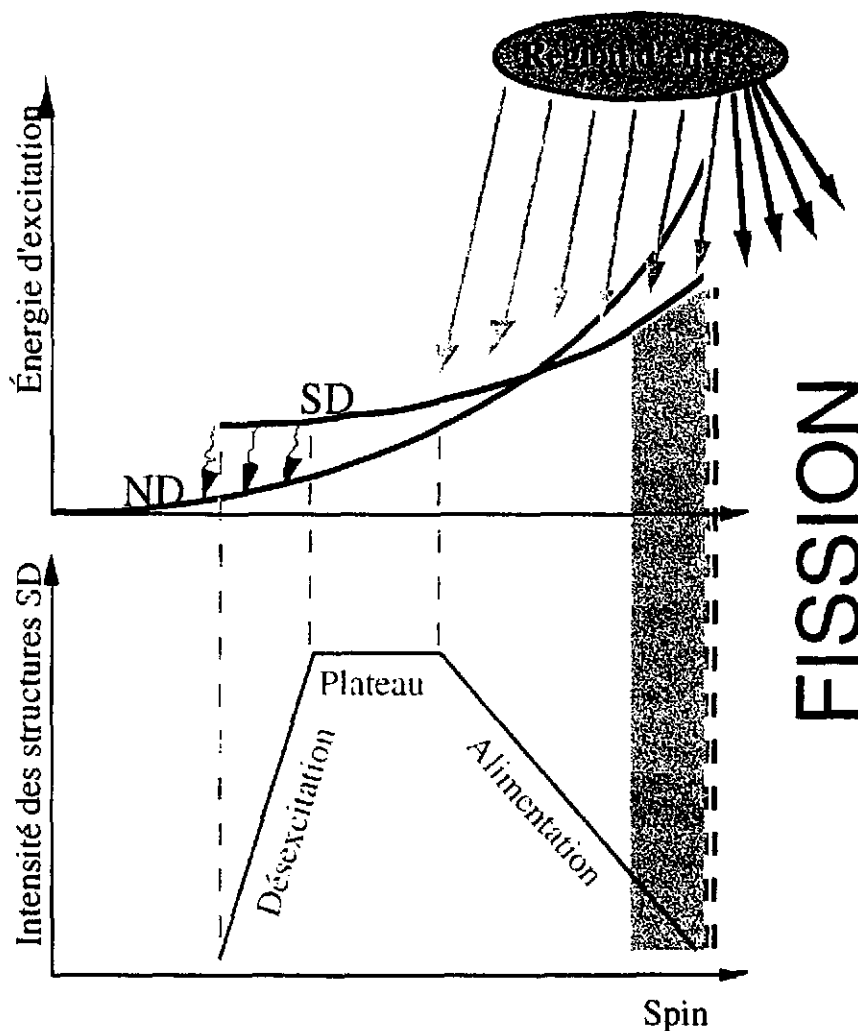
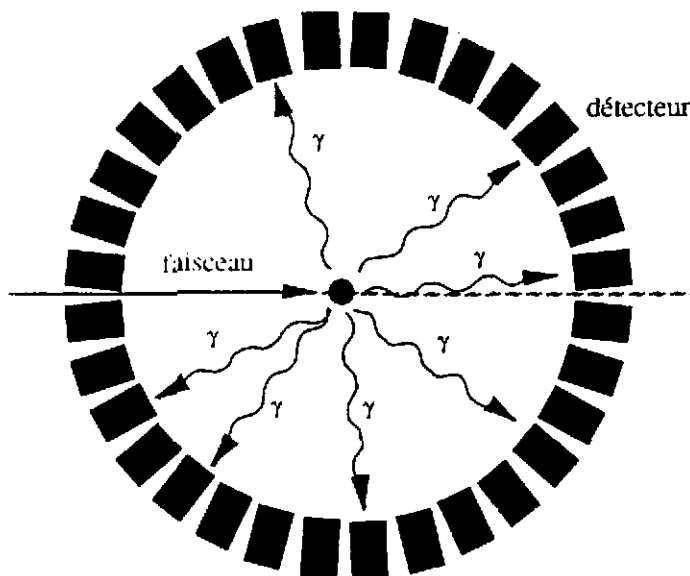


Figure 1.9 : Représentation schématique de l'alimentation d'une bande SD de la région de masse 190.

## II-Moyens de détection

### II.1. Notion de coïncidence.

Lorsqu'on utilise des systèmes de détection composés d'un très grand nombre de détecteurs (**multidétecteurs**), la mesure des temps revêt une importance primordiale. En effet il faut être capable de savoir si les raies gamma ont été **détectés en même temps** ou non. On enregistre donc



l'écart en temps entre les signaux issus des différents cristaux du multidétecteur et on ne garde que les signaux considérés par le physicien comme arrivés en même temps ( $T_{\text{électronique}} \approx 50 \text{ à } 100 \text{ ns}$ ).

Les raies gamma qui ont été détectées en même temps (**coïncidence en temps**) constituent un **événement**. C'est la notion de coïncidence qui est à la base de la construction des schémas de niveaux et donne accès aux relations d'intensité entre différentes transitions (rapports d'embranchements).

Si on cherche maintenant à utiliser la notion de coïncidence pour favoriser les rayons

Figure II.1 : Vue schématique d'un multidétecteur gamma.

gamma provenant de cascades de désexcitations de structures superdéformées en rotation rapide, on est amené à définir deux quantités :

la **MULTIPLICITÉ** : Nombre de photons émis en cascade lors d'une désexcitation d'un noyau atomique.

le **FOLD** : Nombre de photons détectés en même temps dans des cristaux distincts du multidétecteur.

En sélectionnant à l'aide de l'unité de décision en ligne (TRIGGER) les événements de haut FOLD (par exemple supérieur à 5), on favorise les coïncidences vraies par rapport aux coïncidences fortuites. Certes on perd des événements, mais on ne garde que les événements les plus intéressants. A l'aide de cette méthode, on favorise les cascades de désexcitation ayant une forte multiplicité. Ceci constitue un atout considérable lorsqu'on cherche à étudier des structures en rotation, car les cascades correspondantes sont relativement longues.

Ce système est par contre moins efficace si on cherche à étudier un noyau ayant des niveaux d'excitation de temps de vie relativement long ou des système correspondant à des faibles multiplicités.

### II.2. Analyse de données à haut fold.

La notion de coïncidence est exploitée à deux niveaux : durant l'expérience pour diminuer le flot de données (on met un seuil en fold sur les événements) et après l'expérience pour son analyse. Il faut, en effet, pouvoir tirer au mieux parti de l'information contenue dans les données.

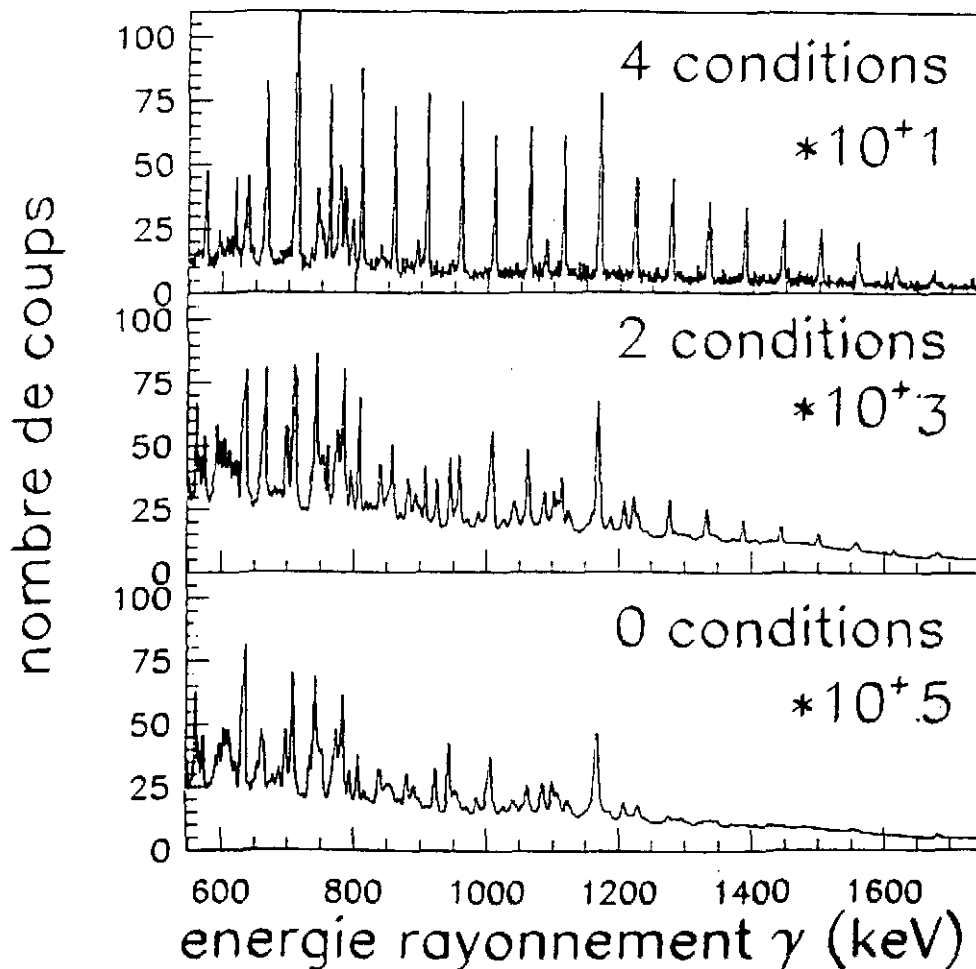


Figure II.2 : Spectres conditionnés  $N$  fois issus d'une expérience dont le but est l'étude des bandes SD de  $^{149}\text{Gd}$  [Vi96].

On va donc chercher à construire des spectres présentant les énergies  $E_\gamma$  en coïncidence avec un certain nombre de transitions  $\gamma$  connues. Pour cela on a deux méthodes : soit on construit directement les spectres, soit on passe par un stockage de dimension intermédiaire (matrice  $E_\gamma E_\gamma$ , cube  $E_\gamma E_\gamma E_\gamma$ , ...) conditionné ou non.

On peut ainsi construire le spectre en coïncidence avec une transition  $E_\gamma(a)$  connue ce qui reviendra, pour chaque événement, à stocker dans ce spectre toutes les énergies qui arrivent en même temps que la transition  $E_\gamma(a)$  lorsque cette dernière y est présente. On aura encore des coïncidences fortuites, mais on sélectionne ainsi une portion des données dans lesquelles l'information qui nous intéresse devient majoritaire. On peut bien sûr envisager de généraliser cette méthode pour construire le spectre de "fold  $N+1$ " en stockant, pour chaque événement, toutes les énergies qui arrivent en même temps que  $N$  transitions connues  $E_\gamma(1)$ ,  $E_\gamma(2)$ , ...  $E_\gamma(N)$  lorsque ces dernières y sont présentes. Pour un tel classement on ne pourra utiliser que les événements de fold supérieur à  $N$ . Or, comme nous l'avons vu précédemment, lorsqu'on étudie des cascades de grande multiplicité, les informations de coïncidence élevées sont d'autant plus riches que le fold est élevé. On peut bien s'en rendre compte pour les bandes SD pour lesquelles la multiplicité est de l'ordre de  $M=30$  (cf. figure II.2). Plus on traite des événements de fold élevé, plus le rapport signal SD sur fond est favorable. On a cependant de moins en moins de statistique dans les spectres ce qui finit par limiter cette méthode à des folds de l'ordre de 6 pour EUROGAM II. On a



ainsi une méthode extrêmement puissante pour mettre en évidence des raies gamma peu intenses. Si on cherche maintenant à analyser le comportement en intensité d'une cascade de transitions  $\gamma$ , il faut être extrêmement prudent sur la façon d'obtenir les spectres sur lesquels on mesure l'intensité. En effet, le fait de mettre plusieurs conditions de coïncidence ou de sommer des spectres issus de différents conditionnements peut biaiser l'information. Il en est de même pour le passage par un classement intermédiaire mettant en jeu des facteurs combinatoires dépendant de la taille de l'espace intermédiaire [De95a].

Dans l'exemple de la figure II.2 sont représentés trois spectres : le spectre brut contenant l'ensemble des photons mesurés, le spectre conditionné deux fois (on demande la présence de 2 photons parmi une liste de photons émis lors de la désexcitation d'états superdéformés) dans lequel on commence à voir une structure régulière et le spectre conditionné quatre fois (on demande la présence de 4 photons parmi la liste déjà citée) dans lequel on voit nettement les raies régulièrement espacées des photons de la bande de rotation bâtie sur un état superdéformé (SD) du  $^{149}\text{Gd}$  [Vi96].

### II.3. Grandeurs mesurables.

Les détecteurs de photons nous donnent uniquement les énergies de transition gamma  $E_\gamma$  et les temps  $T_\gamma$  correspondants. En prenant en compte un grand nombre d'événements on peut exploiter la statistique pour établir une mesure :

Le centroïde de la distribution donne l'énergie  $E_\gamma$  de la transition gamma.

L'aire sous le pic (fond déduit) donne l'intensité  $I_\gamma$  correspondante.

De plus ces deux grandeurs peuvent dépendre de l'angle de mesure. On dispose donc principalement de  $E_\gamma(\theta)$ ,  $I_\gamma(\theta)$ , et  $T_\gamma$ .

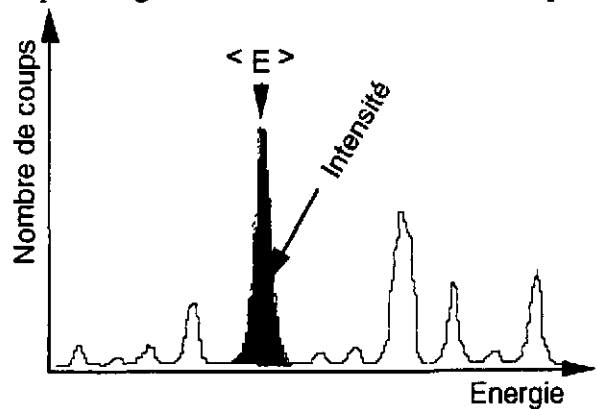


Figure II.3 : Vue schématique d'un spectre.

### II.4. Grandeurs dérivées.

#### II.4.1. Multipolarité de transition :

La mesure des propriétés du photon de désexcitation nous permet de déduire les caractéristiques de l'état initial, si celles de l'état final sont connues. En effet, on applique deux lois de conservation :

- la conservation de l'énergie  $E_\gamma = E_i - E_f$

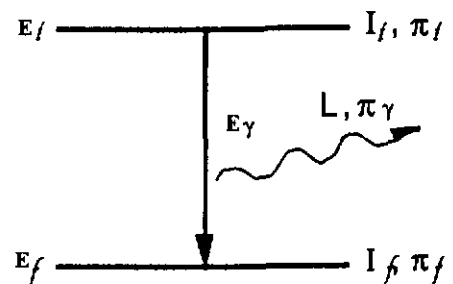
- la conservation de la parité  $\pi_i = \pi_\gamma \cdot \pi_f$

où la parité du photon  $\pi_\gamma$  vaut

$(-1)^L$  pour une transition électrique EL

$(-1)^{L+1}$  pour une transition magnétique ML

La composition des moments angulaires donne  $|I_i - L| \leq I_f \leq |I_i + L|$ . Or  $I_i$  et  $I_f$  sont fixés. Ceci implique que  $L$  ne peut prendre que des valeurs supérieures ou égales à  $\Delta I = |I_f - I_i|$ . On distingue deux cas : Les **transitions étirées** ( $L = \Delta I$ ) et les autres ( $L > \Delta I$ ).



#### II.4.2. Probabilités de transition gamma M1, E1, E2 :

Suivant le caractère d'une transition, la probabilité de transition sera différente. Une fois que l'on dispose des fonctions d'onde dans le cadre d'un modèle, on peut calculer différentes observables telles que les probabilités de transition électromagnétiques. On peut ainsi citer les estimations de Weisskopf des probabilités de transition  $\lambda(Ei)$ ,  $\lambda(Mi)$  :

$\lambda(E1) = 1,0 \cdot 10^{14} A^{2/3} E_\gamma^3$	$\lambda(M1) = 5,6 \cdot 10^{13} E_\gamma^3$
$\lambda(E2) = 7,3 \cdot 10^7 A^{4/3} E_\gamma^5$	$\lambda(M2) = 3,5 \cdot 10^7 A^{2/3} E_\gamma^5$
$\lambda(E3) = 34 \cdot 10^0 A^2 E_\gamma^7$	$\lambda(M3) = 16 \cdot 10^0 A^{4/3} E_\gamma^7$
$\lambda(E4) = 1,1 \cdot 10^{-5} A^{8/3} E_\gamma^9$	$\lambda(M4) = 4,5 \cdot 10^{-6} A^2 E_\gamma^9$

On constate, comme on aurait pu s'y attendre, que les ordres multipolaires les plus élevés sont les moins probables. On ne les observera donc que si les ordres les plus bas sont interdits. La simple observation de ces probabilités met également en lumière le fait que, lors de l'émission d'une raie gamma, les transitions étirées seront largement favorisées par rapport aux transitions non étirées.

Pour comparer les probabilités de transitions, la notion de probabilité réduite  $B(EL)$ ,  $B(ML)$  a été introduite. Ces probabilités réduites sont exprimées en unités Weisskopf (uW). Une uW correspond à  $B(M1)=1,65\mu_N^2$  pour une transition dipolaire magnétique (M1) et à  $B(E2)=0,061A^{4/3}e^2fm^4$  pour une transition quadrupolaire électrique (E2). Ainsi, par exemple, les transitions E2 reliant les états d'une bande superdéformée de la région de masse 190 ont une probabilité de transition réduite  $B(E2)$  de l'ordre de 2000 uW et les transitions dipolaires interbandes observées à basse énergie dans certains noyaux impairs de cette région ont une probabilité de transition réduite  $B(M1)$  de l'ordre de 0,5 uW.

#### II.4.3. Distributions angulaires :

Les réactions induites par ions lourds ont l'avantage de donner lieu à des noyaux composés dont le moment angulaire se trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe du faisceau. On a donc ce qu'on appelle un **état nucléaire aligné**. Il en résulte une anisotropie de l'émission des photons ( $I=f(\theta)$ ). On peut donc développer l'intensité  $I_\gamma(\theta)$  d'une transition gamma sous forme d'une somme de polynômes de Legendre où l'angle  $\theta$  est repéré par rapport à l'axe du faisceau. On en déduit l'expression de la distribution angulaire (distribution d'intensité normalisée) :

$$w(\theta) = \frac{I_\gamma(\theta)}{I_\gamma} = 1 + a_2 P_2(\cos\theta) + a_4 P_4(\cos\theta) + \dots$$

Une transition étirée dipolaire pure (L=1) a un coefficient  $a_2$  négatif et  $a_4$  nul. Par contre, une transition étirée quadrupolaire pure (L=2) a un coefficient  $a_2$  positif et  $a_4$  négatif (peut).

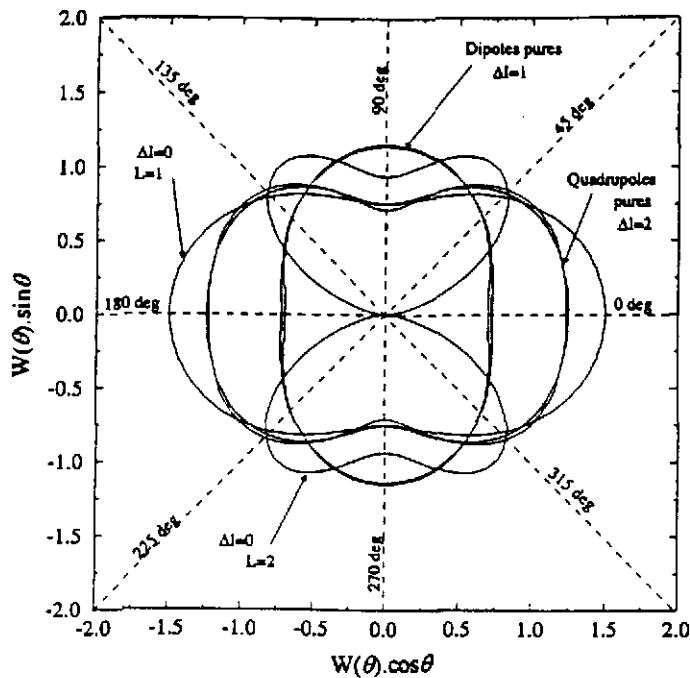
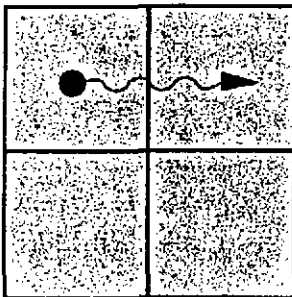


Figure II.4 : Représentation spatiale des distributions angulaires correspondant à différents types de transitions gamma [Ka96].

#### II.4.4. Polarisation linéaire :

L'effet Compton est sensible à la polarisation linéaire du photon : le photon issu d'une diffusion Compton prend préférentiellement une direction perpendiculaire au champ électrique du photon incident.

Horizontal : ( $E\lambda$ )



Vertical : ( $M\lambda$ )

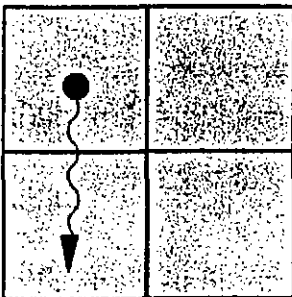


Figure II.5 : Vue schématique de la diffusion Compton d'un photon d'un pétale à l'autre d'un détecteur Trèfle.

Si on dispose de plusieurs détecteurs situés dans un plan perpendiculaire à l'axe du photon incident, on peut, en utilisant cet effet, déterminer la polarisation linéaire du photon.

En effet, suivant que le photon soit EL ou ML, le photon secondaire issu d'un effet Compton prendra préférentiellement une direction "horizontale" c'est à dire perpendiculaire au plan de référence (défini par l'axe du faisceau et la direction du photon incident) ou "verticale" c'est à dire contenue dans le plan de référence.

On peut donc calculer, dans le cas où la somme des énergies des électrons et photons Compton correspond à l'énergie  $E_\gamma$  d'un photon à étudier, un rapport  $\eta(E_\gamma)$  permettant d'établir le caractère électrique ou magnétique de la transition étudiée :

$$\eta = \frac{N_{vert} - N_{hor}}{N_{vert} + N_{hor}}$$

avec

$N_{hor}$  le nombre d'effets Compton donnant lieu à un photon secondaire "horizontal",

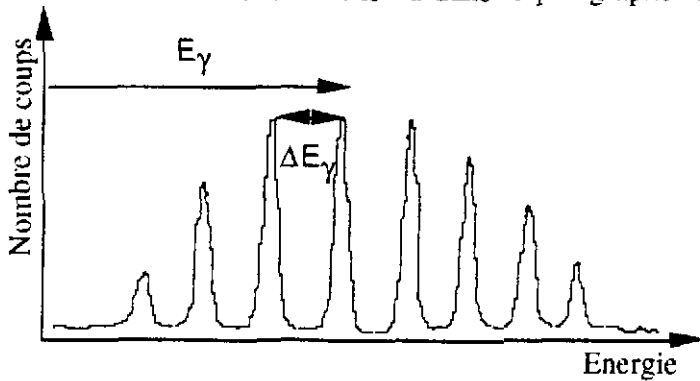
$N_{vert}$  le nombre d'effets Compton donnant lieu à un photon secondaire "vertical".

Le détecteur "Clover" développé à Strasbourg pour EUROGAM II se prête tout à fait à ce type de mesures. Nous en verrons les caractéristiques à la fin de ce chapitre.

Sur la figure II.4 sont représentées les distributions angulaires correspondant à différentes transitions gamma couramment observées. En examinant cette figure on constate que plusieurs distributions angulaires peuvent avoir des formes similaires. On imagine donc bien que la seule mesure des distributions angulaires ne suffira pas à déterminer sans ambiguïté la multipolarité de la transition. Il faut donc associer à cette mesure soit une mesure de polarisation linéaire, soit une mesure de coefficients de conversion interne.

**II.4.5. Moment d'inertie dynamique  $\mathfrak{I}^{(2)}$  :**

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe I.5.2, on peut associer un moment d'inertie dynamique  $\mathfrak{I}^{(2)}$  à une structure en rotation.



$$\mathfrak{I}^{(2)} = \frac{4}{\Delta E_\gamma}$$

On trace en général cette quantité en fonction de la fréquence de rotation  $\hbar\omega$  :

$$\hbar\omega = \frac{E_\gamma}{2}$$

Figure II.6 : Vue schématique d'un spectre d'une structure collective.

Si le moment d'inertie dynamique  $\mathfrak{I}^{(2)}$  est constant quelle que soit la fréquence de rotation, le système se comporte comme un **rotor rigide**. Dans le cas contraire, on met en évidence une **variation de l'inertie** du système considéré, qui peut être due tant à des nucléons individuels qu'à des changements dans la collectivité. On dispose ainsi d'une sonde extrêmement sensible, qui sera un outil très utile dans la comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques.

**II.4.6. Vitesse du noyau :**

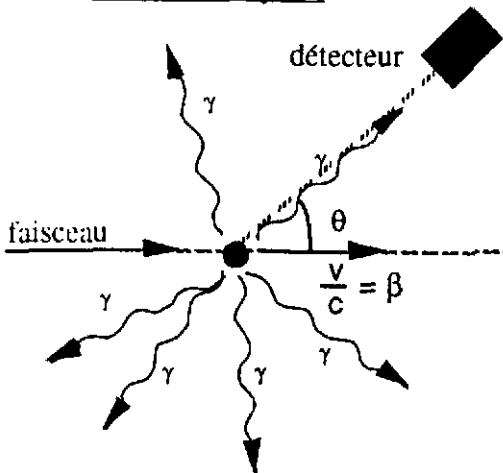


Figure II.7 : Vue schématique d'un détecteur placé à un angle  $\theta$  par rapport à l'axe du faisceau.

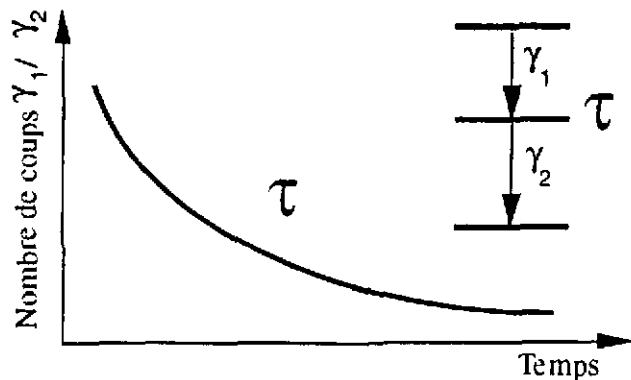
Lors de l'émission des photons le noyau se déplace à une vitesse  $V$  dans le laboratoire. Du fait de l'**effet Doppler**, les énergies mesurées sont décalées par rapport aux énergies vraies d'une valeur

$$\Delta E_\gamma(\theta, E_\gamma) = E_\gamma \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos(\theta)$$

En utilisant des détecteurs placés à différents angles par rapport à l'axe du faisceau on peut aisément déduire la valeur de l'énergie vraie  $E_\gamma$ , ainsi que la valeur de la vitesse du noyau. Cette dernière information nous servira pour la mesure des moments quadrupolaires électriques.

**II.4.7. Temps de vie :**

Pour les états quantiques ayant un **temps de vie  $\tau$  relativement long**<sup>1</sup>, si on construit le spectre dans lequel on reporte le nombre de coups en fonction du temps entre l'émission du photon alimentant l'état et celle du photon issu de l'état considéré. On en déduit ainsi le temps de vie  $\tau$  de l'état.



<sup>1</sup>L'utilisation de cette méthode requiert un temps de vie  $\tau$  supérieur à 10 ns si on utilise des détecteurs Ge (comme c'est le cas avec EURO GAM). Pour mesurer des temps plus courts à l'aide de cette méthode on préférera des détecteurs plus rapides tels que le BaF<sub>2</sub> ou des plastiques.

Pour les temps de vie plus courts on doit faire appel à d'autres méthodes :

**\* Temps de vie très courts : Méthode de l'Atténuation du Décalage Doppler (DSAM)**

Pour cette technique, on utilise une cible déposée sur un support épais. Ainsi, tout en émettant les rayons gamma de désexcitation, le noyau formé par la réaction perd de la vitesse dans le support et finit par s'arrêter. Or, comme nous l'avons vu plus haut l'effet Doppler nous donne accès à la vitesse moyenne au moment de l'émission du photon. On peut donc déterminer les temps de vie des niveaux quantiques empruntés par le noyau lors de la cascade de désexcitation.

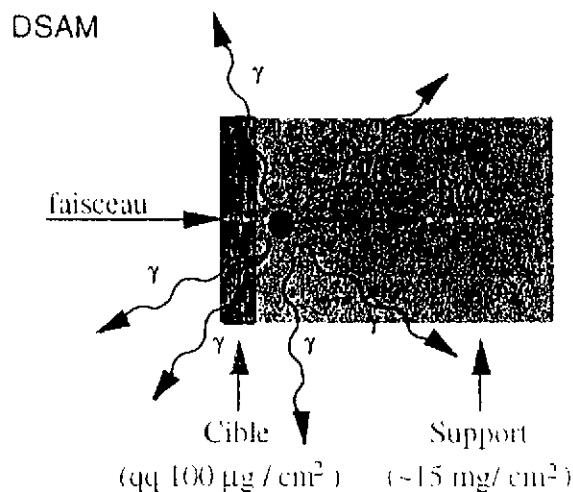


Figure II.8 : Vue schématique de la cible déposée sur un support épais utilisée pour les expériences de DSAM.

Cette méthode demande un certain nombre d'hypothèses sur la durée de vie des états alimentant la cascade de transitions étudiée ainsi qu'une bonne connaissance des pouvoirs d'arrêts électroniques. C'est ce dernier point qui constitue la plus grande source d'incertitudes.

**\* Temps de vie plus longs : Méthode du Plunger<sup>2</sup> (RDM).**

Pour cette technique on utilise également un support épais, mais cette fois-ci la cible est auto supportée et placée à une distance  $d$  variable devant le support. Ainsi, le noyau formé par la réaction commencera à émettre ces rayons gamma de désexcitation en vol et finira sa désexcitation en ralentissant dans le support.

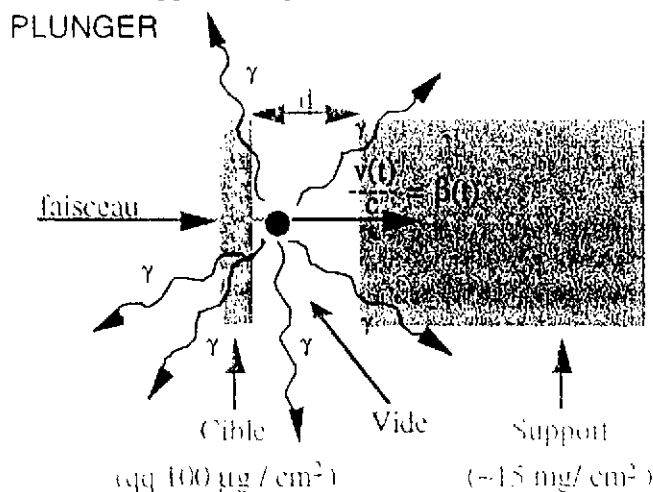


Figure II.9 : Vue schématique de la cible utilisée pour les expériences de RDM. On y voit le stoppeur placé à une distance  $d$  de la cible (support épais)

Une fraction des désexcitations se fait donc dans le vide (pleine vitesse) et le reste dans le support (vitesse réduite). Les raies gamma concernées présentent donc deux composantes : une correspondant à la pleine vitesse et l'autre à une vitesse plus faible.

L'analyse des rapports de ces composantes, pour différentes valeurs de la distance de vol  $d$ , donne accès au temps de vie de l'état considéré.

**II.4.8. Moment quadrupolaire électrique :**

Le temps de vie d'un état est lié aux probabilités de transition électromagnétique  $B(E1, E2, \dots, M1, M2, \dots)$ . Dans le cadre d'un modèle rotationnel<sup>3</sup>, la probabilité de transition dipolaire

<sup>2</sup>Piston.

<sup>3</sup>Ce modèle ne s'applique qu'à des structures déformées en rotation rigide c'est à dire dont la déformation ne varie pas trop. Des transitions E2 existent dans des noyaux sphériques, mais alors les valeurs des probabilités de transition  $B(E2)$  ne s'expriment pas de cette manière.

magnétique  $B(M1)$  est une fonction de la projection du moment angulaire sur l'axe de symétrie du noyau et la probabilité de transition quadrupolaire électrique  $B(E2)$  est une fonction de la distribution de charge du noyau dans l'état considéré [Mo76]:

$$B(M1 : I_i \rightarrow I_f) = \frac{3}{4\pi} (g_K - g_R)^2 K^2 \langle I_i K 1 0 | I_f K \rangle^2$$

$$B(E2 : I_i \rightarrow I_f) = \frac{5}{16\pi} e^2 Q_i^2 \langle I_i 2 K 0 | I_f K \rangle^2$$

On peut donc déduire, de la valeur des temps de vie, celle du moment quadrupolaire électrique du noyau.

On peut, pour illustrer cela, examiner les résultats obtenus dans le cas de la bande superdéformée yrast de  $^{192}\text{Hg}$  pour laquelle les deux types de mesures ont été réalisées à l'aide d'EUROGAM. On voit sur la figure II.10 à gauche les spectres issus d'une expérience du type DSAM [Wi94]. Sont présentés les spectres des détecteurs à  $90^\circ$  dont les énergies ne sont pas affectées par l'effet Doppler et ceux des détecteurs à  $134^\circ$  pour lesquels les pics à haute énergie sont décalés. On constate que le décalage est d'autant plus grand que l'énergie est grande et donc que l'on se trouve haut dans la bande de rotation.

Sur la figure de gauche sont reportés les spectres à  $134^\circ$  issus d'une expérience du type Plunger [Wi94] correspondant à diverses valeurs de la distance de vol (25, 40, 60 et 131  $\mu\text{m}$ ). On observe nettement sur la raie à 257,6 keV le passage d'une composante à l'arrêt majoritaire pour  $d = 40 \mu\text{m}$  à une composante en vol dominante pour  $d = 131 \mu\text{m}$ .

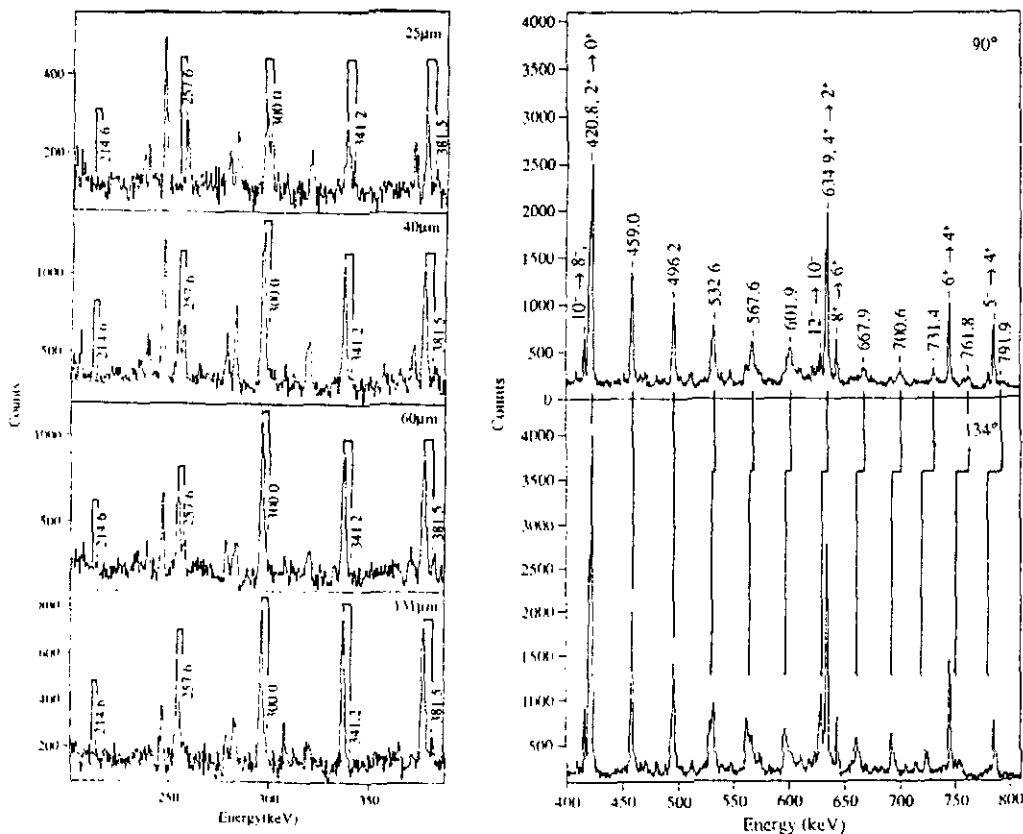


Figure II.10 : A Gauche, spectres à  $134^\circ$  issus d'une expérience du type Plunger correspondant à diverses valeurs de la distance de vol (25, 40, 60 et 131  $\mu\text{m}$ ) [Wi94]. A droite, spectres issus d'une expérience du type DSAM.

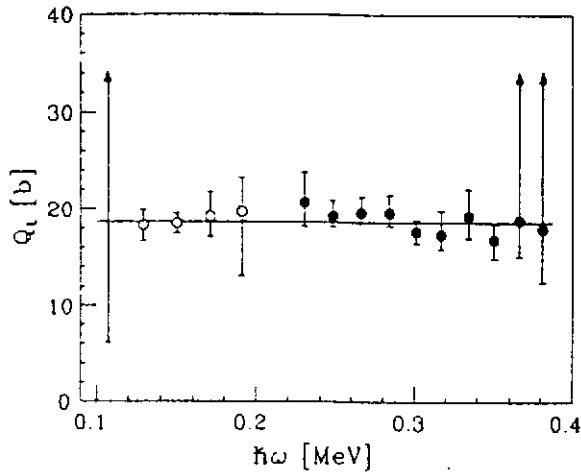


Figure II.11 : Évolution en fonction de la fréquence de rotation du moment quadrupolaire des transitions de la bande SD de  $^{192}\text{Hg}$  [Wi94].

Ces deux expériences étant complémentaires il a été possible d'extraire une valeur du moment quadrupolaire pour presque toutes les transitions de la bande superdéformée étudiée [Wi94]. On constate que la déformation du noyau reste constante sur une grande plage de fréquence et ce jusqu'aux fréquences les plus basses observées. Ceci a été interprété comme une signature de la persistance du puits superdéformé jusqu'aux fréquences les plus basses observées dans cette bande. Ceci suggère donc une désexcitation de ces états par **effet tunnel**.

Les barres d'erreurs étant grandes, du fait d'une incertitude de l'ordre de 10% sur les pouvoirs d'arrêt, il serait hasardeux de tirer d'autres conclusions de ce type d'expériences. Par contre, lorsqu'on compare des résultats de noyaux voisins obtenus dans des conditions de production et d'arrêt similaires, on peut, malgré cette grande incertitude, obtenir, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, des informations concernant les variations relatives de déformation.

#### II.4.9. Propriétés magnétiques nucléaires :

Dans le cas de noyaux impairs, le nucléon célibataire peut être placé dans différentes orbitales. L'occupation de deux structures partenaires de signature<sup>4</sup> permet d'observer, outre les transitions quadrupolaires électriques ( $B(E2) \approx 2000 \text{ uW}$ ) entre les différents états d'une des structures concernées, des transitions dipolaires magnétiques ( $B(M1) \approx 0,5 \text{ uW}$ ) entre ces deux structures<sup>5</sup>.

Comme nous l'avons vu, la mesure de rapports d'embranchements entre transitions E2 et M1 donne accès, via un modèle collectif [Mo76] au **facteur gyromagnétique  $g_k$** . Pour un nucléon célibataire traité dans le cadre du modèle du couplage fort, on peut en plus extraire de ces mesures la valeur de la projection  $\Omega$  sur l'axe de quantification du moment angulaire total de l'orbitale occupée. Dans le cas d'un neutron célibataire on obtient [Jo93 et Se92]:

$$B(M1) \approx 0,021(\Omega + 3,69)^2 \mu_N^2$$

On dispose ainsi d'un outil puissant pour déterminer avec précision les types d'**orbitales au voisinage du niveau de Fermi**. Cette méthode ne s'applique malheureusement pas dans tous les

<sup>4</sup>Les noyaux SD présentent une symétrie par rotation d'un angle  $\pi$  autour de l'axe z, perpendiculaire à leur "axe de déformation" (axe x). Nous pouvons donc associer à cette symétrie d'ordre 2 un nombre quantique, la signature :

$$e^{i\pi(j_i - 1/2)} \varphi_i(x, y, z, \sigma) = \sigma \varphi_i(-x, -y, z, \sigma) = \alpha_i \varphi_i(x, y, z, \sigma), \quad \alpha_i = \pm 1$$

De ce fait les bandes SD se regroupent par "partenaires" de signature qui seront dégénérés en énergie tant que l'on ne brise pas l'invariance par renversement du sens du temps.

<sup>5</sup>Les transitions reliant les deux bandes partenaires de signature peuvent en fait être du type M1 ou E2. D'autres types de mesures ont précisé le caractère dipolaire magnétique (M1) de ces transitions.

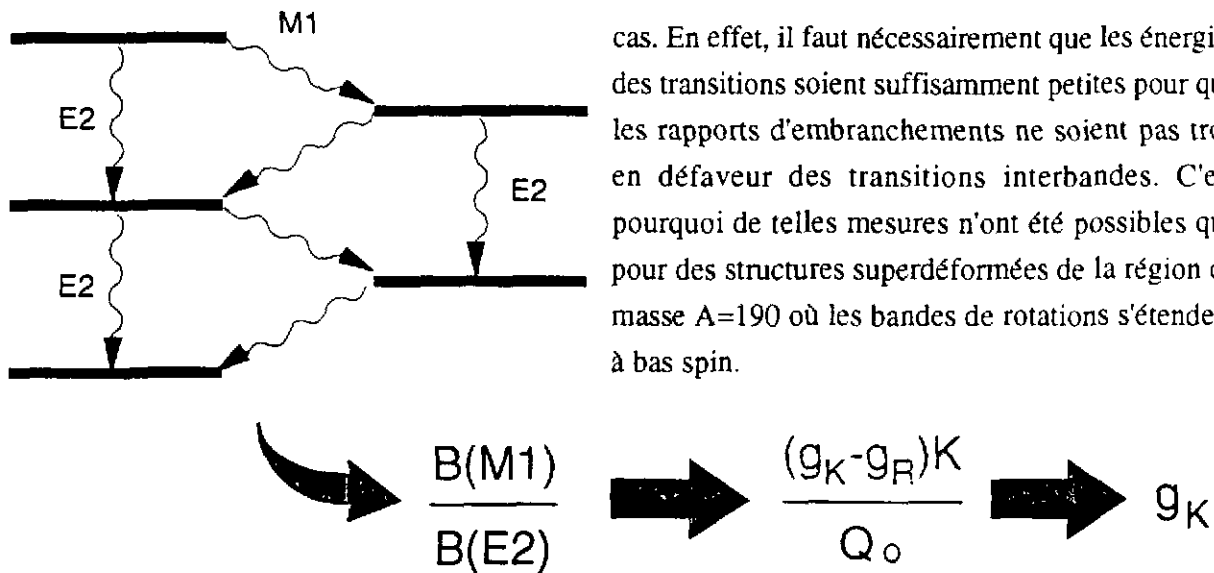


Figure 11.12 : Représentation schématique des transitions de E2 de deux bandes SD partenaires de signature ainsi que des transitions M1 reliant les deux bandes (observables que si l'énergie des transitions sont suffisamment faibles).

## 11.5. Multidétecteurs : de EUROGAM à EUROBALL.

### 11.5.1. Motivation et choix techniques :

La section efficace de production de noyaux superdéformés est extrêmement faible. De plus, lorsqu'on désire étudier des transitions correspondant à des états superdéformés, on doit sélectionner ces événements parmi un grand nombre de photons. On va donc être amené à sélectionner des événements de grande **multiplicité**. Il faut pour cela pouvoir accéder à des événements de grand **fold**, d'où la nécessité de la construction de multidétecteurs. Ces multidétecteurs doivent satisfaire un cahier de charges bien précis :

- \* **Grande précision de la mesure de l'énergie**
- \* **Suppression de l'effet Compton**
- \* **Grande efficacité de détection**
- \* **Forte granularité**

Pour cela il a été choisi d'utiliser des **matériaux semi-conducteurs** (détecteurs au germanium hyper pur), pour construire des **détecteurs de gros volume** (70% d'efficacité<sup>6</sup>) en **grand nombre** de manière à obtenir la forte granularité nécessaire à la sélection des **cascades de grande multiplicité**.

### 11.5.2. Système anti-Compton :

Cherchant à mesurer des énergies gamma correspondant à des effets peu intenses, on a tout intérêt à disposer d'un système de détection générant un fond très faible. Comme on cherche à étudier des coïncidences d'ordre élevé, il faut minimiser également l'influence des coïncidences de type pic-fond. Les détecteurs ont donc tous été associés à des **systèmes Anti-Compton (AC)** qui permettent de satisfaire en même temps ces deux conditions. Les systèmes AC d'EUROGAM sont

<sup>6</sup>Par rapport à un détecteur NaI de 3"×3" placé à 25 cm de la source.



constitués de cristaux de BGO collimatés avec des blocs de Tungstène de manière à ne pas être soumis au rayonnements issus de la cible. Le fonctionnement d'un tel système est schématisé ci-dessous (est représenté le détecteur entouré de son système AC collimaté) :

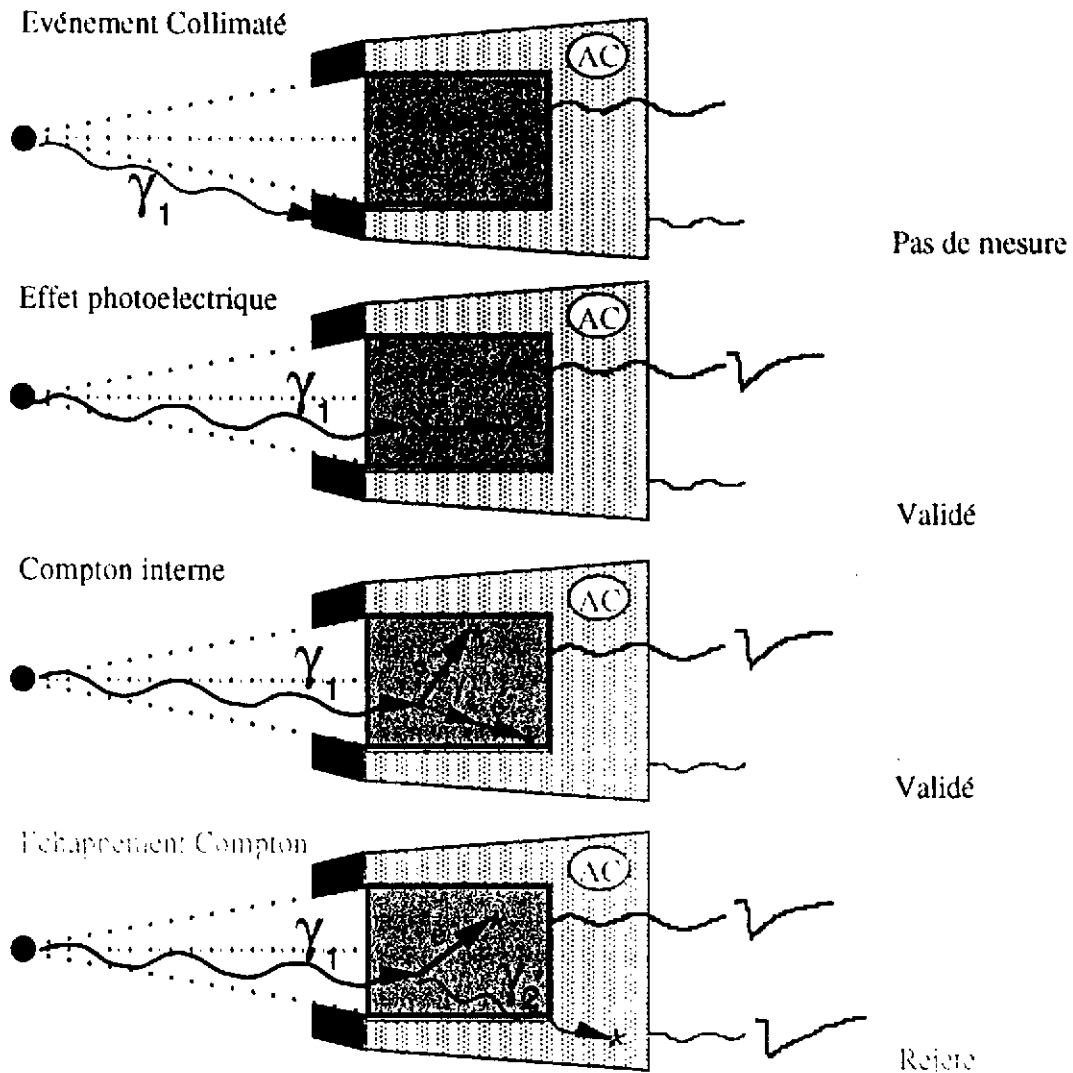


Figure II.13 : Représentation schématique du fonctionnement d'un système anti-Compton (AC). Sur le premier graphe le photon heurte le collimateur : il ne conduira pas à une mesure. Dans le deuxième cas il entraîne un effet photoélectrique dans le cristal de Ge du détecteur : son énergie sera mesurée. Dans le troisième cas il donne lieu à un effet Compton sans que le photon Compton ne s'échappe : on mesure l'énergie du photon incident. Dans le dernier cas il donne lieu à un effet Compton avec échappement du photon Compton qui est détecté par le système AC : le signal issu du Ge est rejeté.

### II.5.3. Développements électroniques :

Un système mettant en jeu un grand nombre de détecteurs peut difficilement être géré par de l'électronique NIM standard. Il a donc fallu développer conjointement au multidétecteur une électronique intégrée qui lui est propre. Un nouveau standard électronique (VXI) a été développé à cet effet, ainsi que les cartes permettant de traiter les informations des germanium (Ge) et des systèmes anti-Compton (BGO). Le schéma synoptique de l'électronique liée à un détecteur Ge (muni de son système AC), ainsi que le chronogramme correspondant, sont reportés sur la page suivante [La90 et Ka96]. On constatera que l'on dispose de deux codeurs (ADC) pour les signaux Ge (codant sur 8192 canaux) : l'un pour la dynamique 4 MeV et l'autre pour celle de 20 MeV.

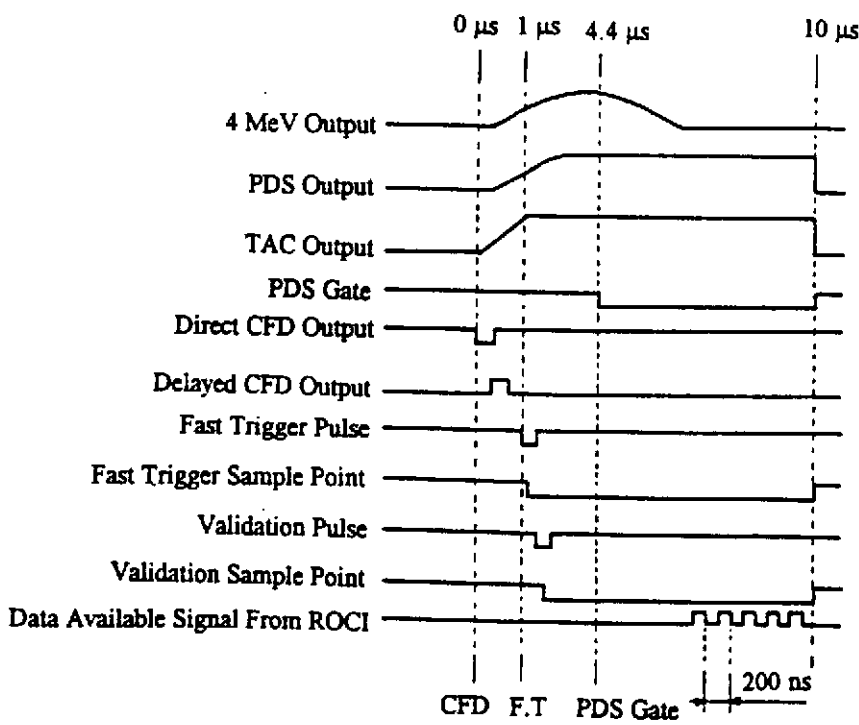
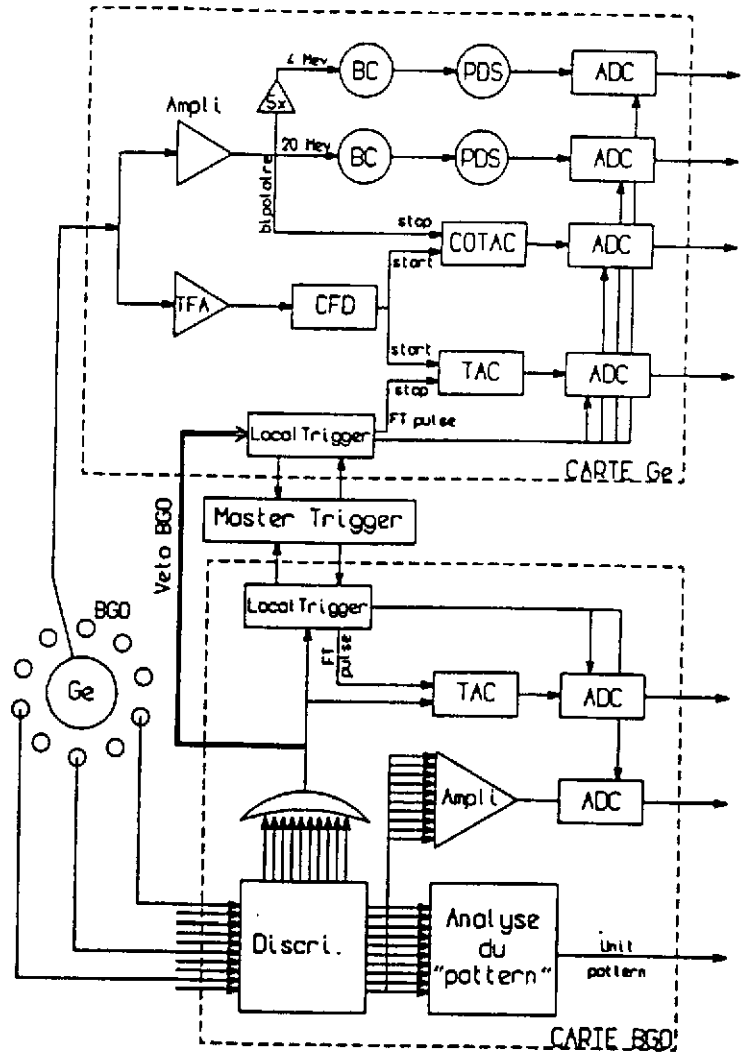
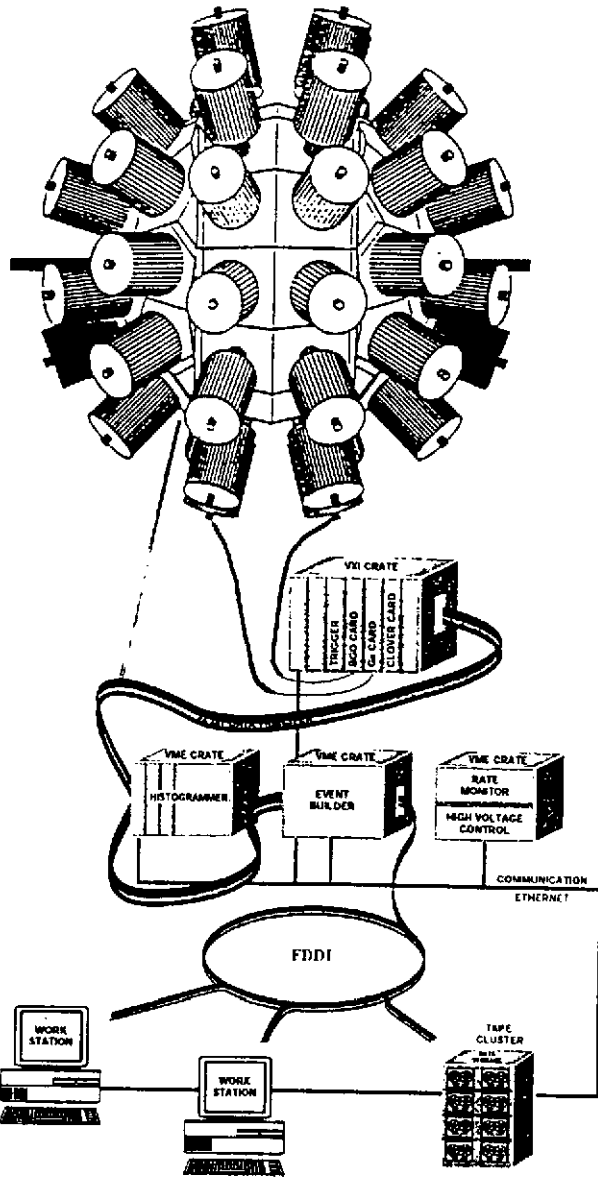


Figure II.14 : Schémas synoptiques de l'électronique liée à un détecteur Ge (muni de son système AC), et chronogramme correspondant [La90 et Ka96].

### II.5.4. Détecteurs tronconiques, EUROGAM I :

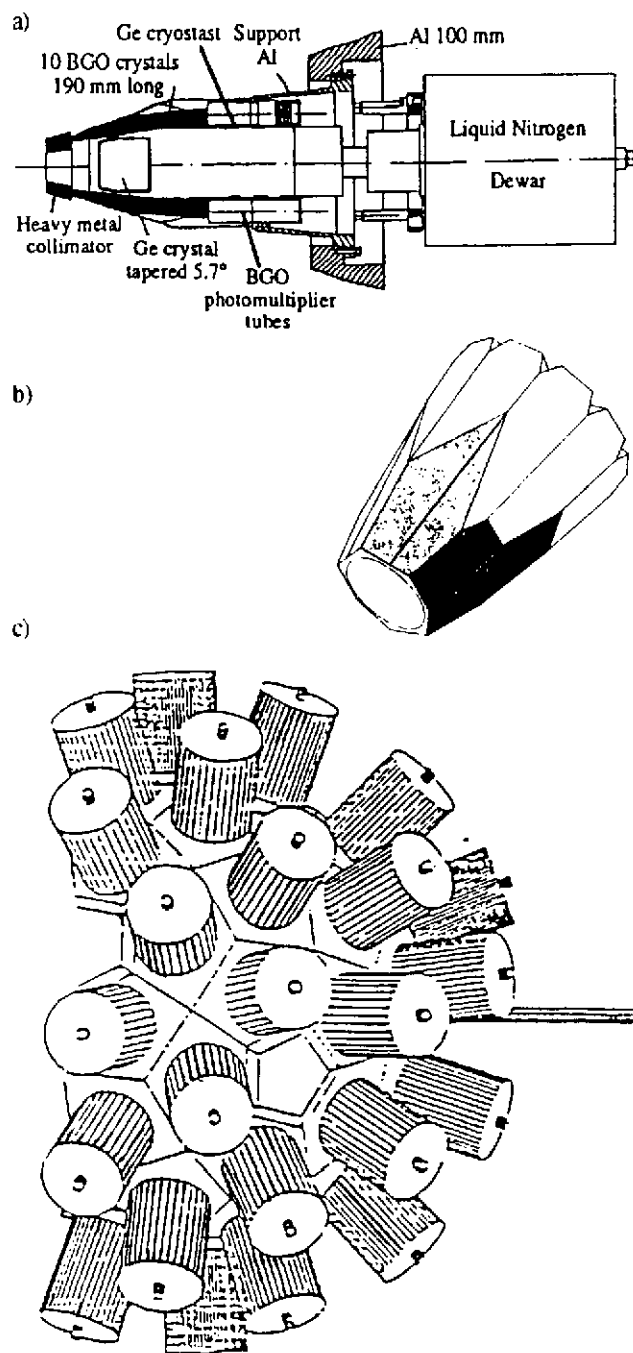


Figure II.15 : a) Schéma d'un détecteur tronconique des la phase I muni de son système anti-Compton (AC) [A192]. b) Géométrie des cristaux BGO du système AC [No90]. c) Vue d'ensemble d'EUROGAM I [Ha91].

### II.5.5. Détecteurs trèfles, EUROGAM II :

Le principal problème du choix de la géométrie de la phase I d'EUROGAM concernait l'élargissement Doppler des raies gamma détectées au voisinage de  $90^\circ$ . En effet, puisque le décalage Doppler dépend de l'angle  $\theta$ , l'ouverture angulaire  $\delta\theta$  du détecteur donne lieu à un

Le détecteur EUROGAM I est le fruit d'une Collaboration Franco-Anglaise. Il a été installé auprès du tandem de Daresbury et a fonctionné dans sa version complète d'octobre 1992 à avril 1993. Il était composé de **45 détecteurs Germanium tronconiques Hyper pur de gros volume** d'une efficacité moyenne<sup>7</sup> de **72%** placés à **20,5 cm** de la cible. Le rapport pic sur total (**P/T**) obtenu avec le système AC est de **0,57**. Chaque détecteur couvrant un angle solide  $\omega$  de **0.0053 sr**, on arrive à une couverture angulaire totale (Ge) de **23%** de  $4\pi$ . L'efficacité totale correspondante est de **3.8%** à **1,33 MeV** ( $\epsilon_{\text{effectif}} = 1,6\%$  si on tient compte de l'effet d'empilement de photons dans le détecteur et des faux veto AC dus aux neutrons de la réaction pour un événement de multiplicité  $M_\gamma=30$ ) [Du97].

Ce détecteur a nécessité le développement de cartes intégrées VXI traitant les signaux issus de 6 Ge différents, de cartes BGO traitant les signaux des 10 cristaux de BGO de l'anti-Compton de chaque Ge. Dans la plupart des expériences EUROGAM I a fonctionné seul. Mais il a également été couplé à plusieurs détecteurs auxiliaires (par exemple, le Spectromètre de Masse en Recul **RMS**, le détecteur à gaz **PPAC** et le détecteur à particules chargées **DIAMANT**).

<sup>7</sup>Par rapport à un détecteur NaI de 3"\*3" placé à 25 cm de la source.

"élargissement Doppler" des pics mesurés :  $\delta\Delta E_\gamma(\theta, E_\gamma) = E_\gamma \cdot \frac{v}{c} \cdot \sin(\theta) \cdot \delta\theta$ . Cet effet est maximum

pour un détecteur situé près de  $\theta = 90^\circ$ .

Pour éviter ce désagrément il suffit de placer au voisinage de  $\theta=90^\circ$  des détecteurs d'ouverture angulaire plus petite. Un nouveau détecteur a donc été développé : le **détecteur trèfle** (clover) composé de **4 cristaux Germanium hyper pur** ( $\epsilon=21,3\%^8$ ) placés dans le même cryostat ayant un système anti-Compton commun. Le rapport pic sur total (P/T) ainsi obtenu est de **0,55**.

Lorsque à la suite d'un effet Compton un photon diffuse d'un pétale à l'autre du détecteur **clover**, on associe à l'énergie gamma (somme des énergies mesurées dans les 2 cristaux), l'angle de l'interface entre les 2 pétails touchés. En effet la probabilité d'avoir ce type de diffusion est d'autant plus forte que le photon incident est arrivé près de cette interface. Ce système de **sommation** conduit à une **efficacité totale**  $\epsilon$  (pétales seuls plus 2 pétails) de **129%**<sup>8</sup> tout en préservant un faible élargissement Doppler.

Les détecteurs clover ont donc une **grande granularité**, une **grand angle solide** ( $\omega=0,0093$  sr à 23 cm de la cible), une **grande efficacité**, un bon rapport pic sur total et permettent en plus la **mesure de la polarisation linéaire** des photons.

Le détecteur **EUROGAM II** a été opérationnel auprès du VIVITRON de Strasbourg de septembre 1994 à octobre 1996. Il était composé de **30 détecteurs Germanium Hyper pur de gros volume** ( $\epsilon=72\%^8$ ) et de **24 détecteurs CLOVER** ( $\epsilon=129\%^8$ ). EUROGAM II était donc composé de 126 cristaux Ge individuels.

EUROGAM II avait une couverture angulaire totale (Ge) de **38%** de  $4\pi$  et une efficacité totale correspondante de **7,35%** à 1,33 MeV ( $\epsilon_{\text{effectif}} = 4,1\%$  si on tient compte de l'effet d'empilement de photons dans le détecteur et des

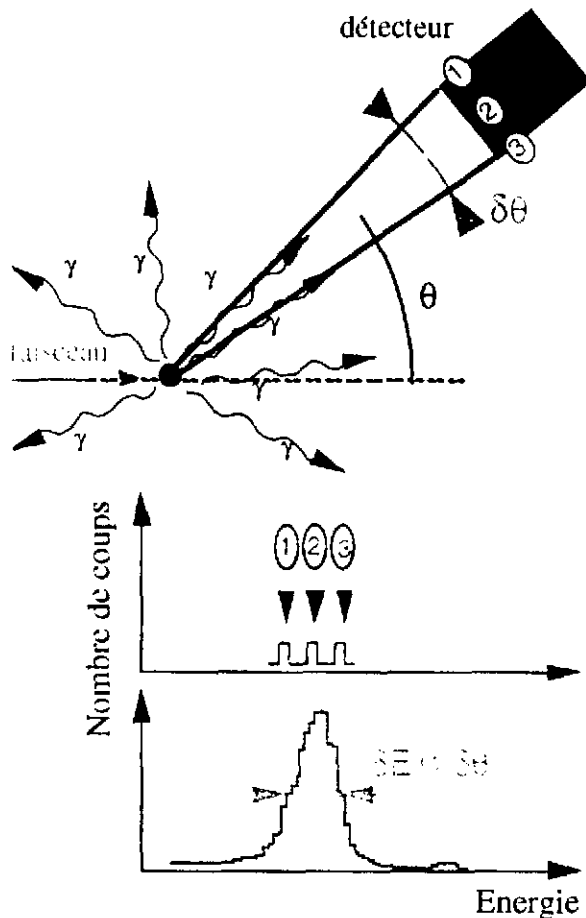


Figure II.16 : Élargissement Doppler dans un détecteur.

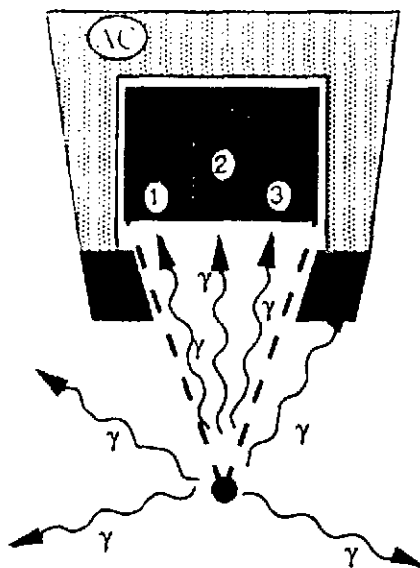


Figure II.17 : Vue schématique du fonctionnement d'un détecteur Trèfle dans son enceinte AC.

<sup>8</sup>Par rapport à un détecteur NaI de 3"×3" placé à 25 cm de la source.

faux veto AC dus aux neutrons de la réaction pour une événement de multiplicité  $M_{\gamma}=30$ ) [Du97]. De plus sa symétrie avant/arrière facilitait les mesures de moments quadrupolaires électriques effectuées par la méthode DSAM.

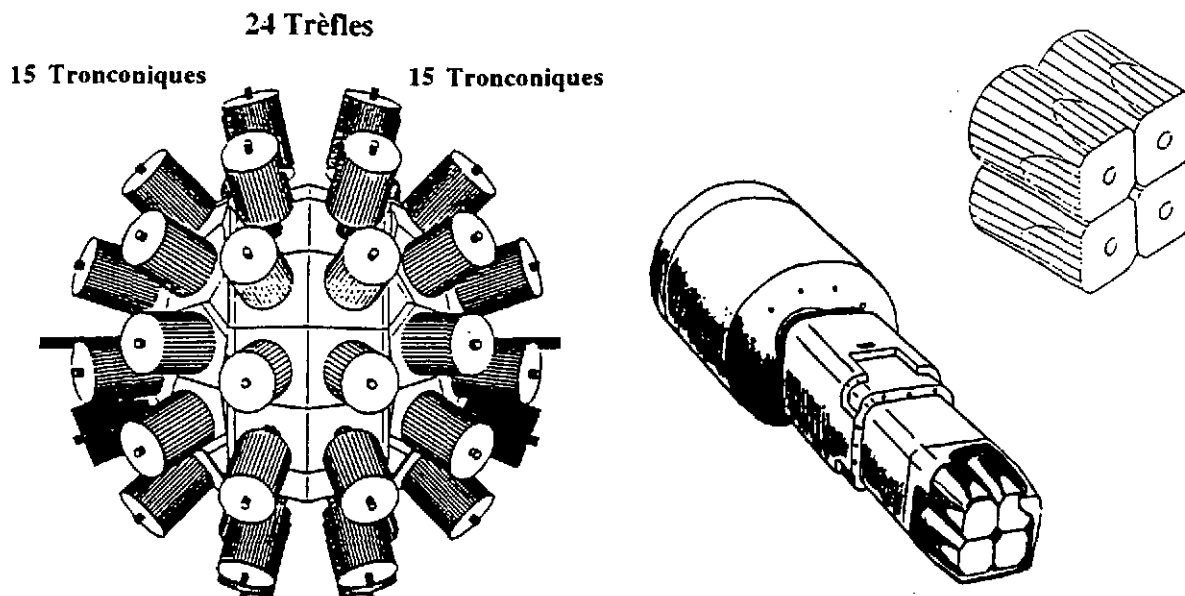


Figure II.18 : Vue d'ensemble du détecteur EUROGAM II [Be92]. On y situe les deux calottes de détecteurs tronconiques ainsi que les deux couronnes de détecteurs Trèfle. Vue stylisée d'un détecteur trèfle et détail des quatre cristaux composant le trèfle (à droite) [Ka96].

#### II.5.6. Détecteurs clusters. EUROBALL III :

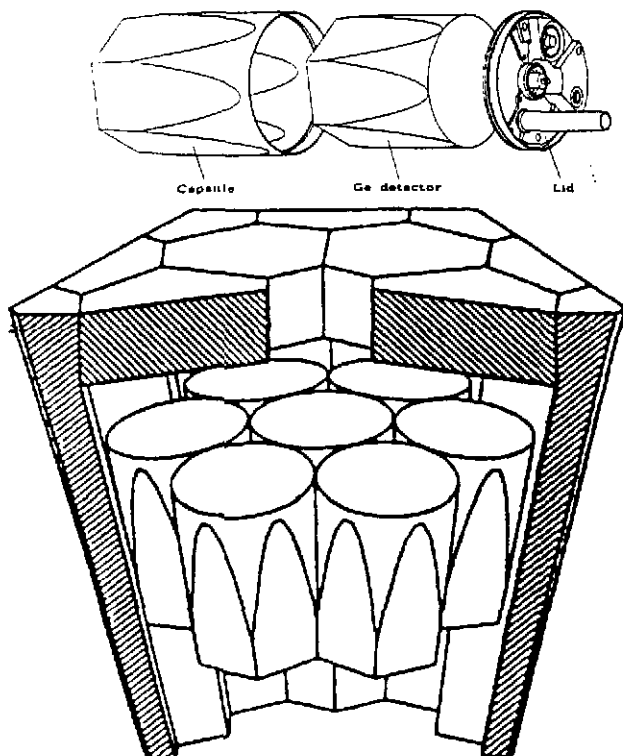


Figure II.19 : Vue d'ensemble du détecteur CLUSTER muni de son système AC [Be96].

Le détecteur EUROBALL III correspond à l'élargissement de la collaboration EUROGAM à l'Allemagne, l'Italie, le Danemark et la Suède. Il est installé auprès du tandem de Legnaro (I) et est opérationnel depuis mai 1997. A fin de l'année 1998 le multidétecteur sera démonté afin de passer à la phase EUROBALL IV auprès du VIVITRON de Strasbourg.

Les détecteurs Cluster ont été développés pour cette troisième phase du projet. Ils sont constitués de **7 cristaux Germanium hyper pur** de gros volume ( $\epsilon = 60\%<sup>9</sup>$ ) encapsulés individuellement, mais ayant un système anti-Compton commun. Ils présentent donc une **forte granularité**, un **grand angle solide** ( $\omega=0.0095$  sr à 44.5 cm de la cible), et surtout une **grande efficacité** ( $\epsilon=605\%<sup>9</sup>$ ). De plus comme ils sont situés plus loin de la cible, le phénomène de "pile up"<sup>10</sup> est réduit.

<sup>9</sup>Par rapport à un détecteur NaI de 3"×3" placé à 25 cm de la source.

<sup>10</sup>Arrivée de 2 photons dans le même détecteur au même moment conduisant à l'"empilement" des signaux correspondant aux deux photons.

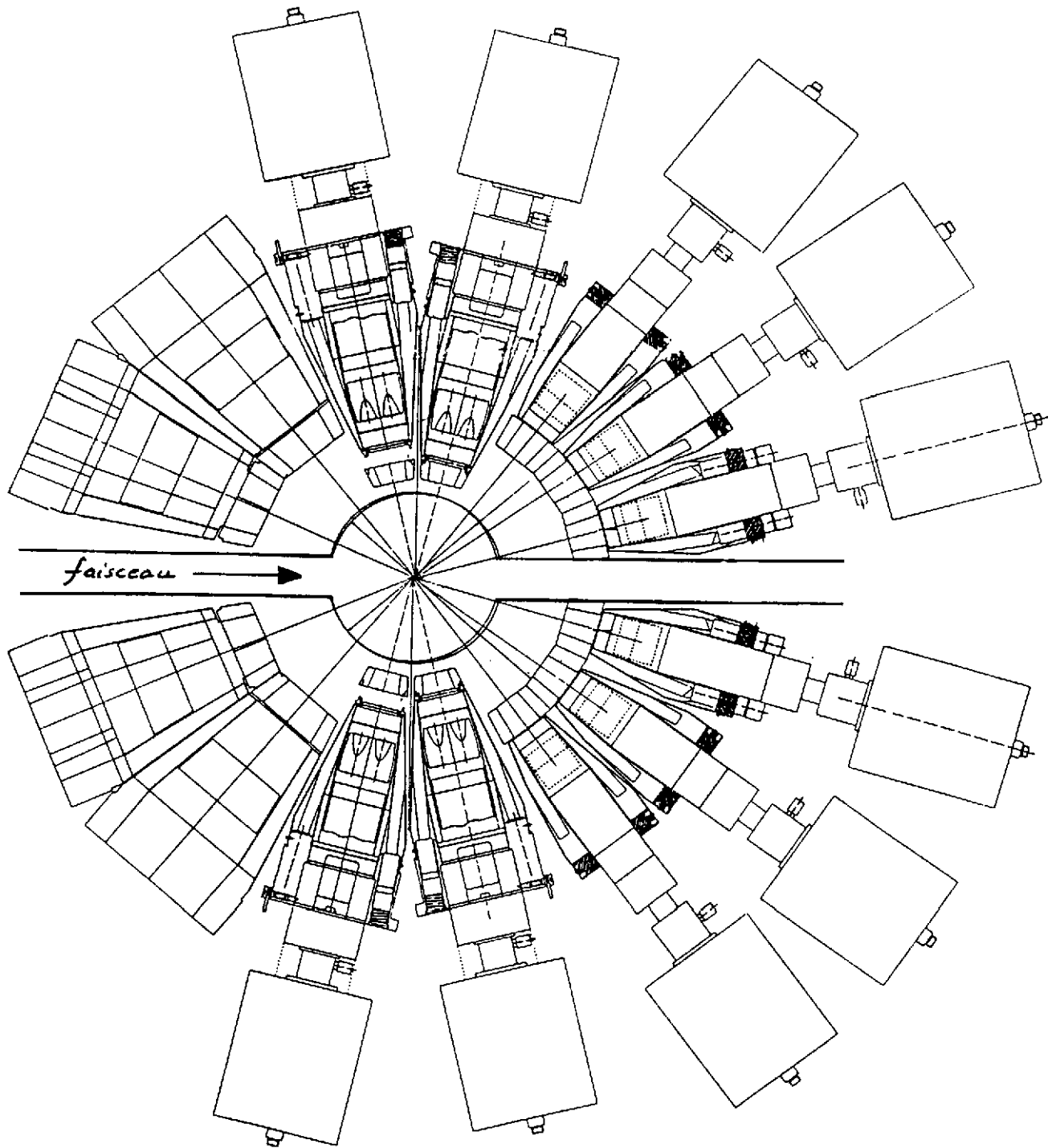


Figure II.20 : Vue en coupe du multidétecteur EUROBALL. On voit à gauche (coté faisceau) les 15 détecteurs CLUSTER, au centre, les 2 couronnes de 13 CLOVER et à droite les 30 détecteurs TRONCONIQUES [...].

EUROBALL III est composé de 30 détecteurs Germanium Hyper pur de gros volume ( $\epsilon=72\%^{11}$ ), de 26 détecteurs CLOVER ( $\epsilon=129\%^{11}$ ) et de 15 détecteurs CLUSTER ( $\epsilon=605\%^{11}$ ) soit 239 cristaux Ge individuels. EUROBALL III a une couverture angulaire totale (Ge) de 44% de  $4\pi$  et une efficacité totale correspondante est de 9,5% à 1,33 MeV ( $\epsilon_{\text{effectif}} = 7,0\%$  si on tient compte de l'effet d'empilement de photons dans le détecteur et des faux veto AC dus aux neutrons de la réaction pour une événement de multiplicité  $M_{\gamma}=30$ )(Du97).

<sup>11</sup>Par rapport à un détecteur NaI de 3"\*3" placé à 25 cm de la source.

## 11.6. Détecteurs additionnels.

On a vu dans le paragraphe II.2 qu'il est possible de gagner en sélectivité en imposant un nombre de conditions de coïncidences gamma de plus en plus élevé. Lorsqu'on utilise, en plus du multidétecteur gamma, un détecteur additionnel, l'information qu'il fournit, en coïncidence avec celle du multidétecteur gamma peut être utilisée de la même manière. On perd en statistique du fait de la combinaison de l'efficacité des deux systèmes, mais on gagne en sélectivité.

On peut ainsi mesurer l'émission de neutrons (Neutron Wall<sup>12</sup>) ou de particules chargées légères telles que les protons et particules alpha (DIAMANT<sup>13</sup>) ce qui permet de sélectionner une réaction donnée en fonction des particules évaporées. Les détecteurs d'ions lourds (SAPHIR<sup>14</sup>, PPAC<sup>15</sup>) seront mieux adaptés pour la fission et les détecteurs de recul (RMS<sup>16</sup> utilisé à Daresbury avec EUROGAM I, RFD<sup>17</sup> utilisé avec EUROGAM II et EUROBALL) permettent de sélectionner un noyau de recul créé par la réaction. Suivant les expériences, ces détecteurs peuvent être associés pour une étude exhaustive des différentes réactions.

L'élargissement de la collaboration EUROBALL a donc conduit tout naturellement à une ouverture encore plus grande vers des associations de techniques, soit pour mesurer des grandeurs qui étaient jusque là inaccessibles, soit pour filtrer les événements de manière à ne laisser passer que l'information gamma du phénomène rare recherché.

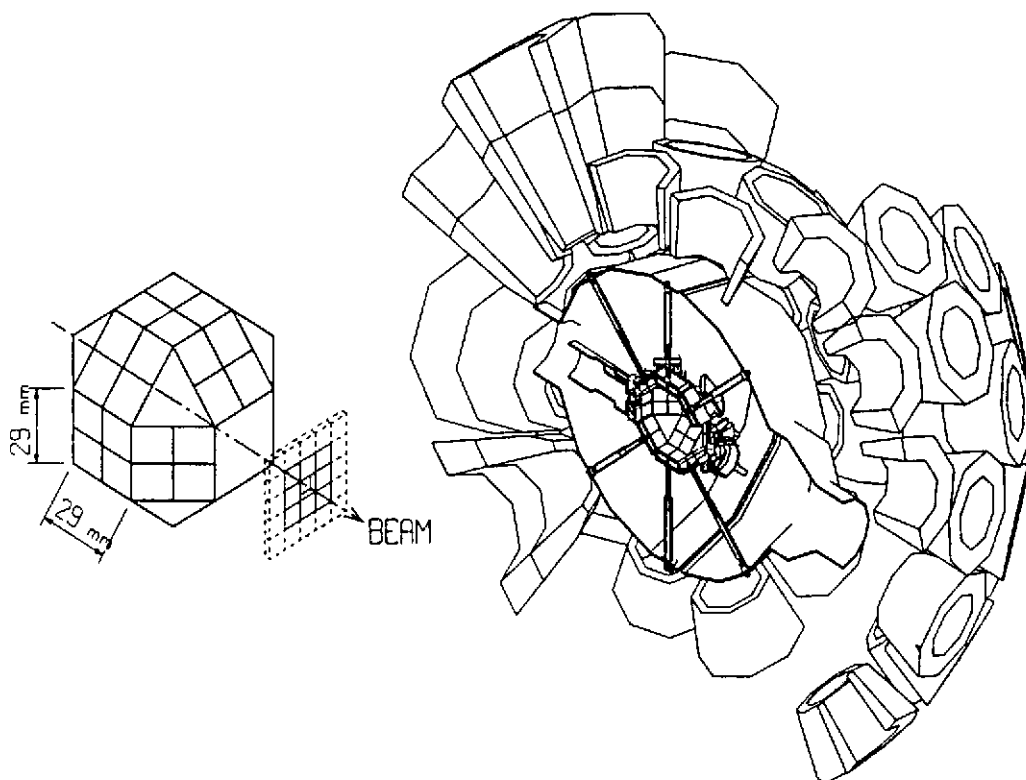


Figure II.21 : Vue éclatée de DIAMANT (80 CsI) et son insertion dans EUROBALL [Sc97].

<sup>12</sup>DEMON : Détecteur modulaire de neutrons [Bi91].

<sup>13</sup>DIAMANT : Détecteur composé de cristaux CsI destiné à la mesure de particules légères chargées (d,t,p, $\alpha$ ) [Sc97].

<sup>14</sup>SAPHIR : Détecteur composé de cellules photovoltaïques destiné à la détection d'ions lourds [Ga97].

<sup>15</sup>PPAC : Détecteur à gaz de géométrie planaire. Destiné à détecter les ions lourds [Wu95 et Cr95a].

<sup>16</sup>RMS : Spectromètre de recul de DARESBUURY. Destiné à détecter les ions lourds en recul.

<sup>17</sup>RFD : Filtre de recul. Destinée à détecter les ions lourds en recul [Sp95].

### II.6.1. Un exemple avec Diamant :

Le multidétecteur DIAMANT (figure II.21) est constitué de 80 détecteurs CsI(Tl) de 3 mm d'épaisseur optiquement couplés, via un guide de lumière, à une diode PIN. Il présente donc une grande granularité, une grande efficacité de détection de particules chargées (angle solide  $\approx 4\pi$ ) et une faible absorption des rayonnements gamma. Du fait de son faible encombrement, il rentre aisément dans une chambre de réaction comme celle d'EUROBALL.

L'électronique de traitement du signal [Ai97a] permet d'obtenir, événement par événement, l'énergie, le temps de coïncidence et l'identification de la particule (p,d, $\alpha$ ). La partie gauche de la figure II.22 illustre la sélectivité de DIAMANT en coïncidence avec EUROGAM II dans la réaction de fusion-évaporation de  $^{32}\text{S} + ^{58}\text{Ni}$  à 120 MeV. Le spectre du haut est obtenu en imposant au trigger de l'acquisition qu'un détecteur CsI au moins ait déclenché. Le spectre du bas a été obtenu, sans soustraction de bruit de fond, en imposant dans l'analyse la détection en coïncidence de deux particules alpha. On observe clairement, sur ce spectre, les transitions gamma associées à la voie 2 alpha correspondant à 2 % de la voie de réaction.

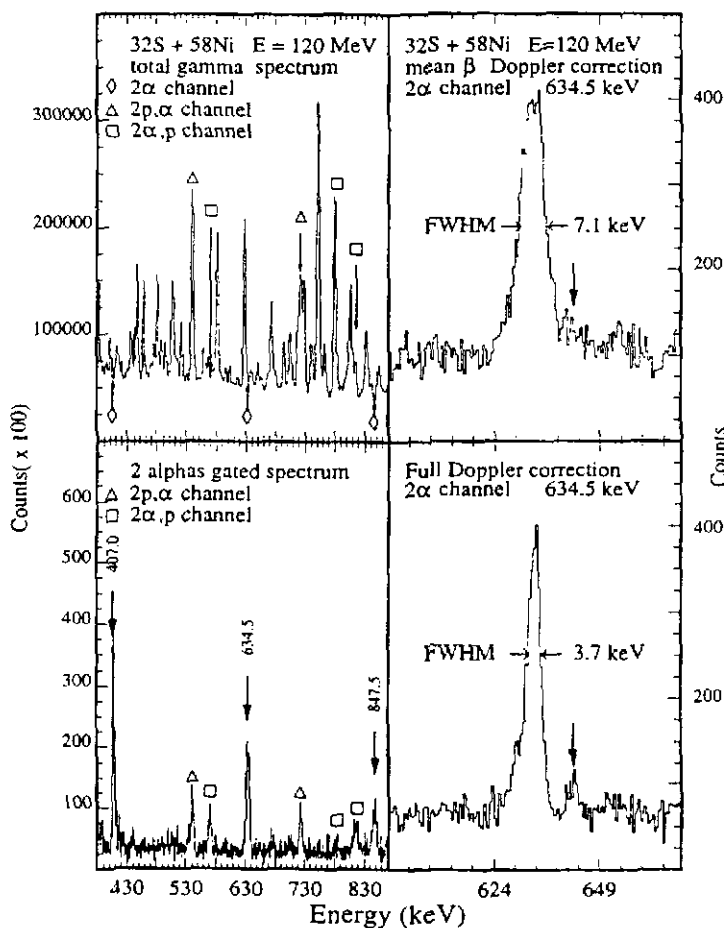


Figure II.22 : Spectres gamma sans soustraction de fond illustrant, à gauche, la sélectivité d'une voie de réaction, à droite le gain en résolution obtenu grâce à la correction Doppler [Ai97b].

Les détecteurs CsI sont disposés suivant des anneaux autour de la cible et la granularité de DIAMANT est plus importante à l'avant afin de tenir compte des effets de cinématique. On peut ainsi obtenir des informations précieuses pour déterminer la direction de recul du noyau et effectuer une correction Doppler des informations gamma. On améliore ainsi la résolution du multidétecteur gamma associé à DIAMANT [Ai97b]. On observe, sur la partie droite de la figure II.22, une amélioration d'un facteur 2 de la résolution entre le spectre gamma brut de la voie 2 alpha et le spectre gamma corrigé. Cette effet a pour conséquence directe la possibilité d'observer une nouvelle raie gamma de faible intensité à 643 keV.





A	$\hbar\omega_{\min}$	$\hbar\omega_{\max}$	$c/a$
60	400	1600	1,7
80	700	1300	1,8
130	400	1100	1,5
150	300	1000	2
190	40	900	1,7

En observant les domaines de fréquences de rotations correspondant à chaque région de masse, on peut séparer les bandes SD en deux groupes. Le premier est composé de la région de masse  $A \approx 190$  et des isomères de fission pour lesquels le puits superdéformé existe jusqu'aux plus bas spins. On s'attend bien évidemment à ce que la barrière de fission

disparaisse à grande vitesse de rotation. Cet effet est observé à bas spin dans la région de masse  $A \approx 240$  et à des spins de l'ordre de  $50 \hbar$  dans la région de masse  $A \approx 190$  comme nous le verrons plus tard.

Le deuxième groupe est constitué des bandes superdéformées des noyaux des régions de masse  $A \approx 60, 80, 130$  et  $150$ . Dans ces noyaux aucun état SD de bas spin n'est observé. Ceci suggère que le puits SD n'existe qu'à grande fréquence de rotation. Des mesures de moment quadrupolaires dans la région de masse  $A \approx 150$  [Sa96], ainsi que des calculs [Ri96] semblent conforter cette hypothèse.

### III.3 Structures excitées.

La bande fondamentale superdéformée d'un noyau pair-pair correspond à environ 1 % de la voie de réaction considérée. Lorsqu'on considère un noyau impair, on constate que l'intensité des états SD se répartit entre différentes structures très proches en énergie. C'est l'augmentation progressive du pouvoir de résolution des multidétecteurs qui a permis la mise en évidence de tels états. L'observation de bandes SD excitées dans les noyaux pairs-pairs a été du même coup rendue possible.

Si on veut avoir accès à la structure quantique du noyau, donc aux excitations de particules individuelles, il faut être capable d'étudier toutes ces structures excitées peu intenses et donc arriver à observer des intensités de l'ordre de 0,01 % de la voie de réaction. D'où l'évolution d'EUROGAM vers EUROBALL.

### III.4 Routhians.

#### III.4.1. Routhians expérimentaux :

Le Routhian est l'énergie du noyau dans le référentiel tournant. C'est un outil très intéressant lorsqu'on veut étudier l'évolution d'un état quantique donné. Pour cela il faut isoler le comportement lié à l'occupation de cet état. On va donc comparer un noyau à un des noyaux voisins judicieusement choisis.

En faisant cela, on suppose que l'on peut traiter le noyau dans le cadre du modèle du couplage fort, c'est-à-dire que le noyau de référence est peu affecté par l'ajout d'un nucléon sur l'orbitale que l'on cherche à caractériser. La différence de comportement entre les noyaux à étudier et celui de référence sera donc principalement due à l'état quantique considéré.

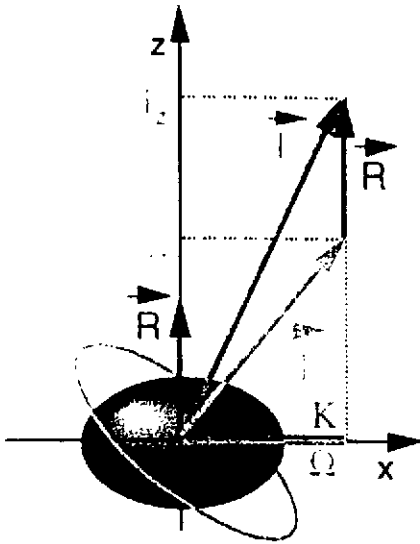


Figure III.2 : Contribution d'un nucléon au moment angulaire total dans le cadre du modèle du couplage fort.

On prend en général comme noyau de référence un noyau pair-pair dont les énergies d'excitation  $E_{\text{réf}}(I)$  sont connues à une constante près. Le spin  $I$  des états de cette bande n'est en général pas mesuré expérimentalement. On peut par contre déduire des énergies  $E_{\text{réf}}(I)$  la fréquence de rotation  $\hbar\omega(I)$ . De même, on dispose des énergies  $E_{\text{étud}}(I)$  et fréquences de rotation  $\hbar\omega(I)$  de la bande à étudier. Comme les valeurs des fréquences de rotation des états des deux bandes n'ont aucune raison d'être identiques on est contraint de passer par une extrapolation du comportement de la référence :

$$\text{Fit} \Rightarrow E_{\text{réf}}(\hbar\omega) = a + b.\omega^2 + c.\omega^4$$

La différence entre  $E_{\text{étud}}(\hbar\omega)$  et  $E_{\text{réf}}(\hbar\omega)$  donne l'évolution liée au nucléon supplémentaire (Suivant l'état quantique dans lequel ce nucléon se trouvera, on pourra avoir différents comportements). On en déduit le Routhian en soustrayant à cette différence l'énergie de rotation  $E_{\text{rot}}(\hbar\omega)$ .

$$\text{routh}(\hbar\omega) = E_{\text{étud}}(\hbar\omega) - E_{\text{réf}}(\hbar\omega) - E_{\text{rot}}(\hbar\omega)$$

Du fait de l'indétermination sur les énergies d'excitations des têtes de bandes de rotation, cette quantité n'est connue qu'à une constante  $E$  près. De plus la paramétrisation de l'énergie de rotation fait intervenir le spin des états à étudier. Il faut donc émettre une hypothèse sur les caractéristiques quantiques de l'orbitale étudiée.

Prenons par exemple le  $^{193}\text{Tl}$  dans lequel plusieurs bandes SD ont été observées. Si on prend comme référence le noyau pair-pair voisin  $^{192}\text{Hg}$ , on peut tracer les Routhians correspondant aux deux premières bandes de  $^{193}\text{Tl}$  [Ga94]. Comme il s'agit de deux bandes partenaires de signature, la constante  $E$  a été choisie de manière à ce qu'à bas spin les deux têtes de bandes soient dégénérées en énergie.

#### III.4.2. Notion de quasi-particule :

Un calcul du type Hartree-Fock donne des énergies à une particule  $e_{\text{sp}}$ . On pourrait très bien imaginer donner ces énergies dans un référentiel lié au niveau de Fermi. Les orbitales situées en

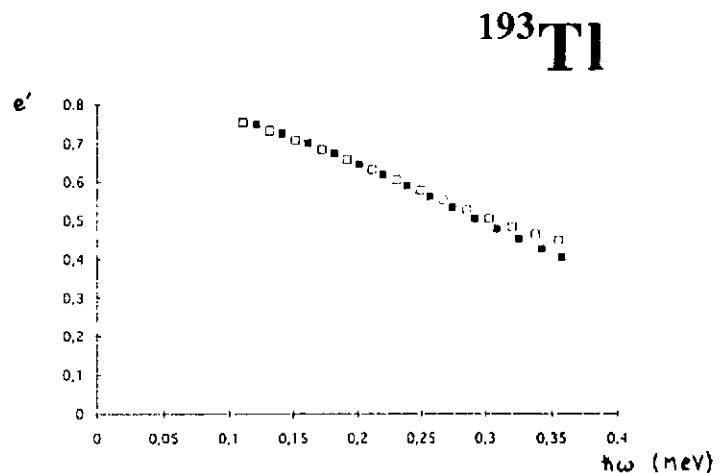


Figure III.3 : Routhian expérimental des bandes 1 et 2 de  $^{193}\text{Tl}$  pour lequel  $^{192}\text{Hg}$  a été pris comme référence [Ga94].

dessous de Fermi (états de trous) auraient une énergie négative et les autres (états de particules) une énergie positive. On peut également représenter ces niveaux par la valeur absolue de leur écart au niveau de Fermi  $e_{sp}-\lambda$ . Il faut alors labeller les états de manière à pouvoir distinguer les états de trous (h) et les états de particules (p). Les états que l'on obtient ainsi sont des états de quasi-particules  $E_{qp}$ .

Plus généralement, on peut introduire un effet d'appariement qui mélange les états à une particule par la méthode de Bogoliubov pour les noyaux en rotation. Ainsi les états à une particule ne sont plus soit vides (p) soit pleins (h), mais ont tous une certaine probabilité d'être occupés. Les états de quasi-particules ainsi obtenus coïncident avec ceux définis précédemment dans la limite de l'appariement nul. On a donc ainsi l'énergie  $E_i^\omega$  liée à l'occupation d'une orbitale individuelle de quasi-particule.

Sont représentés ci-contre les Routhians proton théoriques de  $^{192}\text{Hg}$  obtenus par un calcul du type Hartree-Fock-Bogoliubov-Lipkin-Nogami [Ga94]. On constate un très bon accord avec les Routhians expérimentaux de  $^{193}\text{Tl}$  (cf. figure III.3) qui correspondent à l'ajout d'un proton dans une des orbitales proton de  $^{192}\text{Hg}$ .

Le Routhian est donc un outil permettant une très forte interaction expérience-théorie profitant tant aux expérimentateurs qu'aux théoriciens.

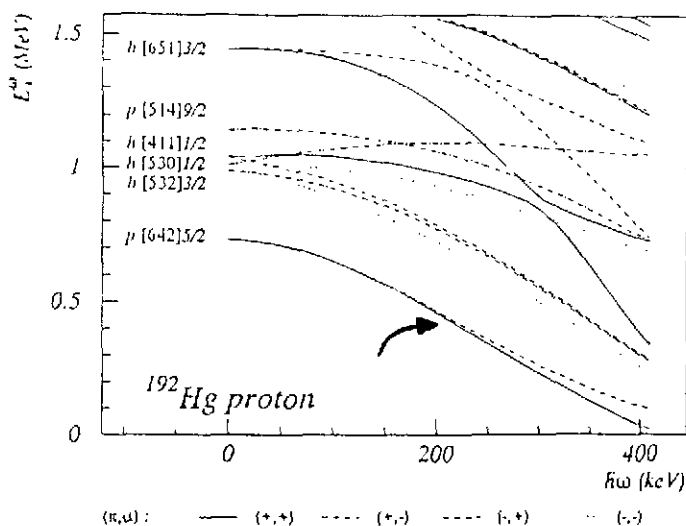
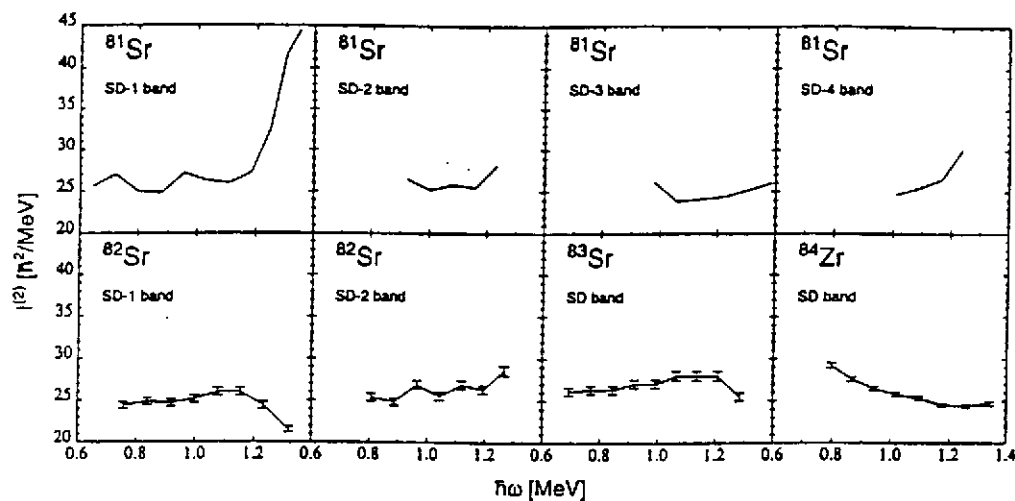


Figure III.4 : évolution en fonction de la fréquence de rotation des Routhians proton de  $^{192}\text{Hg}$  [Ga94].

### III.5 Moment d'inertie dynamique.

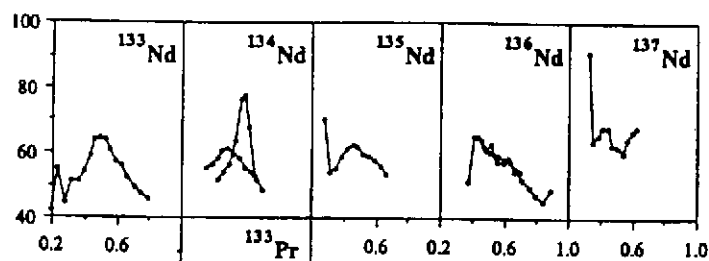
#### III.5.1. Moment d'inertie : régions de masse $A \approx 60, 80, 130$ et $150$ :

Étudions tout d'abord le cas des bandes SD des régions de masse  $A \approx 60, 80, 130$  et  $150$ . Comme nous pouvons le voir sur le tableau du III.2, elles ont été observées uniquement pour des grandes valeurs de fréquence de rotation. Quelques exemples de moments d'inertie dynamique de bandes superdéformées [XL96 et BS95] des régions de masse  $A \approx 60, 80$ , et  $150$  sont reportés sur la page suivante. Nous constatons tout d'abord, comme nous l'avons annoncé, que le moment d'inertie dynamique est extrêmement sensible aux variations de régularité des cascades rotationnelles donc aux évolutions internes au noyau. On doit donc pouvoir signer ainsi les différences de comportement liées à l'occupation des orbitales situées au voisinage du niveau de Fermi. Or on constate que le moment d'inertie dynamique présente divers types d'évolution en fonction de la fréquence de rotation et ce, tant pour différentes bandes excitées d'un même noyau que pour des bandes de noyaux voisins. On notera tout de même que certaines bandes présentent des évolutions très semblables, voire identiques, en fonction de la fréquence de rotation. Pour quantifier cette identité de bandes, le moment d'inertie dynamique n'est plus suffisant. Il a donc fallu définir des grandeurs spécialement adaptées à cette étude. Ce point sera discuté plus loin.

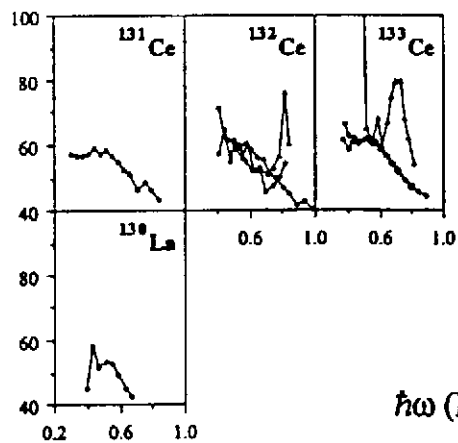


$A \approx 80$

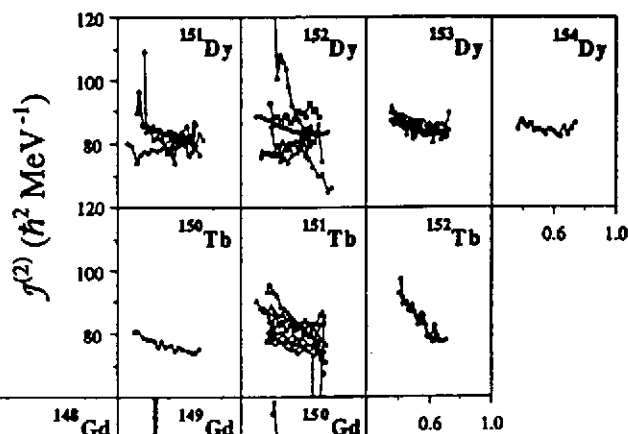
$J^{(2)} (\hbar^2 \text{MeV}^{-1})$



$A \approx 130$



$\hbar\omega$  (MeV)



$\hbar\omega$  (MeV)

$A \approx 150$

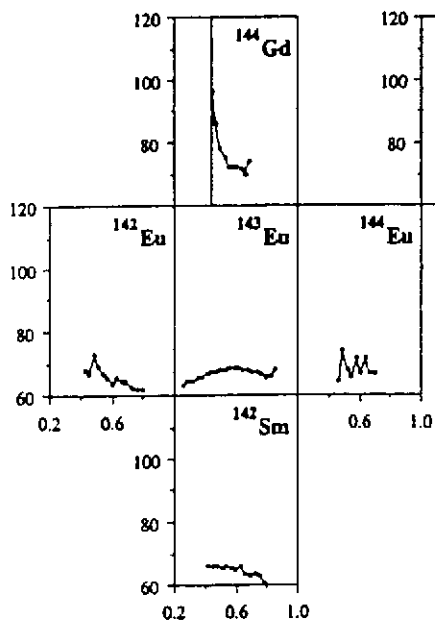


Figure III.5 : Moments d'inertie dynamique de bandes SD des régions de masse  $A=80$ ,  $130$  et  $150$  [XL96 et BS95].

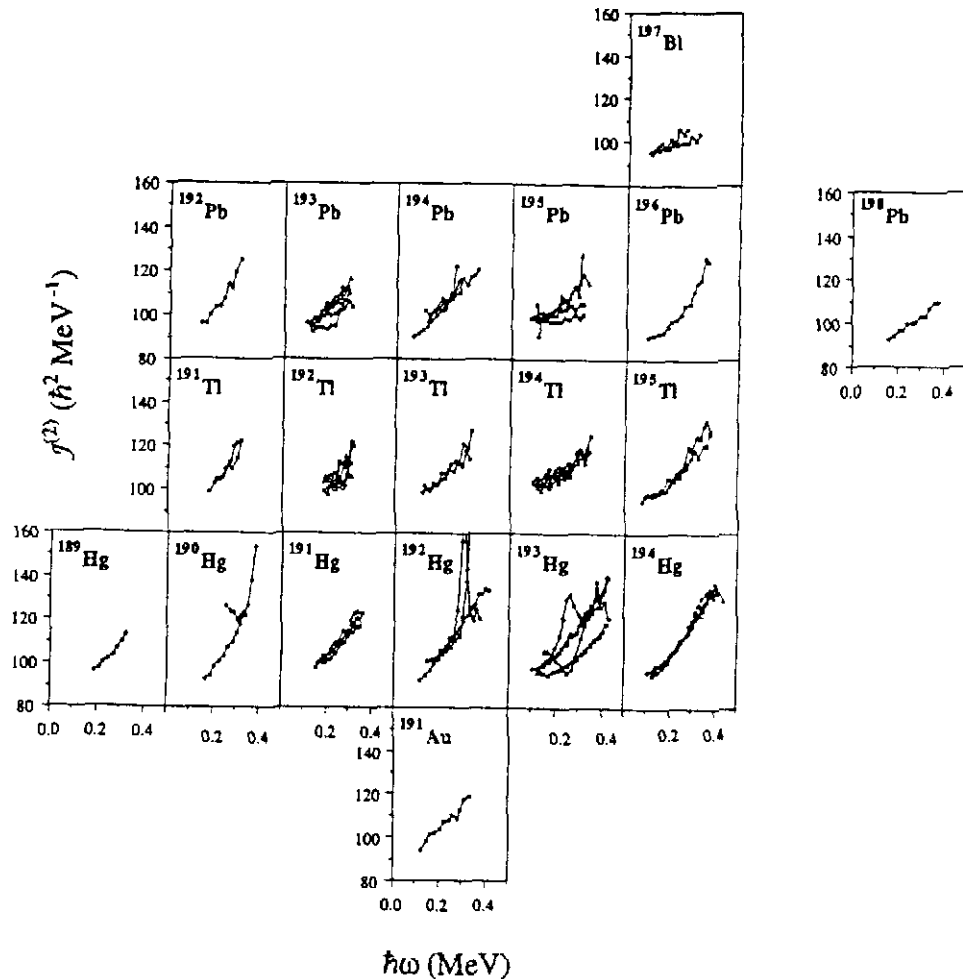


Figure III.6 : Moments d'inertie dynamique de bandes SD des régions de masse  $A \approx 190$  [XL96].

### III.5.2. Moment d'inertie : région de masse $A \approx 190$ :

Quelques exemples de moments d'inertie dynamique de bandes superdéformées [XL96] de la région de masse  $A \approx 190$  sont reportés sur la figure III.6. On constate que, contrairement aux cas de la page précédente, la majeure partie des moments d'inertie présentent une croissance régulière en fonction de la fréquence de rotation, et ce, indépendamment des nombre de nucléons présents. Certaines bandes superdéformées font exception. C'est par exemple le cas pour  $^{194}\text{Tl}$  et  $^{193}\text{Hg}$ . Ces deux cas seront discutés dans les paragraphes qui suivent.

### III.6 Croisements d'orbitales.

L'énergie liée à une orbitale quantique n'a aucune raison de rester constante lorsque le noyau se met à tourner. Les différents états vont donc voir leur énergie varier avec l'augmentation de la fréquence de rotation et les Routhians correspondants vont traduire ces variations. On va donc fatalement observer des croisements d'orbitales ce qui ne présente aucun problème tant que les nombres quantiques des états considérés sont différents.

Si par contre, deux orbitales A et B de mêmes nombres quantiques (parité et signature) venaient à se croiser, n'importe quelle interaction résiduelle viendrait lever la dégénérescence accidentelle ainsi produite. On assisterait donc à un quasi-croisement : les caractéristiques des

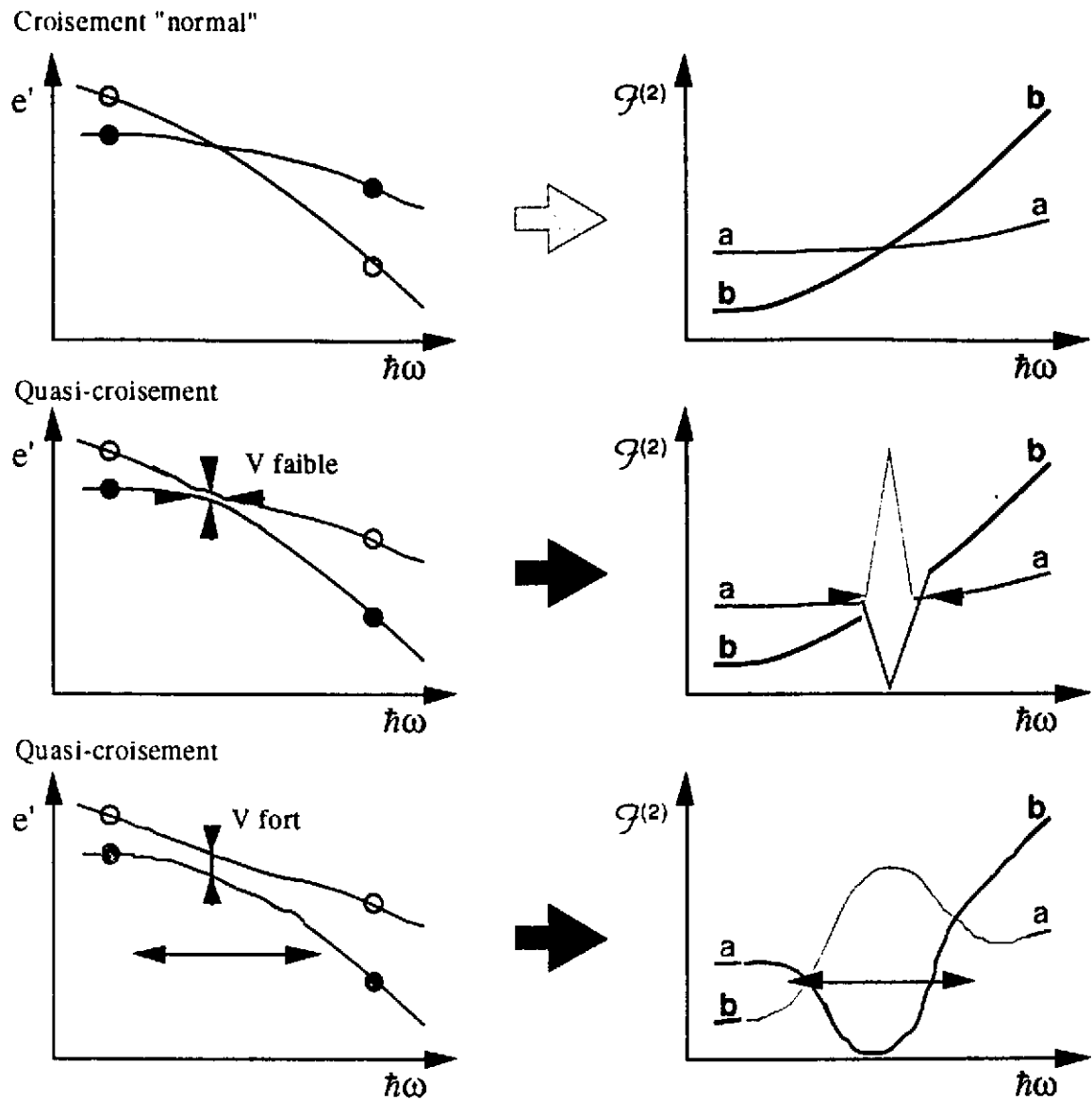


Figure III.7 : Illustration de l'influence du croisement d'orbitales (visibles sur les Routhians situés sur la gauche) sur l'évolution, en fonction de la fréquence de rotation, du moment d'inertie dynamique (à droite). Le premier cas (croisement normal) correspond au croisement de deux orbitales de nombre quantiques (parité et signature) différents et les deux autres à un quasi-croisement lié au croisement de deux orbitales de mêmes nombres quantiques. La dégénérescence accidentelle est levée par une interaction résiduelle d'amplitude  $V$  forte (faible) en bas (milieu).

orbitales sont échangées par l'interaction qui fait évoluer les coefficients de mélange avec la fréquence de rotation. Ainsi, si un nucléon occupait l'orbitale A à basse fréquence il se retrouvera sur l'orbitale B après le quasi-croisement ce qui va sensiblement modifier l'inertie du noyau.

On peut par exemple mettre un quasi-croisement en évidence en comparant les Routhians expérimentaux des bandes 1 et 4 de  $^{193}\text{Hg}$  [Jo93] aux Routhians théoriques neutrons de  $^{192}\text{Hg}$  [Ga94] (voir figure 8a).

Si on compare maintenant le moment d'inertie dynamique de la bande 1 de  $^{193}\text{Hg}$  à celui de la bande 2 de  $^{192}\text{Hg}$  on constate qu'ils présentent tous deux l'allure caractéristique d'un quasi-croisement. Or le comportement de ces deux bandes SD est attribué au croisement des mêmes orbitales :  $[512]5/2$  et  $[761]3/2$ .

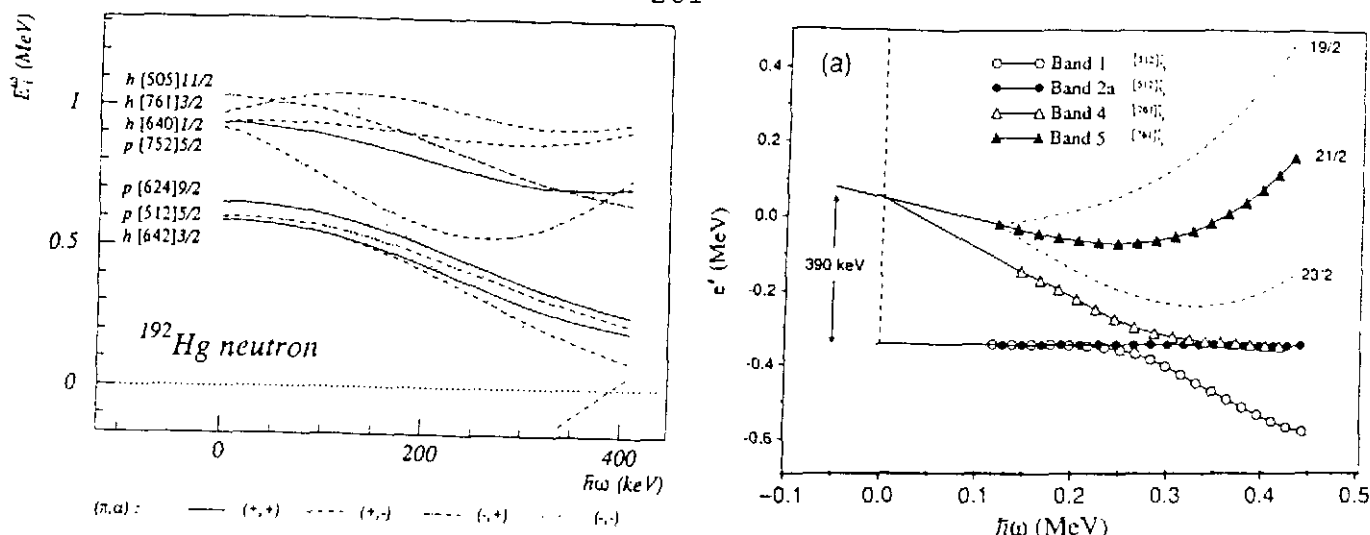


Figure III.8a : A gauche, Routhians expérimentaux des bandes 1, 2, 4 et 5 de  $^{193}\text{Hg}$  [Jo93]. A droite, Routhians théoriques neutrons de  $^{192}\text{Hg}$  [Ga94].

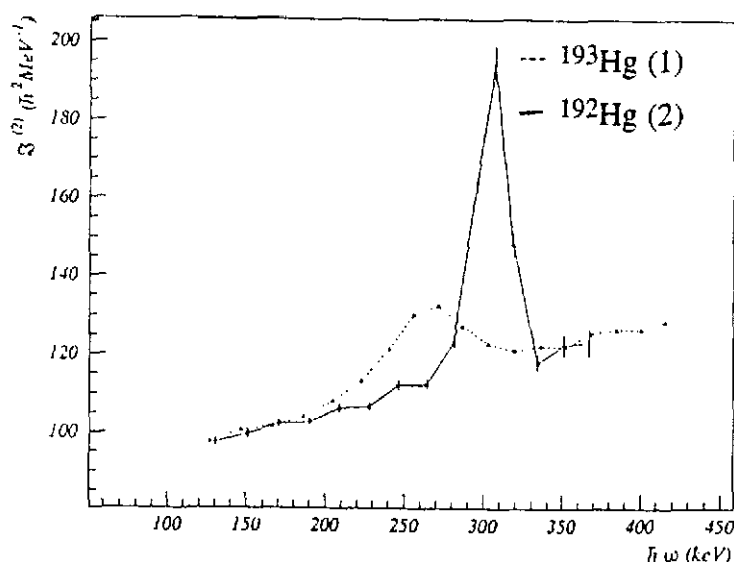


Figure III.8b : Manifestation du croisement des orbitales de neutrons  $[512]5/2$  et  $[761]3/2$  sur les moments d'inertie de la bande 1 de  $^{193}\text{Hg}$  et 2 de  $^{192}\text{Hg}$  [Ga94].

C'est la pente relative des Routhians qui détermine, à interaction fixée, la plage de fréquence dans laquelle se passe le quasi-croisement. Comme nous pouvons le constater sur l'illustration qui suit, suivant l'intensité de l'interaction responsable du quasi-croisement, la zone d'interaction sera plus ou moins large. On peut donc déduire d'un quasi-croisement une information précieuse sur l'intensité de l'interaction et surtout sur la valeur relative des Routhians des deux orbitales. Or la connaissance de la position relative de deux orbitales constitue une contrainte très forte sur les forces utilisées par les théoriciens.

### III.7 Appariement nucléaire.

#### III.7.1. Appariement et bandes superdéformées :

Lorsqu'on mesure le moment quadrupolaire d'états d'une bande SD de la région de masse  $A \approx 190$ , on se rend compte que la déformation ne varie pas sur la quasi-totalité de la plage de fréquence couverte par la bande. En effet, le puits stabilisant les états SD est bien "rigide". On peut observer cela sur la figure III.9 sur laquelle sont représentés les moments quadrupolaires mesurés dans la bande SD fondamentale de  $^{192}\text{Hg}$  (cercles) et dans la première bande excitée de  $^{192}\text{Hg}$  (losanges) [Ko95].

L'appariement nucléaire varie en fonction de plusieurs paramètres tels que la déformation et la rotation. Pour les états de déformation "normale", ces deux paramètres évoluent pratiquement



toujours en même temps. Or, comme nous venons de le voir, les bandes superdéformées constituent des structures en rotation, couvrant une grande plage de fréquence dont les états sont piégés dans un puits de potentiel qui n'autorise pratiquement pas de changements de déformation. En conséquence, elles constituent un laboratoire idéal pour l'étude de l'évolution des corrélations d'appariement en fonction de la rotation seule.

La région de masse  $A \approx 190$  est la seule s'étendant à très basse fréquence (hormis les isomères de fission). C'est donc naturellement dans ces bandes que l'on va chercher à observer la disparition de l'appariement puisqu'on s'attend à ce que l'appariement n'ait pratiquement plus d'impact sur le comportement des bandes des autres régions de masses. Comme nous l'avons vu, la majeure partie des bandes SD de cette région de masse présentent des moments d'inertie dynamiques croissants (voir figure III.10) : cette évolution a été attribuée à la disparition progressive de l'appariement sous l'effet de la force de Coriolis [Ri90, Dr92 et Ga94].

En effet, l'appariement est basé sur la notion de paires de Cooper : deux nucléons se couplent de manière à avoir un moment angulaire total nul. La paire ainsi formée ne **contribue pas** à la rotation collective du noyau, on a formé un **état superfluide**.

Lorsque la fréquence de rotation devient suffisamment forte, cette paire va se briser sous l'effet de la **force de Coriolis**. Il en résulte un **alignement des moments angulaires** sur l'axe de rotation collective. Le noyau réagit à cette brusque augmentation du moment cinétique total et de l'inertie du noyau en réduisant la fréquence de rotation globale du noyau ("Backbending").

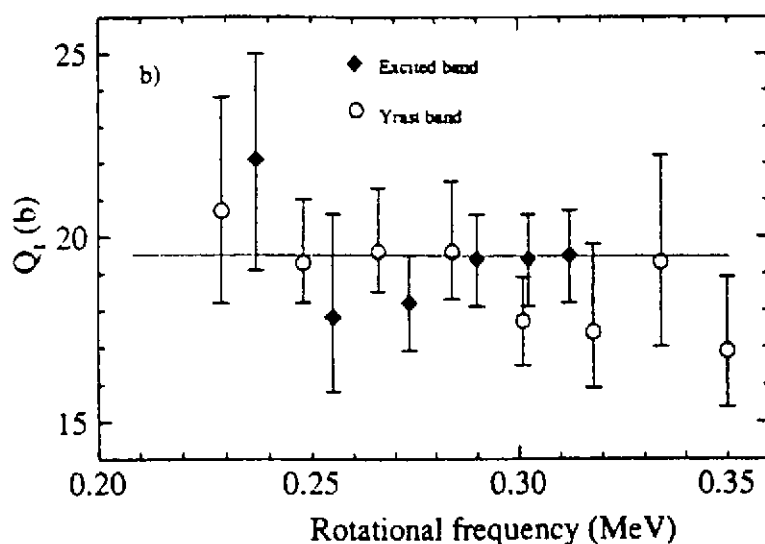


Figure III.9 : moments quadrupolaires mesurés dans la bande SD fondamentale de  $^{192}\text{Hg}$  (cercles) et dans la première bande excitée de  $^{192}\text{Hg}$  (losanges) [Ko95].

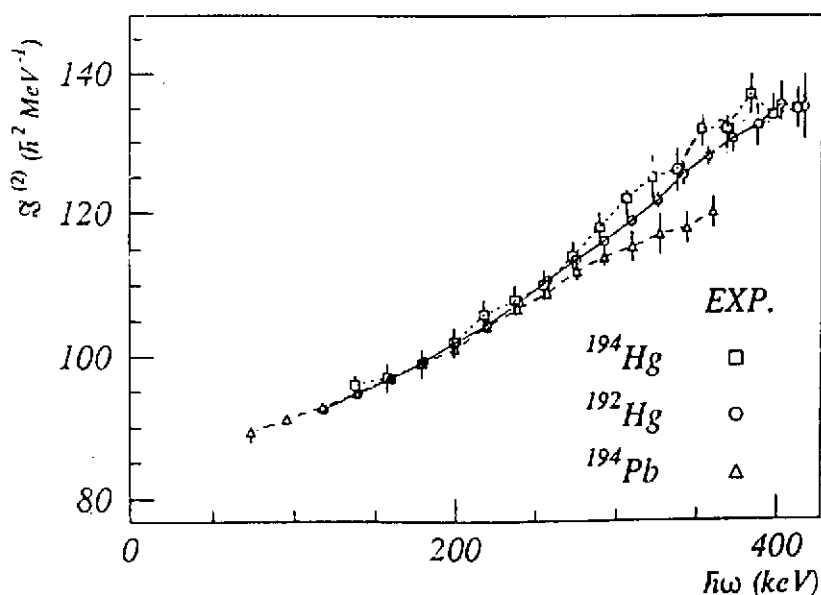


Figure III.10 : Évolution en fonction de la fréquence des moments d'inertie dynamique des bandes SD yrast de  $^{192,194}\text{Hg}$  et  $^{194}\text{Pb}$  [Ga94]

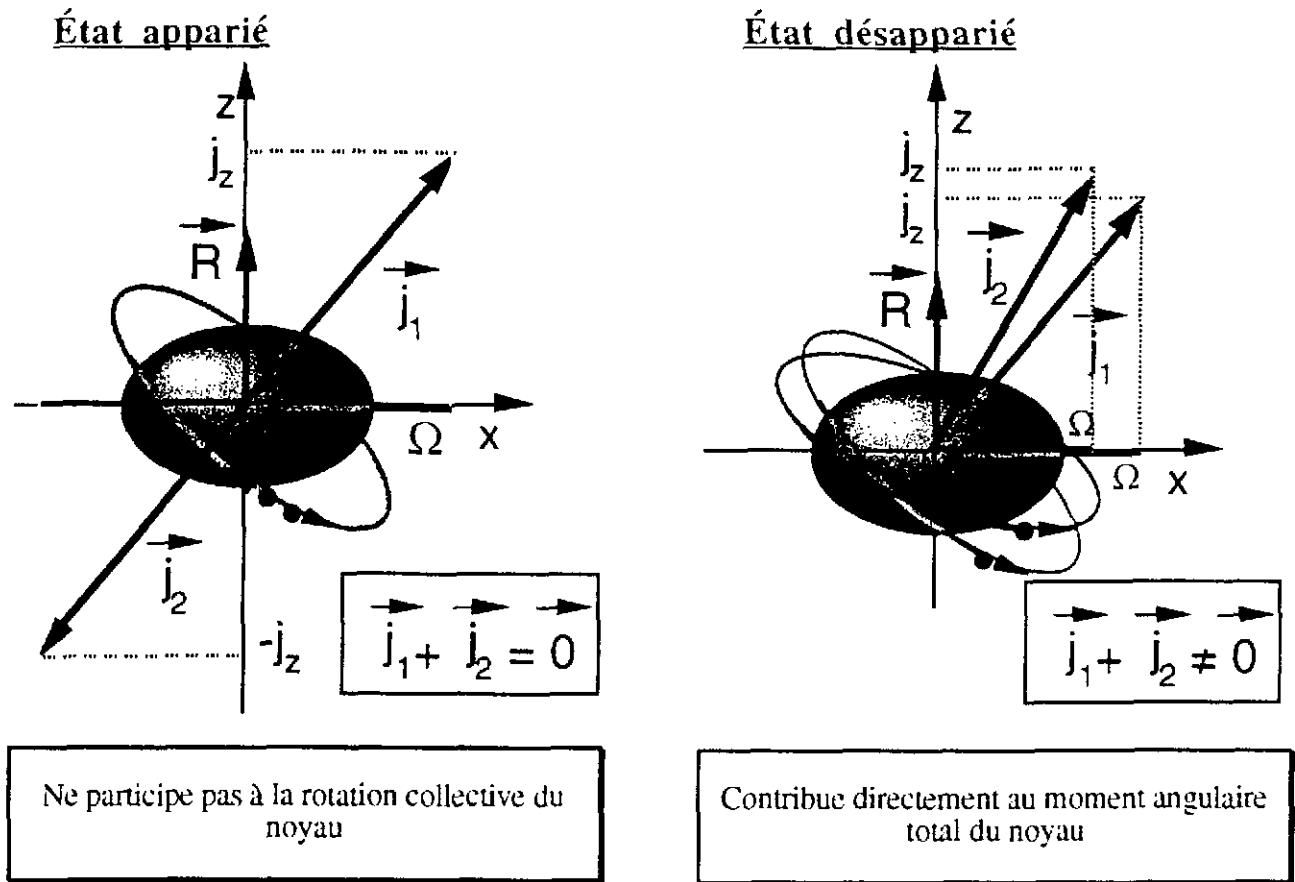


Figure III.11 : Illustration de la brisure d'une paire de nucléons (à gauche) appariés sous l'influence de la rotation. Les moments angulaires des nucléons désappariés viennent s'aligner sur l'axe de rotation (à droite).

### III.7.2. Appariement statique-dynamique.

Suivons l'évolution de l'inertie de la bande SD fondamentale du noyau  $^{192}\text{Hg}$ . L'expérience suggère donc que la disparition de l'appariement liée à l'augmentation de la fréquence conduise à une croissance régulière du moment d'inertie dynamique suivie d'une **saturation**.

D'un point de vue théorique, un traitement du type Hartree-Fock (HF) conduit, pour cette bande SD, à un moment d'inertie dynamique  $\mathcal{J}^{(2)}$  presque constant (voir figure III.13).

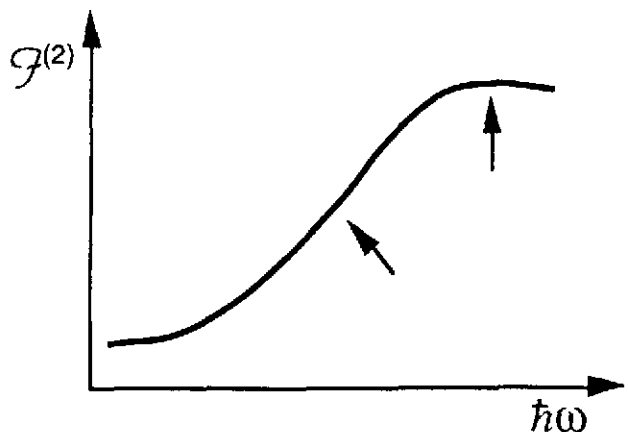


Figure III.12 : Allure du moment d'inertie dynamique de la bande SD yrast de  $^{192}\text{Hg}$ .

Le noyau étant en rotation, un formalisme du type BCS, couramment utilisé en physique nucléaire pour introduire l'appariement n'est pas suffisant ; il faut recourir à une transformation de Bogoliubov pour introduire les couplages entre les bons états [RS80].

Dans le noyau  $^{192}\text{Hg}$ , un calcul du type Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) donne lieu à une deux discontinuités dans le moment d'inertie dynamique  $\mathcal{J}^{(2)}$  correspondant à la **disparition brutale** de l'appariement (STATIQUE) neutron et proton.

Ce traitement "statique" de l'appariement ne préserve le bon nombre de particules qu'en valeur moyenne. On peut restaurer le bon nombre de nucléons par une méthode de projection. Ainsi, une projection approchée par la méthode de Lipkin-Nogami (LN) donne lieu à ce qu'on appelle un appariement "dynamique" [Ga94].

Comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessus, le calcul du type HFB-LN reproduit le comportement suggéré par l'expérience [Ga94]. La surprise associée à ce traitement vient du fait que, comme on peut le voir pour  $^{150}\text{Gd}$ , l'appariement joue encore un rôle à très haute fréquence de rotation dans certains noyaux SD de la région de masse  $A \approx 150$  [Ri97].

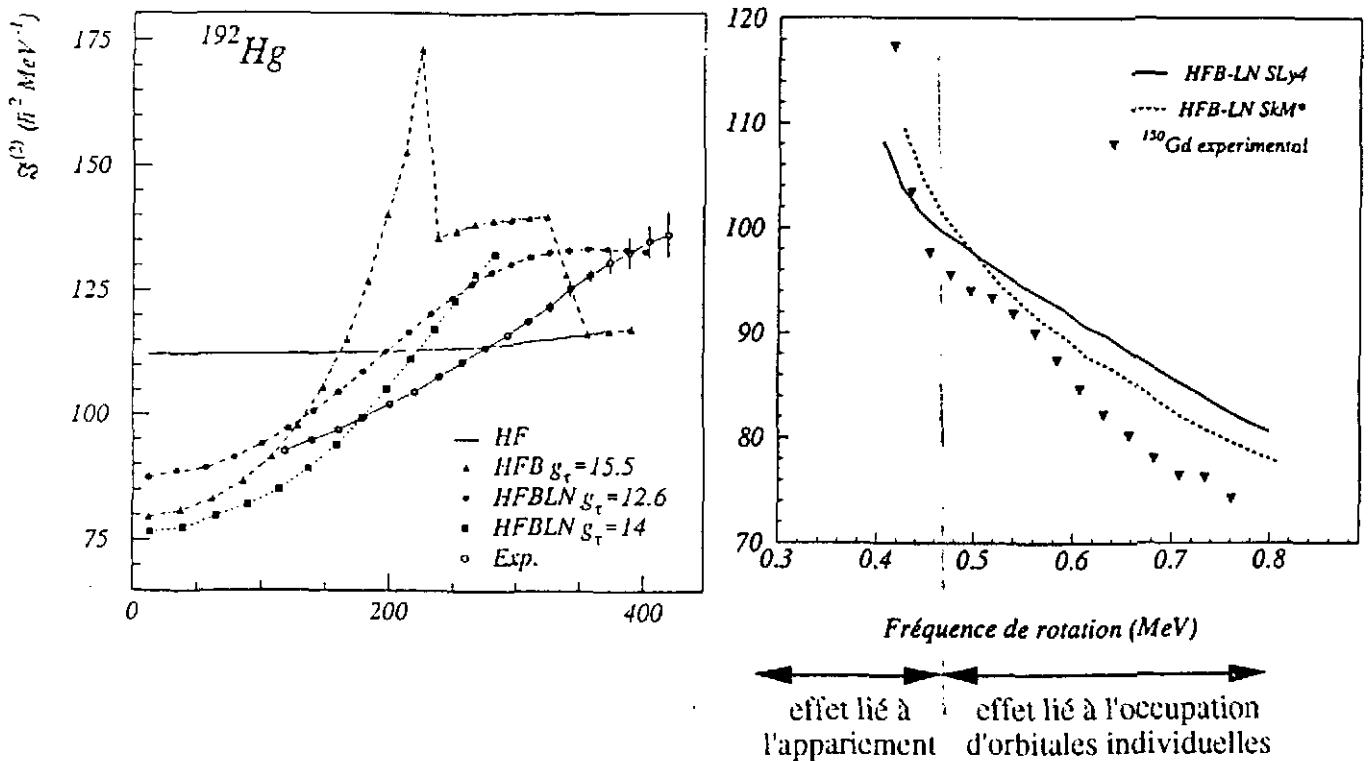


Figure III.13 : A gauche, résultats de différents calculs du type Hartree-Fock (HF pur, HFB et HFBLN) comparés aux données expérimentales pour  $^{192}\text{Hg}$  [Ga94]. A droite, Comparaison de calculs du type HFBLN utilisant deux forces effectives de Skyrme différentes (SkM\* et Sly4) et des résultats expérimentaux pour  $^{150}\text{Gd}$  [Ri97].

### III.7.3. Phénomène de blocage :

Comme nous l'avons vu précédemment, certaines bandes SD de la région de masse  $A \approx 190$  ne présentent pas la forte croissance du moment d'inertie dynamique en fonction de la fréquence de rotation. C'est le cas pour deux bandes de  $^{194}\text{Tl}$  qui ne présentent qu'une croissance relativement modérée. Ce comportement a été interprété comme un phénomène de "blocage" [Az91 et Li92] de l'appariement. En effet, ce noyau est un noyau impair en neutrons ( $N=113$ ) et en protons ( $Z=81$ ). Les deux nucléons célibataires vont empêcher la participation au phénomène d'appariement des orbitales qu'ils occupent.

Or, on constate expérimentalement que seule l'occupation des orbitales intruses par un nucléon célibataire conduit à un fort effet de réduction d'appariement. Le phénomène est très spectaculaire dans deux bandes de  $^{194}\text{Tl}$  sujettes à un double blocage de l'appariement [Bo96 et Du95] ; en effet à la fois le neutron célibataire et le proton célibataire occupent une orbitale intruse. Un tel effet avait déjà été observé dans  $^{192}\text{Tl}$  [Fa92].

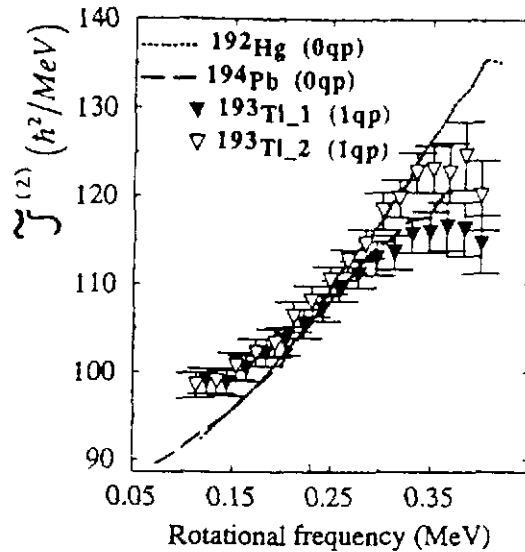


Figure III.14 : Comparaison des comportements des bandes SD 3a et 3b de  $^{194}\text{Tl}$  à celui de  $^{192}\text{Hg}$  [Bo96 et Du95].

### III.8 Mesure de facteur gyromagnétique.

La rotation brise la symétrie par renversement du sens du temps et lève donc la dégénérescence de Kramers. En conséquence, on observe une séparation des énergies des deux partenaires de signature d'autant plus forte que la fréquence de rotation est élevée. Cet effet transparait par exemple sur le moment d'inertie de bandes SD de  $^{194}\text{Tl}$  reportés dans la partie III.4.1.

Du fait des fortes probabilité de transition E2 à "l'intérieur" d'une bande SD, on n'observe que très rarement les transitions M1 entre états d'une bande SD et états de sa partenaire de signature. En effet le rapport d'embranchement est en général largement en faveur des transitions E2. Cependant, cette balance s'inverse à très basse énergie ; on observe ainsi des transitions M1 inter-bandes qui emportent d'autant plus d'intensité que l'énergie est basse. Un tel effet ne peut donc être observé que dans la région de masse  $A \approx 190$ .

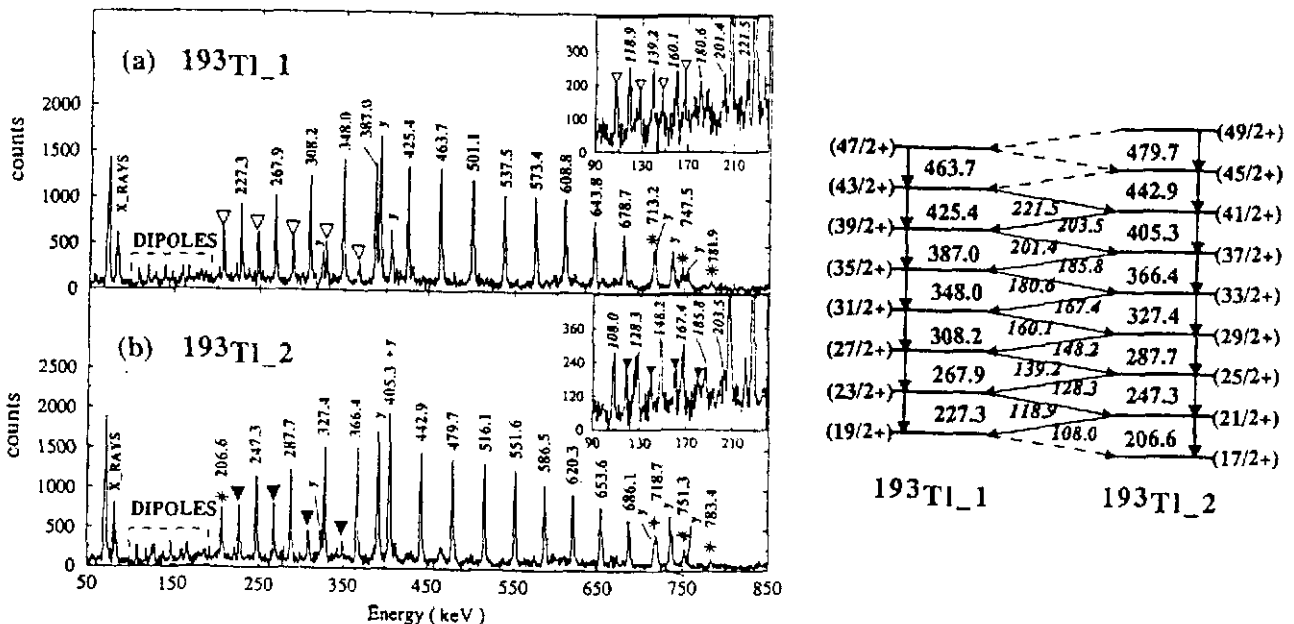


Figure III.15a : Spectres des bandes SD 1 et 2 de  $^{193}\text{Tl}$  (partenaires de signature) et schéma de niveaux correspondant [Bo96]. On remarquera dans les encarts les transitions dipolaires reliant les deux structures.

Les distributions angulaires ont confirmé le caractère quadrupolaire électrique (E2) des transitions intra-bandes et les coefficients de conversion interne le caractère dipolaire magnétique (M1) des transitions inter-bandes (voir figure III.15b).

De ce fait, les rapports d'embranchement mesurés fournissent la valeur  $B(M1)/B(E2)$  qui donne accès, via un modèle, aux **propriétés magnétiques** de ces deux partenaires de signature. Une telle mesure a été réalisée à l'aide d'EUROGAM II pour le noyau SD  $^{193}\text{Tl}$ , impair en protons [Bo96]. Les bandes 1 et 2 de ce noyau étaient attribuées aux deux partenaires de signature de l'orbitale [642]5/2 pour laquelle le facteur gyromagnétique  $g_k$  théorique vaut 1,45. Un facteur gyromagnétique  $g_k$  expérimental de  $1,46 \mp 0,17$  a pu être déduit des rapports  $B(M1)/B(E2)$  (voir figure III.15b). On peut donc confirmer l'attribution de ces deux partenaires à l'orbitale [642]5/2.

Une telle mesure a été réalisée dans des noyaux SD pour la première fois à l'aide d'EUROGAM I pour le noyau  $^{193}\text{Hg}$ , impair en neutrons [Jo93]. Les bandes 1 et 2 de ce noyau étaient attribuées aux deux partenaires de signature de l'orbitale [512]5/2 pour laquelle le facteur gyromagnétique  $g_k$  théorique vaut -0.61. Un facteur gyromagnétique  $g_k$  expérimental de  $-0,65 \mp 0,14$  a pu être déduit des rapports  $B(M1)/B(E2)$ . On peut donc confirmer l'attribution de ces deux bandes SD à l'orbitale [512]5/2. De plus, la valeur de la projection  $\Omega=2,8 \mp 0,8$  du moment angulaire sur l'axe de symétrie du noyau extraite des  $B(M1)$  semble être en accord avec la valeur  $\Omega=5/2$  de l'orbitale [512]5/2. Les bandes SD de ce noyau présentent une autre particularité : la bande 2 semble avoir deux partenaires de signature de parités opposées (les bandes 1 et 3) ce qui

n'est pas possible. De plus, la largeur de ses raies gamma est deux fois plus grande que celle des bandes 1 et 3 [Jo93] (cf. figure III.16). En fait, les raies gamma des partenaires de signature (bandes 2a et 2b) des bandes 1 et 3 sont dégénérées en énergie

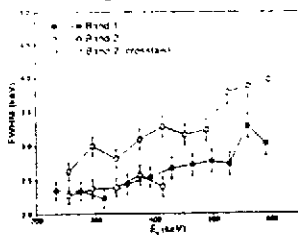


Figure III.16 : Schémas de niveaux des bandes 1, 2a, 2b et 3 de  $^{193}\text{Hg}$  et comparaison des largeurs à mi-hauteur des transitions de la bande 2 à celles de la bande 1. [Jo93]

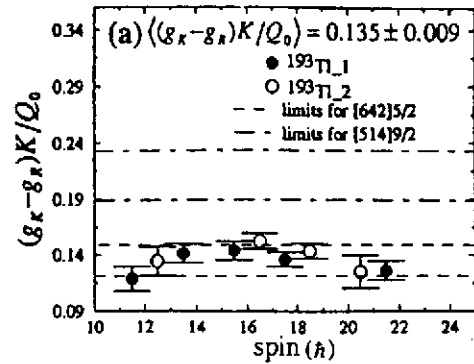
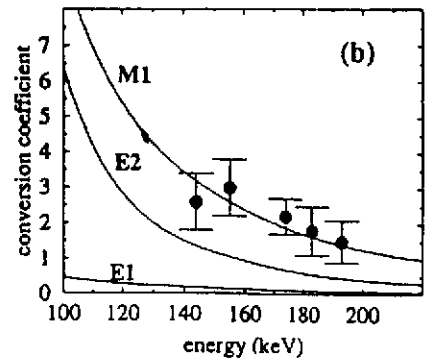


Figure III.15b : Coefficients de conversion des transitions reliant les deux bandes et facteur gyromagnétique déduits des données expérimentales [Bo96]

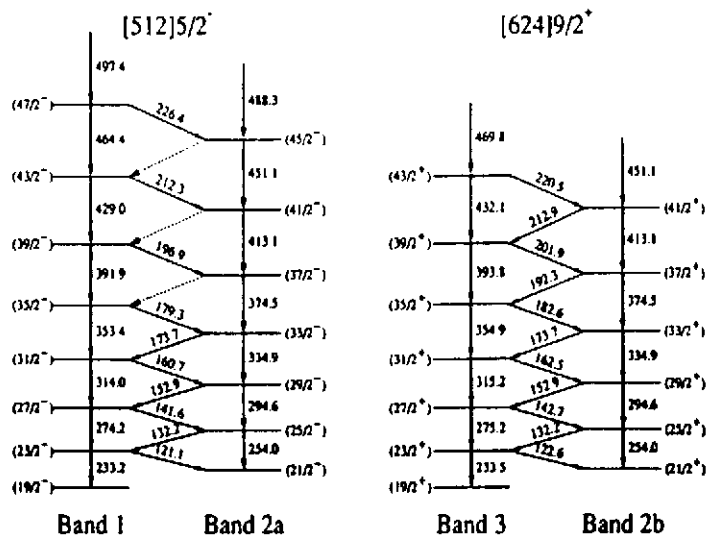


Figure III.16 : Schémas de niveaux des bandes 1, 2a, 2b et 3 de  $^{193}\text{Hg}$  et comparaison des largeurs à mi-hauteur des transitions de la bande 2 à celles de la bande 1. [Jo93]

### III.9 Bandes identiques.

Nous venons de voir un cas de bandes SD identiques bien que bâties sur des configurations différentes du même noyau. Ce phénomène d'identité de bandes a été découvert bien plus tôt dans la région de masse  $A \approx 150$  [By90]. En effet, une bande SD (bande 2) de  $^{151}\text{Tb}$  présente des énergies égales (à 1,5 keV près) à celles des transition de la bande SD yrast de  $^{152}\text{Dy}$ .

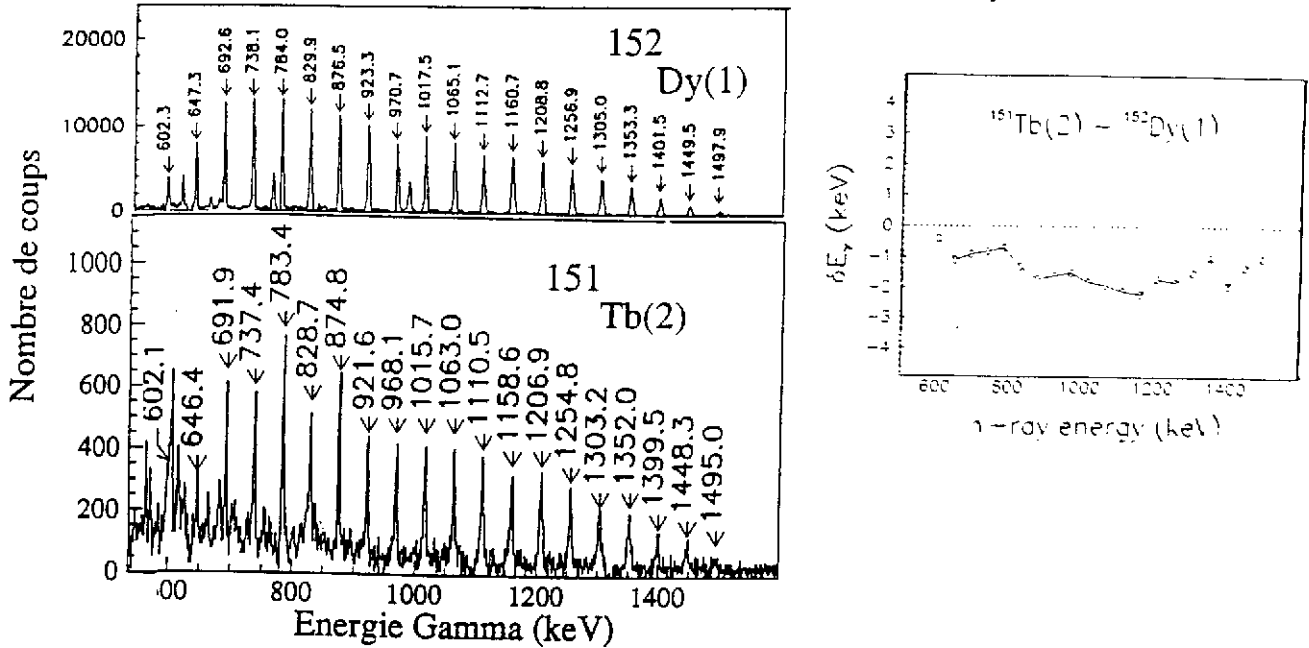


Figure III.17 : A gauche, bandes SD yrast de  $^{152}\text{Dy}$  comparée à la première bande SD excitée de  $^{151}\text{Tb}$  [By90]. A droite, évolution en fonction de la fréquence de la différence des énergies gamma de ces deux bandes.

D'un point de vue classique, l'inertie d'un rotor rigide varie comme  $A^{5/3}$ . Les énergies gamma varient donc comme l'inverse de l'inertie soit  $A^{-5/3}$ . De ce fait une variation d'une unité de masse conduirait à une variation de l'ordre de 11 keV pour une transition gamma de 1 MeV. En pratique cette loi en  $A^{5/3}$ , représentée par un trait plein sur la figure ci contre, est suivie de façon globale alors que, dans chaque région de masse, on observe des variation d'inertie ne suivant en rien cette loi [Wi92].

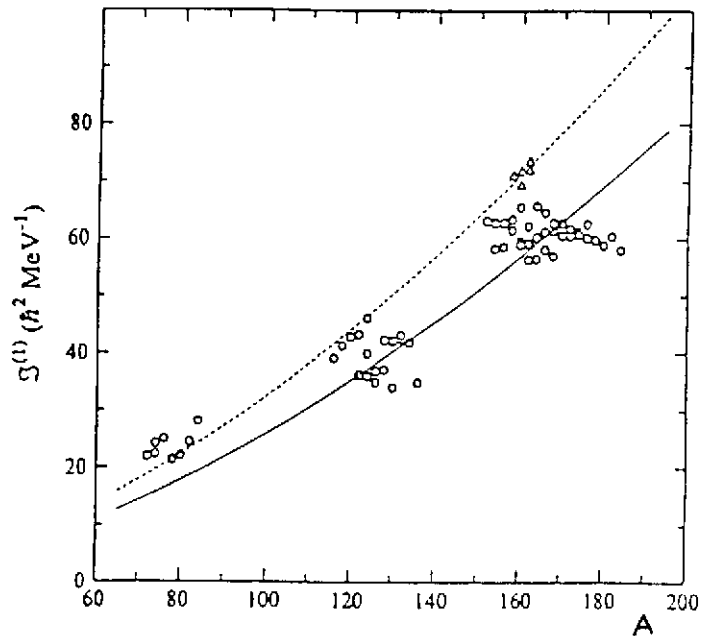


Figure III.18 : Évolution de l'inertie en fonction de la masse des noyaux [Wi92].

#### III.9.1. Cas de la région de masse $A \approx 150$ :

Le phénomène de bandes identiques conduit à des moments d'inertie dynamiques semblables. On peut cependant avoir le même moment d'inertie dynamique en ayant des énergies gamma différentes. On comprend aisément cet effet pour deux partenaires de signature dont la

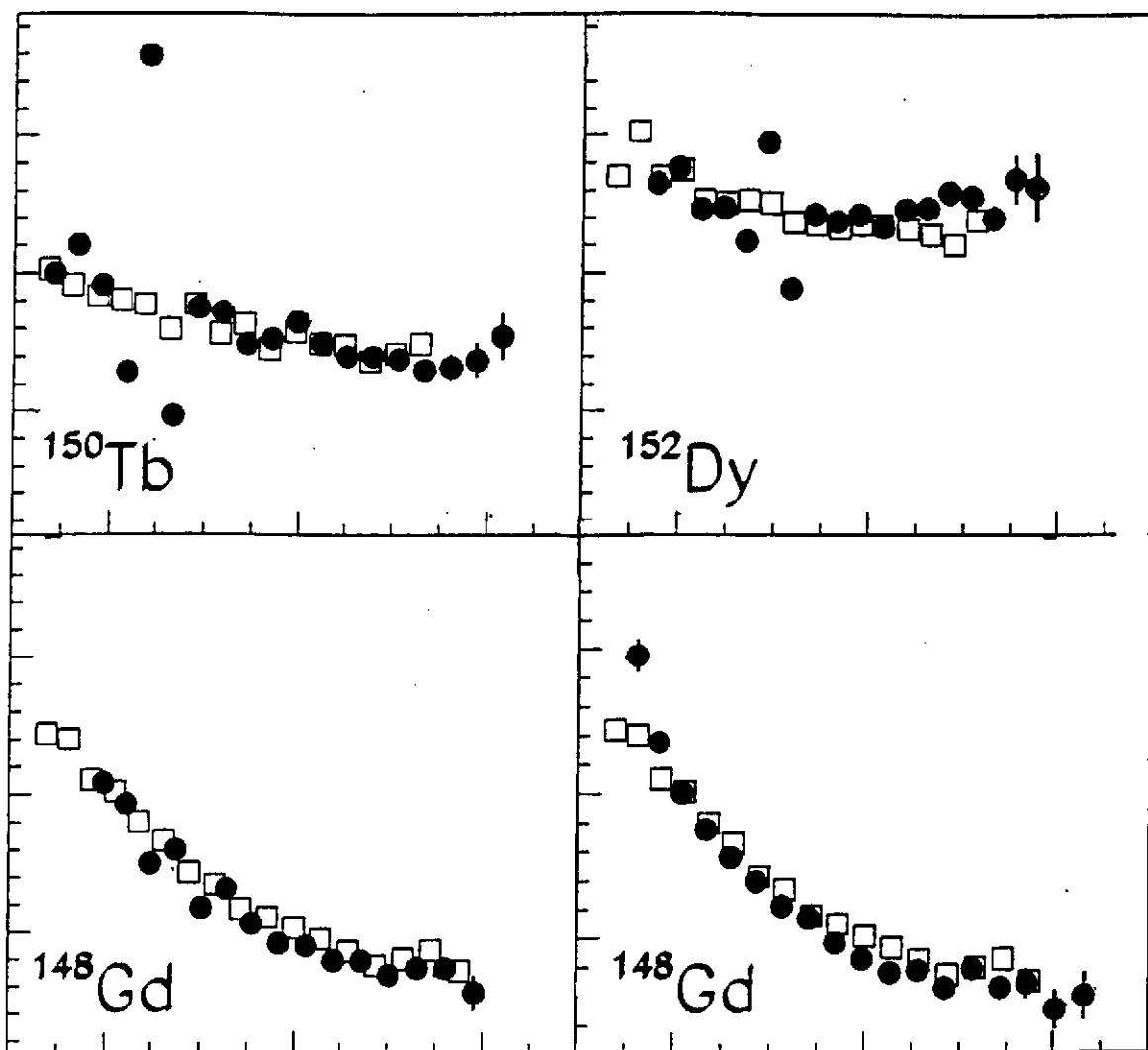


Figure III.19 : Comparaison des moments d'inertie dynamique des bandes c, d, e et f de  $^{149}\text{Gd}$  (cercles) respectivement à la bande yrast de  $^{150}\text{Tb}$ , de  $^{152}\text{Dy}$  et, pour les deux dernières à celle de  $^{148}\text{Gd}$  (carrés). On constate une identité de comportement en fonction de la fréquence de rotation [Du97].

levée de dégénérescence n'est pas forte. Cependant de nombreux "couples" de bandes présentent ce phénomène. Ainsi, la bande 3 de  $^{149}\text{Gd}$  est identique à la bande yrast de  $^{150}\text{Tb}$ , la bande 4 de  $^{149}\text{Gd}$  est identique à la bande yrast de  $^{152}\text{Dy}$  et la bande 5 de  $^{149}\text{Gd}$  est identique à la bande yrast de  $^{148}\text{Gd}$  [Du97].

Par comparaison avec de modèles, on constate que les bandes identiques ont la même composition en orbitales intruses ; ainsi  $^{149}\text{Gd}(3)$  et  $^{150}\text{Tb}(1)$  ont tous deux 3 protons ( $\pi$ ) dans les orbitales intruses de nombre quantique principal  $N=6$  et 1 neutron ( $\nu$ ) dans les orbitales intruses  $N=7$  (cette configuration est notée  $\pi 6^3\nu 7^1$ ). Ils diffèrent donc que par le nombre d'orbitales non intruses. Il semble donc que les orbitales non intruses n'aient quasiment aucune influence sur l'inertie de la bande SD. Cependant, l'étude des différents cas connus ne permet pas de donner une explication définitive à ce phénomène [Ba95].

### III.9.2. Cas de la région de masse $A \approx 190$ :

Comme nous l'avons vu précédemment, la majorité des moments d'inertie dynamiques des bandes SD de cette région de masse ont un comportement semblable du fait de l'existence des

corrélations d'appariement. La présence de cette interaction résiduelle conduit à une diffusion de la surface de Fermi. De ce fait, l'influence des orbitales intruses individuelles se moyenne (leur occupation ne change que très peu d'un noyau à un autre) et est plus difficile à mettre en évidence. Dans la région de masse  $A \approx 190$ , on s'attend donc à des bandes ayant des comportements très similaires.

Par contre, lorsque l'appariement devient faible (à haute fréquence), les différences d'occupation des orbitales intruses auront une

incidence sur le comportement des différents noyaux. C'est, par exemple, le cas pour les bandes yrast de  $^{194}\text{Pb}$  et  $^{192}\text{Hg}$  : jusqu'à une fréquence de rotation de 280 keV, elles présentent des énergies identiques, alors qu'à plus haute fréquence leurs comportements n'ont plus rien de commun [Ga95b].

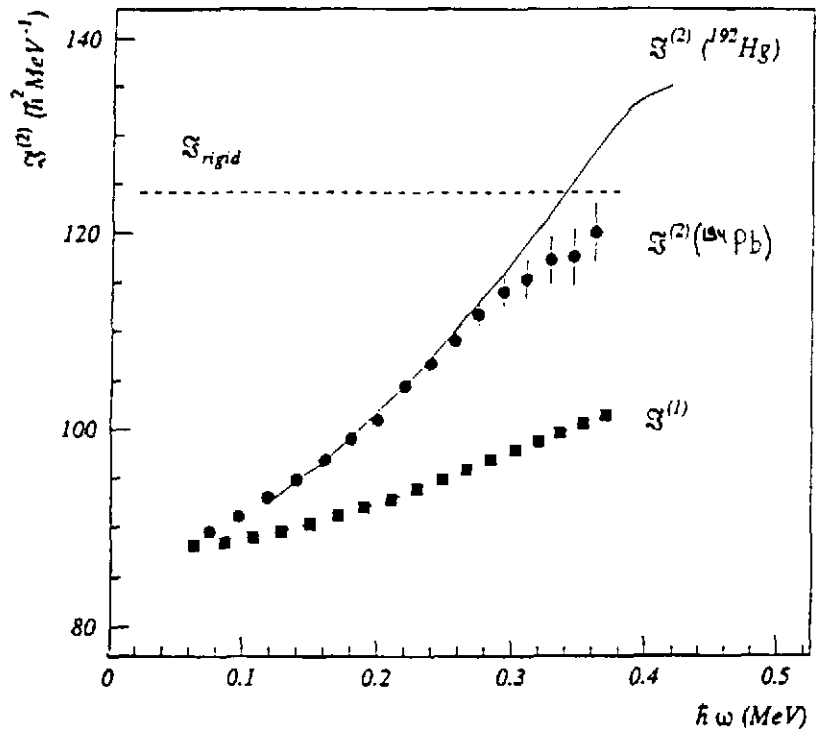


Figure III.20 : Comparaison des moments d'inertie dynamique des bandes  $^{192}\text{Hg}$  (ligne continue) et  $^{194}\text{Pb}$  (cercles). On constate uniquement à basse fréquence une identité de comportement en fonction de la fréquence de rotation [Ga95b].

### III.9.3. Analyse systématique :

Pour analyser la pertinence du concept de bandes identiques (BI), il faut un **critère de comparaison** des différents cas observés. Comme le moment d'inertie dynamique est la sonde la plus sensible permettant de décrire des changements dans le noyau, le Changement Fractionnaire (FC) du moment d'inertie dynamique d'un noyau à un autre ("Fractional change") [De96] a été défini comme suit :

$$FC_{X,Y} = \frac{[S_X^{(2)} - S_Y^{(2)}]}{S_X^{(2)}} = \frac{\Delta S^{(2)}}{S_X^{(2)}}$$

On supposera que le noyau Y est toujours plus léger que le noyau X.

L'analyse du FC nécessite un nombre suffisant de cas. La région de masse  $A \approx 130$  présente trop peu de données pour arriver à exploiter le FC (18 bandes). Par contre la région de masse  $A \approx 150$  présentant 54 bandes (1250 paires de bandes dont 6% de BI), il a donc été possible d'exploiter le FC [De96]. Après avoir imposé le fait qu'une des deux bandes SD doit Yrast, cette étude conduit à un pic centré à  $FC=0$ , de largeur 0,025, composé de 17 paires de bandes SD.



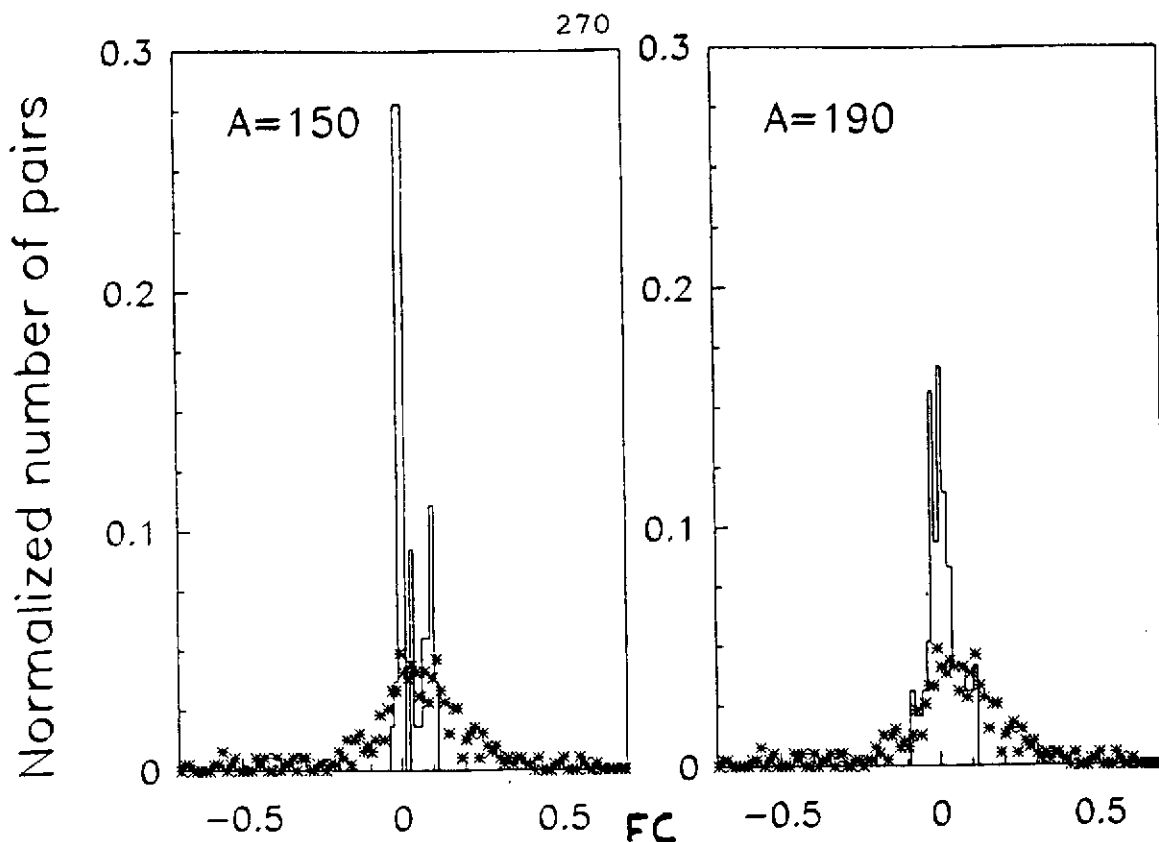


Figure III.21 : Distribution de **changement fractionnaire d'inertie (FC)** pour des paires de bandes SD de la région de masse  $A=150$  (à gauche) et  $A=190$  (à droite). Les étoiles correspondent à la distribution de FC de près de 400 bandes de déformation normale dans la région des terres rares [De96].

Le même travail a été fait dans la région de masse  $A \approx 190$  avec les 45 bandes (790 paires de bandes dont 12% de BI) connues au moment de cette étude. La distribution de FC ainsi obtenue est également centrée autour de  $FC=0$ , mais présente une largeur 0,05. Cette valeur double de celle obtenue dans la masse 150 a été attribuée à la présence de corrélations d'appariement.

Si maintenant on exporte ce traitement à des structures rotationnelles de déformation normales (ND) pour lesquelles les effets d'appariement sont encore plus marqués, on obtient, pour les deux régions de masse, une largeur nettement supérieure ( $\approx 0,28$ ). Sur la figure III.21 les distributions correspondantes ont été normalisées.

On constate, comme nous l'avons annoncé dans le paragraphe III.9.2, que l'intensité de l'appariement influe directement sur la largeur de la distribution des bandes identiques en "lissant" les effets d'orbitales individuelles. D'autre part, dans le cas des bandes identiques de la région de masse 150, les 17 paires de bandes comprises dans le pic  $FC=0$ , contient, paires par paires, les mêmes orbitales intruses.

### III.10 Population des bandes superdéformées.

Lorsqu'on étudie la population des différents états d'un noyau, on se rend compte que les états superdéformés sont issus des composantes à grand moment angulaire de la distribution en spin. Or la fission impose une limite supérieure au moment angulaire d'un noyau, elle peut donc avoir un effet non négligeable sur les profils d'intensité de bandes SD. Ainsi, on peut légitimement se demander si le moment angulaire maximum observé dans une bande SD est imposé par la cinématique ou par la fission.

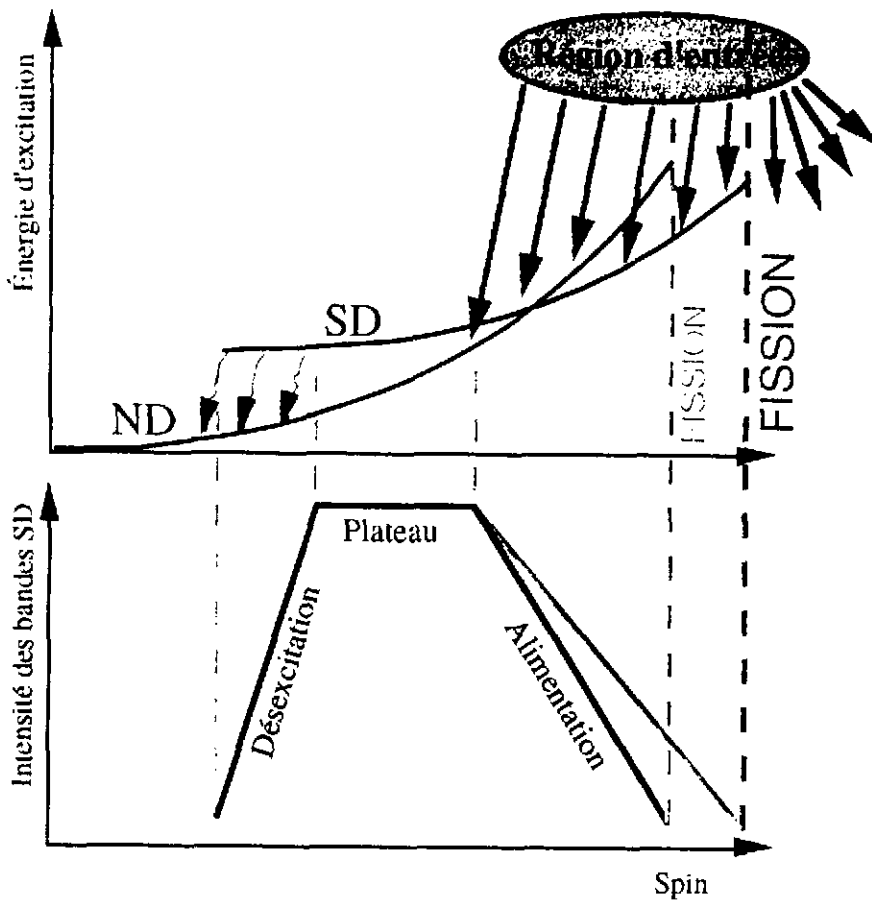


Figure III.22 : Influence de la fission sur le profil d'intensité d'une bande SD de la région de masse 190.

Pour répondre à cette question, il suffit de mesurer le rapport  $I_{SD}/I_{ND}$  pour différentes valeurs d'asymétrie ( $A_{\text{Faisceau}}/A_{\text{Cible}}$ ), dans des conditions d'énergie d'excitation ( $E^*$ ) et de moment angulaire maximum ( $l_{\text{max}}$ ) similaires. Il a été montré que dans la région de masse 150, la population des bandes SD semble être augmentée pour des réactions plus symétriques [Sm92 et F192]. Cet effet de voie d'entrée pourrait être expliqué par un temps de fusion plus long pour les réactions symétriques durant lequel des particules légères pourraient être évaporées favorisant ainsi la voie fusion-évaporation [F192]. Ce type d'études peut donc nous donner des renseignements sur les mécanismes de réaction.

Pour la région de masse 190, une étude a été menée pour le noyau  $^{194}\text{Pb}$  [De95b]. Les taux de production ne semblent pas dépendre de l'énergie d'excitation  $E^*$  et présenter, en fonction de  $l_{\text{max}}$  une très légère augmentation suivie d'une saturation. Une systématique des populations des bandes SD de cette région de masse montre que le moment angulaire maximum atteint est corrélé au paramètre de fissilité  $Z^2/A$  [De97]. Ceci démontre que, dans cette région de masse, le profil d'alimentation est imposé par le phénomène de fission.

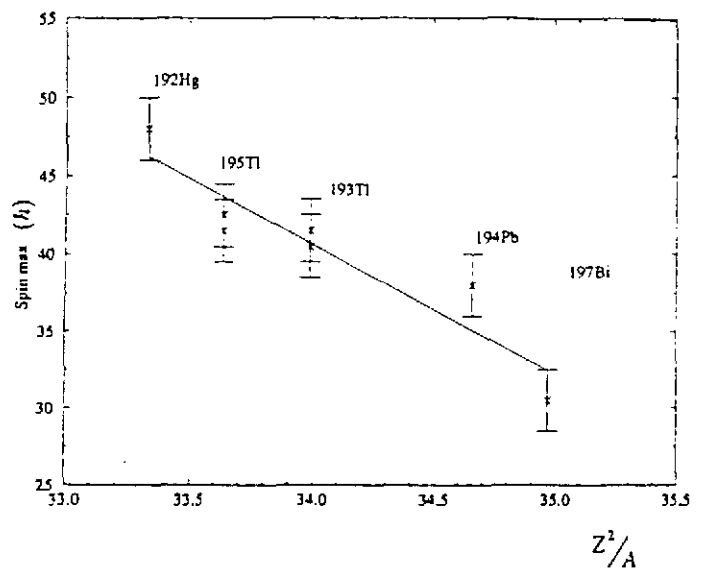


Figure III.23: Évolution du moment angulaire maximum atteint en fonction du paramètre de "fissilité"  $Z^2/A$  du noyau résiduel [De97].

### III.11 Désexcitation vers des états de déformation "normale".

#### III.11.1. Problématique :

Le passage du puits superdéformé au puits de déformation normale correspond à la traversée d'une barrière de potentiel par effet tunnel. La probabilité de transmission est donc proportionnelle au nombre d'états accessibles et à l'énergie des transitions (différence d'énergie entre les 2 puits) et inversement proportionnelle à la taille de la barrière.

$$P_{SD \rightarrow ND} \propto \sum_i \langle ND_i | \hat{O}_i | SD \rangle E_\gamma^{2I+1}$$

On voit donc apparaître deux modes de désexcitation qui sont généralement en compétition :

- la désexcitation par transitions gamma discrètes reliant un puits à l'autre peut avoir lieu si l'énergie d'excitation du puits superdéformé est suffisamment grande. La détection de telles transitions est très difficile car, à leur faible intensité s'ajoute une probabilité de détection relativement faible (du fait de leur grande énergie). On peut cependant, lorsqu'on les observe, en déduire l'énergie d'excitation, le spin et la parité des états de la bande.

- la désexcitation statistique est basée sur des états d'arrivée très nombreux et ne nécessite quand à elle pas une grande différence d'énergie entre les états SD et ND. L'étude de ce type de désexcitation ne donne pas accès à une mesure de la parité des états SD et la détermination de l'énergie d'excitation est faite à 15 % près.

#### III.11.2. Cas de la masse $A \approx 190$ :

Dans cette région de masse le puits SD persiste jusqu'aux spins les plus bas. Il faut donc traverser une barrière de potentiel relativement importante pour passer des états SD aux ND. On observe, dans cette région de masse, une compétition entre les deux modes de désexcitation.

Une étude de désexcitation par un continuum a été réalisée dans le cas de  $^{192}\text{Hg}$ . Le spectre correspondant est reporté sur la figure III.25. On y observe une bosse correspondant à la désexcitation statistique : Il a été possible d'en extraire le nombre moyen de photons par désexcitation ( $3,2 \mp 0,6$ ), l'énergie moyenne emportée ( $4,5 \mp 0,9$  MeV) ainsi que l'énergie d'excitation moyenne des états SD les plus bas ( $6,8 \mp 0,9$  MeV) [He94].

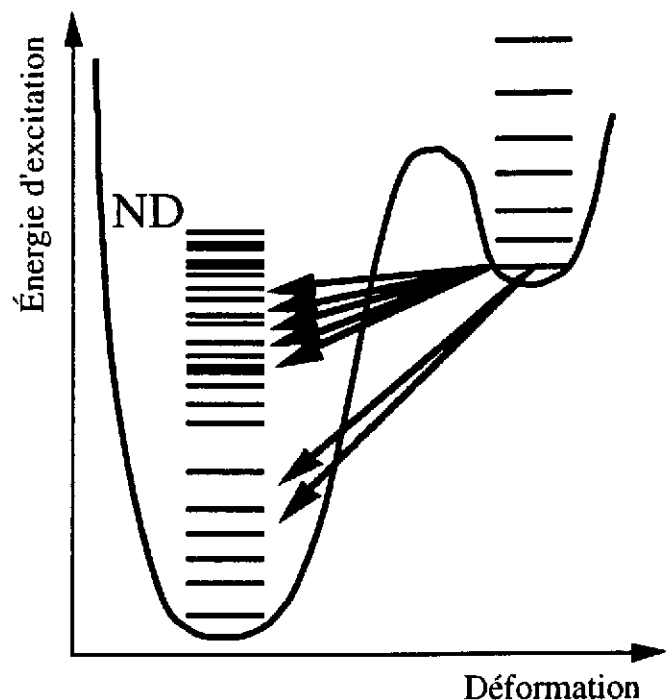


Figure III.24 : Vue schématique de la décroissance d'une bande SD.

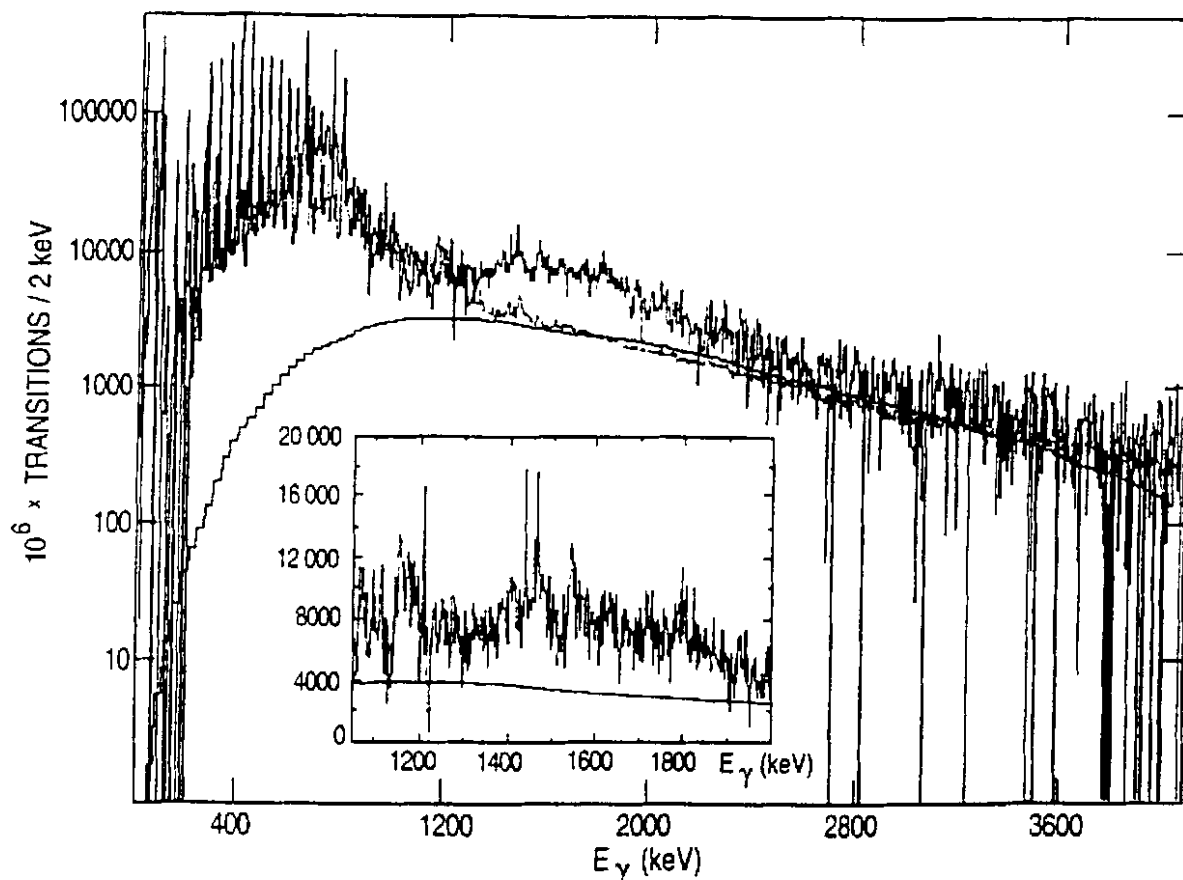


Figure III.25 : Spectre en coïncidence avec des transitions de la bande SD yrast de  $^{192}\text{Hg}$ . On peut y observer une bosse (de 1300 à 2500 keV) correspondant à la désexcitation statistique de la bande SD [He94].

Des transitions de grande énergie reliant les états superdéformés aux états de déformation normale ont également été observées dans cette région de masse. Sur la figure III.26, sont représentées les transitions reliant les états SD et ND de  $^{194}\text{Pb}$  [Lo97]. On constate que les gammas reliant les deux puits ont chacun une intensité inférieure à 3% de l'intensité de la bande. De plus, la somme des intensités de ces transitions est inférieure à l'intensité de la bande SD, ce qui laisse place à d'autres types de désexcitations.

### III.11.3. Cas de la masse $A=150$ :

Dans cette région de masse le puits SD disparaît aux environs du spin  $32 \hbar$ . De ce fait, la barrière de potentiel à traverser est d'autant plus faible qu'on se trouve près des dernières transitions

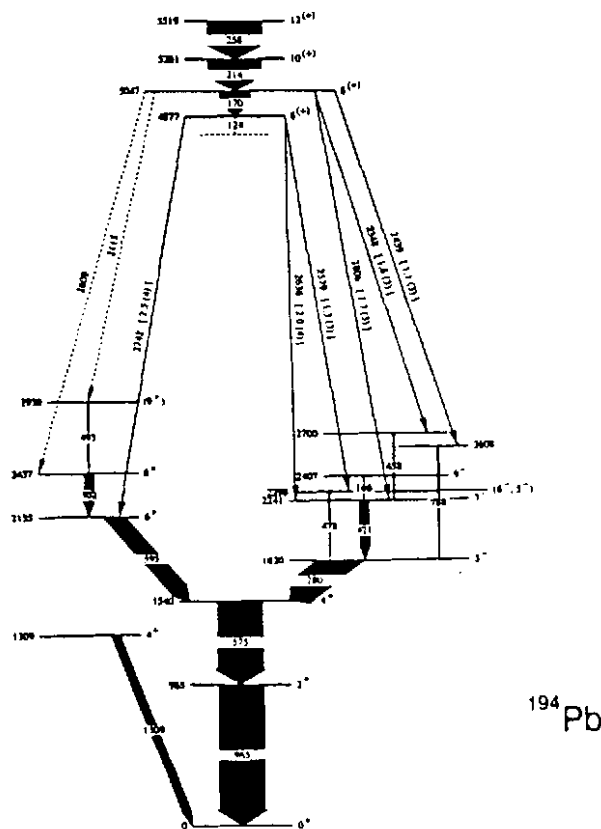


Figure III.26 : Transitions discrètes reliant les états SD aux états de déformation normale [Lo97].

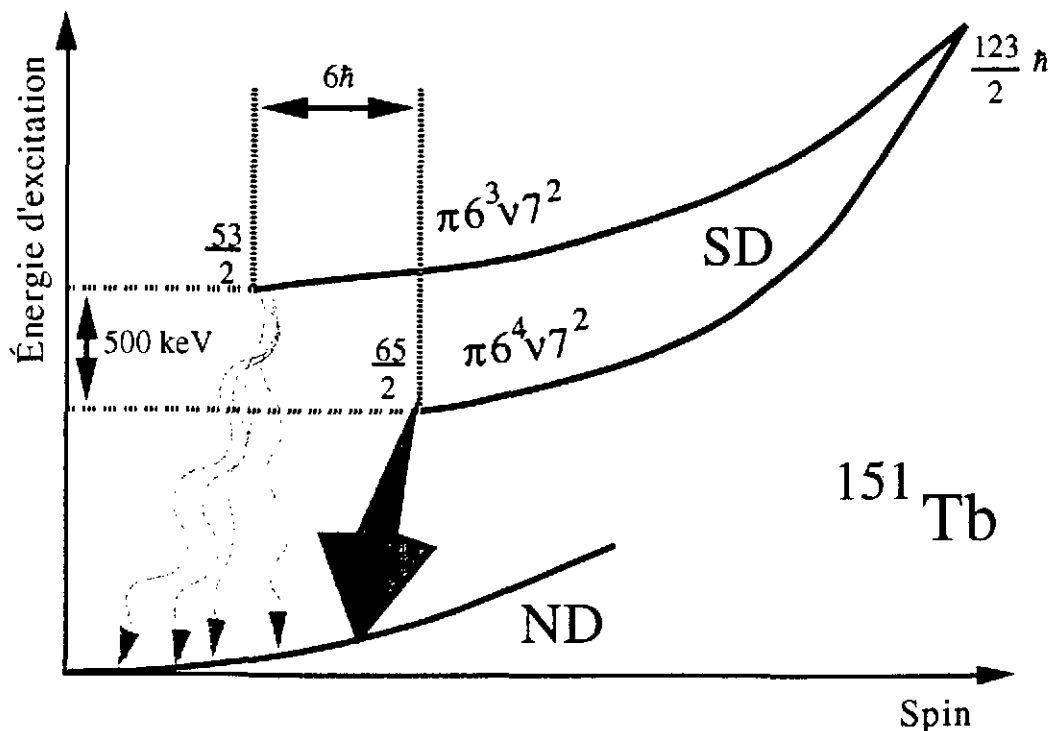


Figure III.27a: Vue schématique de la situation dans  $^{151}\text{Tb}$  : la bande SD excitée décroît à plus basse fréquence que la bande SD yrast.

observées à moyen spin. Cette région de masse semble être dominée par des décroissances statistiques.

On peut voir sur la figure III.27a le cas particulier de deux bandes de  $^{151}\text{Tb}$ . En supposant qu'à haut spin les deux bandes aient la même énergie d'excitation, la bande excitée se trouve, à bas spin, environ 500 keV au dessus de la bande yrast et décroît à plus bas spin que cette dernière [Cu93]. Sa décroissance alimente des états de spins compris entre  $35/2$  et  $45/2$  ayant tous, hormis un, une parité positive. Par contre la bande yrast n'alimente que des états de parité négative (hormis un état) de spins compris entre  $45/2$  et  $63/2$ . On s'attend, dans ce cas, à ce que l'excès d'énergie d'excitation de la bande excitée puisse jouer sur la balance Discret/Continu. L'analyse des spins moyens de sortie des bandes SD et des spins moyens d'entrée dans les états ND donne pour les deux bandes une différence de l'ordre de  $6 \hbar$  [Fi97].

Ce noyau pose donc le problème de l'influence de l'occupation des états intrus sur la décroissance vers les états ND. En effet, les états ND disponibles pour la décroissance sont les mêmes, et ces deux bandes SD choisissent chacune un chemin différent ce qui traduit soit un effet de structure dans le puits SD soit un effet liée à la différence d'énergie d'excitation. Plus généralement, on peut voir sur la figure III.27b, les profils d'intensité de bandes SD de cette région de masse. Ils se répartissent en trois groupes. Tout d'abord les structures  $\pi 6^2\nu 7^1$ ,  $\pi 6^3\nu 7^1$  et  $\pi 6^4\nu 7^1$ , qui décroissent toutes à un spin de l'ordre de  $26 \hbar$  et semblent indiquer que l'occupation d'orbitales intruses de neutrons ne jouent pas de rôle particulier. Par contre, les structures  $\pi 6^2\nu 7^2$  et  $\pi 6^3\nu 7^2$ , qui décroissent toutes à un spin de l'ordre de  $32 \hbar$  (six unités plus haut que le groupe précédent) et semblent indiquer que l'occupation d'orbitales intruses de protons ont une influence sur le processus de décroissance. Enfin, un troisième groupe est constitué des structures  $\pi 6^4\nu 7^2$

<sup>1</sup> $\pi 6^x\nu 7^y$  : x protons dans les orbitales intruses de proton N=6 et y neutrons dans les orbitales intruses de neutrons N=7.

	Nucleus (band number)	Symbol	Intruder orbital SD band configuration	Decay-out spin ( $\hbar$ )
①	$^{149}\text{Gd}(1)$	○	$\pi 6^2 \nu 7^1$	25.5
	$^{150}\text{Gd}(3)$	□	$\pi 6^2 \nu 7^1$	26
	$^{150}\text{Tb}(1)$	△	$\pi 6^3 \nu 7^1$	26
	$^{149}\text{Gd}(3)$	◇	$\pi 6^3 \nu 7^1$	26.5
	$^{151}\text{Dy}(1)$	◇	$\pi 6^4 \nu 7^1$	25.5
②	$^{150}\text{Gd}(1)$	○	$\pi 6^2 \nu 7^2$	32
	$^{149}\text{Gd}(2)$	□	$\pi 6^2 \nu 7^2$	31.5
	$^{151}\text{Tb}(1)$	△	$\pi 6^3 \nu 7^2$	32.5
③	$^{150}\text{Gd}(2)$	◇	$\pi 6^3 \nu 7^2$	31
	$^{152}\text{Dy}(1)$	●	$\pi 6^4 \nu 7^2$	26
	$^{151}\text{Tb}(2)$	★	$\pi 6^4 \nu 7^2$	26.5

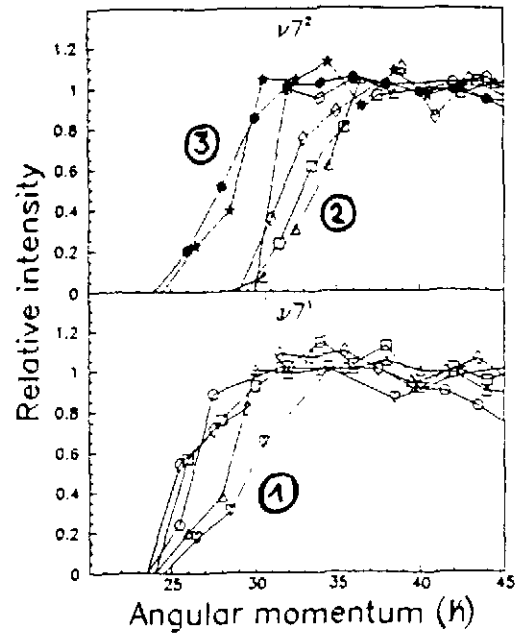


Figure III.27b: Étude systématique de l'influence de l'occupation des orbitales intruses sur le spin de sortie des structures SD de la région de masse  $A \approx 150$  [Cu93].

(fermeture des couches intruses neutron et proton) qui décroissent elles aussi à un spin de l'ordre de  $26 \hbar$ . On voit donc que, dans cette région de masse, le processus de décroissance peut être fortement influencé par l'occupation des orbitales intruses [Cu93].

### III.11.4. Cas de la masse $A=60$ : Désexcitation par émission d'un proton :

Des bandes SD ont récemment été découvertes dans la région de masse  $A \approx 60$  [Sv97] à l'aide du multidétecteur américain GAMMASPHERE [Le90].

L'étude de la décroissance de la bande SD du noyau  $^{58}\text{Cu}$  ( $N=Z$ ) a mis en évidence une décroissance par transitions gamma discrètes [Ru98].

Voyant apparaître, en coïncidence avec les transitions de la bande SD de  $^{58}\text{Cu}$ , des transitions gamma appartenant à  $^{57}\text{Ni}$ , les données de particules émises en coïncidences ont été étudiées. Ainsi, l'utilisation d'un détecteur additionnel  $4\pi$  au CsI MICROBALL [Sa95] a permis de démontrer que 8% de l'intensité passe par l'émission d'un proton de 2,345 MeV lors de la décroissance des états SD de  $^{58}\text{Cu}$  (sur la figure ci-contre les épaisseurs de traits sont proportionnelles aux intensités des transitions gamma) [Ru98].

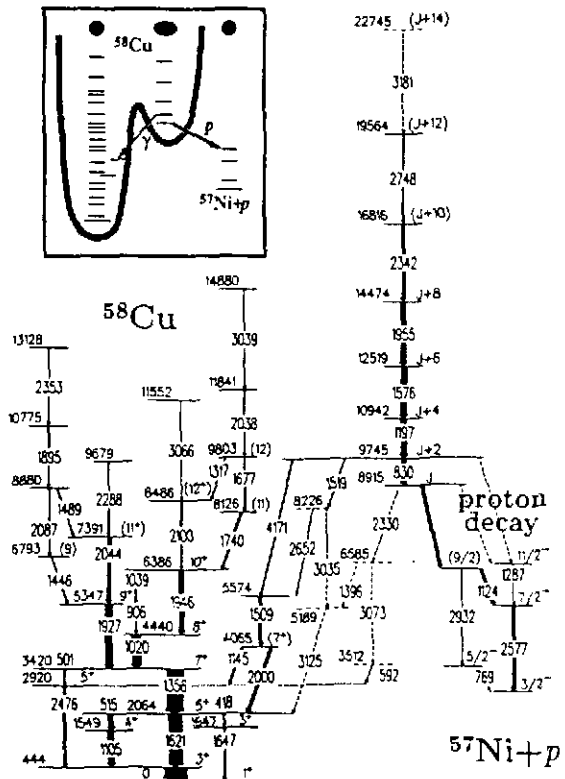


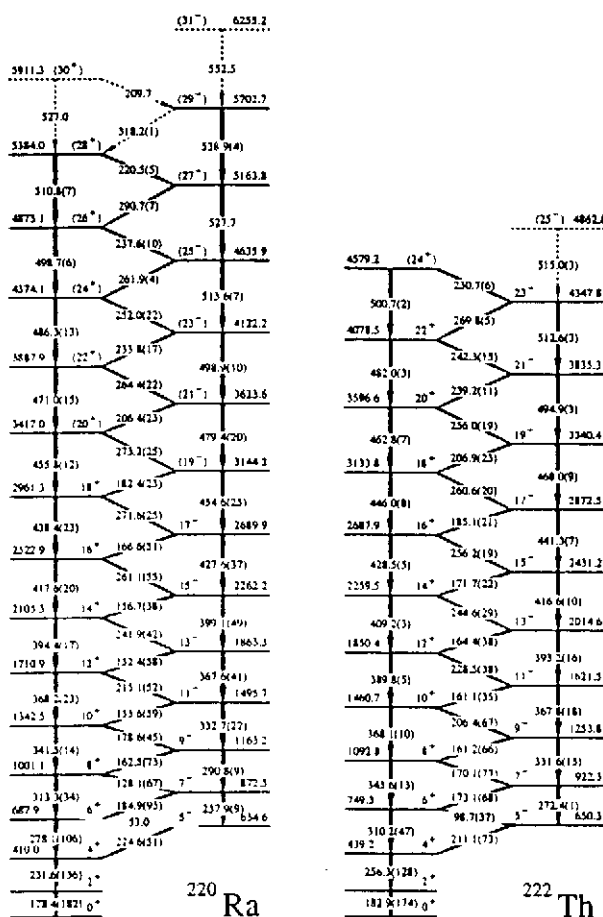
Figure III.28 : Schéma d'excitations proposé pour  $^{58}\text{Cu}$  reliant la bande SD aux états ND de ce noyau et du noyau voisin  $^{57}\text{Ni}$  via l'émission d'un proton [Ru98].

On peut donc envisager d'autres voies de désexcitation des bandes SD telles que l'émission de particules légères ou encore par fission. Ce dernier cas est d'ailleurs connu depuis longtemps dans la région de masse  $A \approx 240$ . En effet, du fait de la plus faible valeur de la barrière de fission pour ces noyaux, et comme leur nom l'indique, les isomères de fission ont une forte probabilité de décroître par fission.

### III.12 Déformation et vibration octupolaires.

L'étude des bandes SD de la région de masse 190 a donné lieu à l'observation de la désexcitation de la première bande excitée de  $^{190}\text{Hg}$  vers les états de la première bande SD de ce même noyau [Cr94, Cr95b] (Un phénomène similaire a été observé dans le noyau  $^{152}\text{Dy}$  [Da94]). Or du fait de la forte collectivité de ces bandes induite par la rotation, les transitions gamma intra bandes sont nettement favorisées par rapport aux transitions inter-bandes. Nous avons vu qu'il a été possible, dans le cas de bandes partenaires de signature, de tirer parti de ce type de transitions pour obtenir des informations sur les caractéristiques magnétiques de la structure SD.

Dans le cas présent, l'analyse précise des rapports d'embranchements met en lumière la présence de vibrations octupolaires. En effet les mesures de corrélations angulaires ainsi que des considérations d'intensité indiquent que les transitions inter-bandes sont du type E1 et que la valeur de la probabilité de transition  $B(E1) = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ uW}$  est deux ordres de grandeur plus grande que ce qu'on attend [Cr94, Cr95b]. Or on sait que, pour des noyaux présentant une déformation octupolaire (région des actinides), on observe de telles valeurs de  $B(E1)$ . Ceci suggère la présence de vibrations octupolaires dans le noyau  $^{190}\text{Hg}$ .



La forme octupolaire brisant la parité donne lieu à deux séquences de parité opposées reliées entre elles par des transitions E1. De tels états ont par exemple été observés dans les états de haut spin des isotones  $^{220}\text{Ra}$  et  $^{222}\text{Th}$  [Sm95] (voir figure III.29).

Certains noyaux riches en neutrons produits par fission spontanée présentent une forme triaxiale, d'autres des effets de corrélations octupolaires. Pour ces deux points, je vous renvoie au cours de W. R. PHILLIPS dans le cadre des études réalisées auprès du multidétecteur EUROGRAM.

Figure III.29 : Schémas de niveaux des noyaux  $^{220}\text{Ra}$  et  $^{222}\text{Th}$  présentant deux bandes à parité alternées signant un effet octupolaire [Sm95].

## III.13 Symétrie C4.

Nous avons déjà illustré à plusieurs reprises l'extrême sensibilité du moment d'inertie dynamique. C'est dans le noyau  $^{149}\text{Gd}$  que ce fait est encore le plus frappant. On observe en effet des oscillations régulières dans le comportement de la bande yrast sur une grande plage de fréquence (voir figure ci-dessous à gauche [F93]). Ce phénomène a été mis en évidence avec EUROGAM I [F93], mais il a fallu toute la puissance d'EUROGAM II pour écarter tout soupçon d'artefact résultant du traitement des hauts folds et des soustraction de fonds.

Si on observe maintenant les écarts en énergie entre les transitions gamma successives de cette bande (encart de la figure III.30 à gauche [Vi97]) on constate que les oscillations sont nettement plus importantes que les barres d'erreur. Pour reproduire ce comportement on doit introduire un déplacement des états de la bande SD de l'ordre de 60 eV alternativement vers le haut et vers le bas (ci-dessous à droite [Vi97]). Ceci suppose donc la présence d'une perturbation  $\Delta I=4$  qui pourrait être engendrée par une symétrie C4 du noyau, c'est à dire une légère déformation hexadécapolaire. Ce phénomène a suscité une activité des théoriciens [Ha94] d'autant plus forte qu'une dizaine de candidats de bandes SD présentant ce phénomène ont été proposés dans les régions de masse 130, 150 et 190.

L'étude des différents cas doit se faire avec grande prudence. En effet, un croisement de deux orbitales peut entraîner des oscillations du moment d'inertie dynamique sur une faible plage de fréquence. On n'observe cet effet dans la région de masse 190 que dans une plage de fréquence restreinte ( $^{194}\text{Hg}$  bande 2 et 3 et  $^{192}\text{Tl}$  bande B [Vi97]). Pour les bandes SD de  $^{131,132,133}\text{Ce}$ , le phénomène est présent à bas spin et disparaît lorsque le fréquence augmente [Se96]. Pour le moment seuls trois cas (ayant la même configuration en orbitales intruses) restent sans ambiguïté : les bandes yrast de  $^{149}\text{Gd}$ ,  $^{148}\text{Eu}$  et une bande excitée de  $^{148}\text{Gd}$ (bande 6) [Vi97].

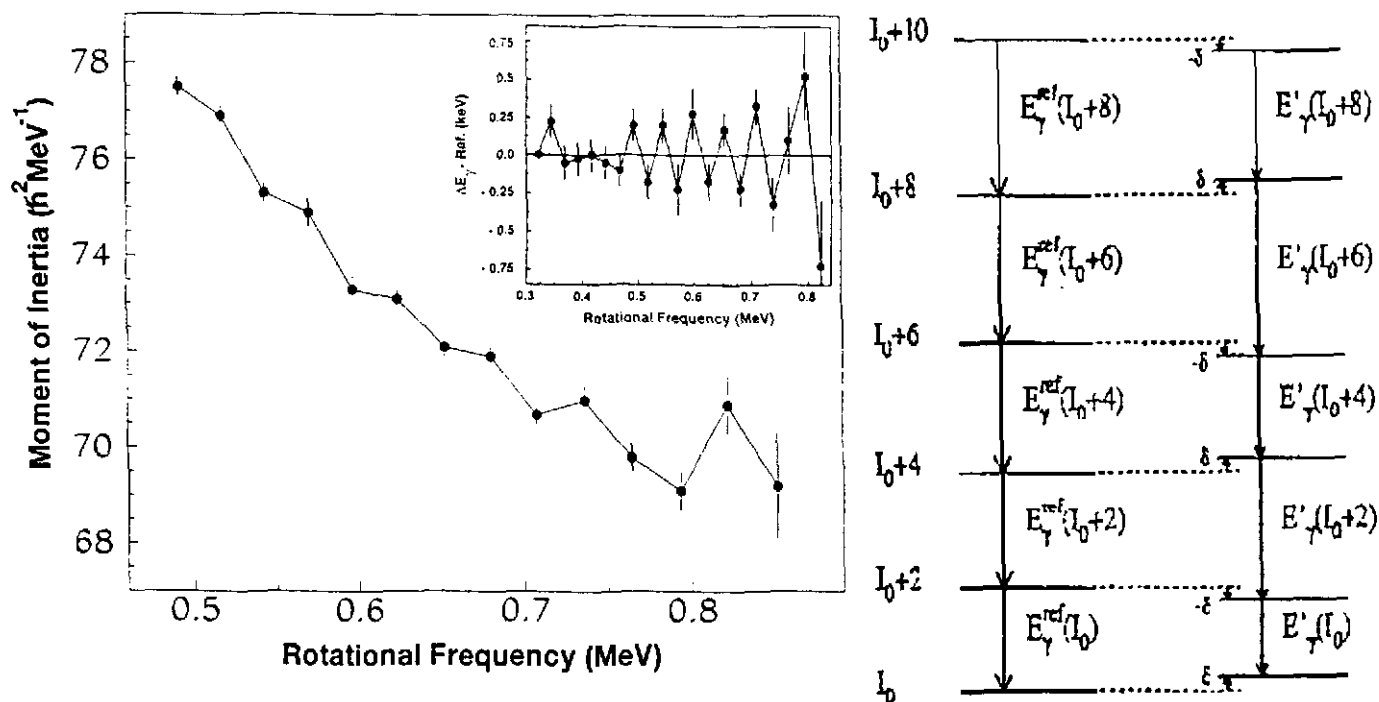


Figure III.30: A gauche : évolution en fonction de la fréquence de rotation du moment d'inertie dynamique et de l'écart  $\Delta E_{\gamma}$  entre deux raies gamma successives (encart) de la bande SD de  $^{149}\text{Gd}$ . A droite : représentation schématique de l'influence d'une perturbation du type C4 sur une bande de rotation de référence [Vi97].



### III.14 Bandes dipolaires.

Le développement des multidétecteurs a permis de favoriser l'observation de cascades de grande multiplicité. On a ainsi pu acquérir une connaissance détaillée des phénomènes liés aux états superdéformés. On a également pu accéder à des cascades de grande multiplicité correspondant au

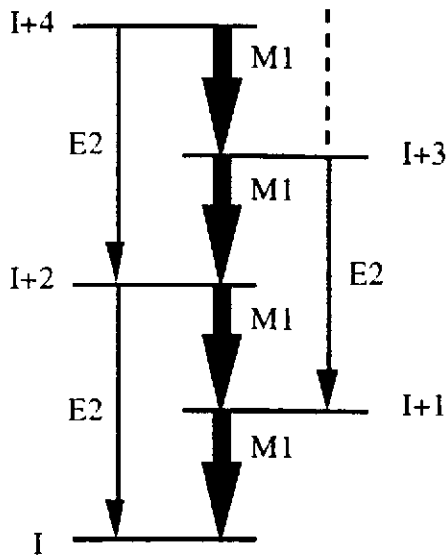


Figure III.31 : Vue schématique d'une cascade de transitions dipolaires reliées par des transitions E2 "cross over".

comportement à haut spin de noyaux dans le puits de déformation normale (ND). De nombreuses structures régulières comparables à des bandes rotationnelles ont ainsi été mises en évidence dans les isotopes de plomb déficients en neutrons [Du96]. La particularité de ces structures vient du fait que les transitions dipolaires de ces bandes ( $\Delta I=1$ ) sont dominantes ( $B(M1)=0,3$  à  $6$  uW) et les transitions quadrupolaires  $\Delta I=2$  ne sont que très rarement observées. En effet les probabilité de transition  $B(E2)$  correspondantes sont de l'ordre de  $12$  à  $50$  uW [Ka96]. Pour mémoire on peut se souvenir que dans le cas de bandes SD partenaires de signature de noyaux impairs, les transitions M1 reliant les deux bandes n'ont pu être observées qu'à bas spin dans la région de masse 190.

Ce phénomène peut s'expliquer par la dépendance en  $K^2/Q^2$  (où  $K$  est la projection du moment angulaire sur l'axe de symétrie et  $Q$  le moment quadrupolaire) du rapport  $B(M1)/B(E2)$ . Ainsi, une structure bâtie sur un état de haut  $K$  et de faible moment quadrupolaire pourra engendrer une telle séquence à haut spin. Or les isotopes légers de plomb présentent des isomère de haut  $K$  identifiés dans le puits ND. Ces noyaux sont donc naturellement candidats pour accueillir de telles structures.

Le spin, la parité et l'énergie d'excitation des états de ces bandes dipolaires sont connus que pour les noyaux  $A \leq 197$  dans cette région de masse, car les transitions les liant aux états de basse énergie d'excitation n'ont été observées que dans ces noyaux [Ka96].

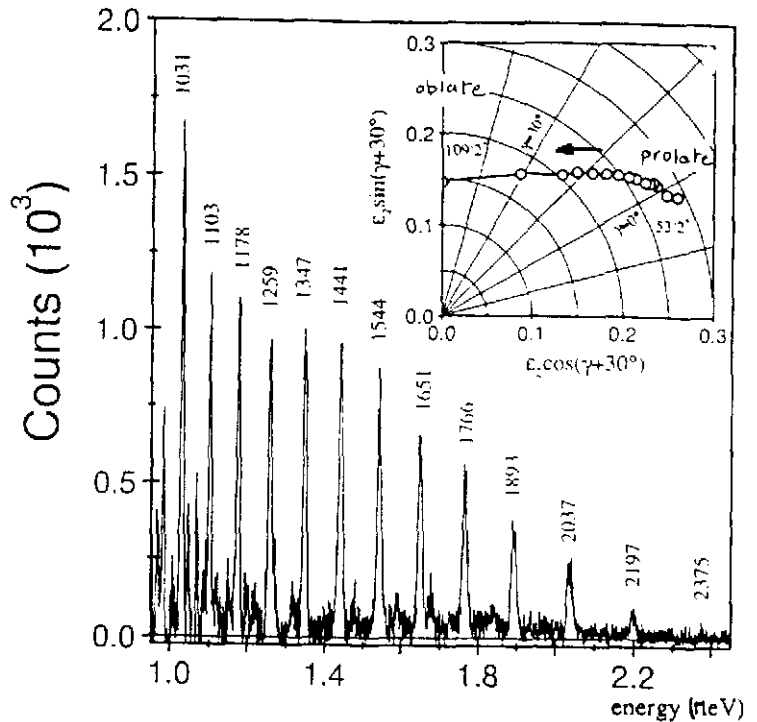
### III.15 Terminaison de bandes.

Les bandes SD sont en général bien "piégées" dans un puits de potentiel qui maintient la déformation constante. On qualifie ces puits de puits "rigides". Les noyaux ND présentent par contre une mollesse du puits vis-à-vis de la déformation. La puissance d'EUROGAM ayant permis d'étendre la connaissance des structures excitées dans le premier puits à des grandes valeurs de moment angulaire, il a été possible d'observer dans certains noyaux un passage graduel d'une forme prolata ( $\gamma = 0^\circ$ ) à une forme oblate ( $\gamma = 60^\circ$ ). Ces derniers peuvent ainsi augmenter le moment angulaire tout en diminuant le moment d'inertie. Cet effet peut se passer sur quelques transitions comme dans  $^{157,158}\text{Er}$  [Si94, Ga95a] ou bien très progressivement comme dans le noyau  $^{113}\text{I}$  [Pa93].

Or la forme oblate ( $\gamma = 60^\circ$ ) présente une symétrie autour de l'axe de rotation ce qui interdit la rotation collective. Le noyau doit donc générer le moment angulaire par un

processus d'alignement sur l'axe de rotation des moments angulaires des orbitales de valence ce qui implique que la bande de rotation se termine au moment où tous les nucléons de valence sont alignés au maximum sur l'axe de rotation.

Figure III.32 : Exemple typique d'une terminaison de bande dans  $^{113}\text{I}$  [Pa93]. On peut suivre, dans l'encart, l'évolution progressive de la déformation d'une forme prolate ( $\gamma=0^\circ$ ) vers une forme oblate ( $\gamma=60^\circ$ ). A ce changement de déformation correspond un changement progressif d'inertie donc d'espacement entre les raies gamma. La bande se termine lorsque le noyau est oblate.



### III.16 Polarisation du coeur.

Nous avons tous appris que le modèle en couches prédit une forme sphérique pour toutes les couches entièrement remplies et qu'un nucléon de valence pouvait "dicter" une déformation au noyau. Le coeur dur pourra bien évidemment réagir pour compenser en partie cet effet (polarisation du coeur). Il était donc bien tentant d'appliquer ce principe aux bandes superdéformées. Or nous avons vu que l'incertitude sur les pouvoirs d'arrêt électroniques empêche d'accéder à une mesure précise des déformations nucléaires. On peut par contre procéder par comparaison de résultats obtenus dans des situations "d'arrêt" similaires. On obtient ainsi des barres d'erreurs relatives faibles tout en conservant les valeurs des barres d'erreur absolues.

Ainsi les déformations de différentes bandes SD de  $^{149}\text{Gd}$  et des bandes yrast de  $^{148}\text{Gd}$  et  $^{152}\text{Dy}$  ont été déterminées en utilisant une méthode de DSAM dans des expériences utilisant la même cible [Sa96, Ri97].

On constate que les mesures se regroupent suivant la valeur du moment quadrupolaire pour ces bandes : les bandes correspondant à la même composition en orbitales intruses présentent un même moment quadrupolaire  $Q_0$  et ce, indépendamment de la masse du noyau. En effet, les bandes identiques  $^{149}\text{Gd}(5)$ ,  $^{148}\text{Gd}(4)$  et  $^{152}\text{Dy}(1)$  ont, par exemple, le même moment quadrupolaire  $Q_0=17,5 \text{ eb}^2$ .

	Bande	assignation	$Q_0(\text{exp})$	$\epsilon_2$
$^{148}\text{Gd}$	1	$\pi 6^2 \nu 7^1$	14,6(2)	0,545
	2	$\pi 6^2 \nu 7^1$	14,8(3)	0,545
	5	$\pi 6^4 \nu 7^2$	17,8(13)	0,618
$^{149}\text{Gd}$	1	$\pi 6^2 \nu 7^1$	15,0(2)	0,555
	2	$\pi 6^2 \nu 7^2$	15,6(5)	0,556
	3	$\pi 6^3 \nu 7^1$	15,2(6)	0,576
	4	$\pi 6^4 \nu 7^2$	17,5(8)	0,612
$^{152}\text{Dy}$	1	$\pi 6^4 \nu 7^2$	17,5(4)	0,582

<sup>2</sup>Comme le moment quadrupolaire tient compte de la masse, une même valeur de  $Q_0$  mesurée dans des noyaux de masse  $A$  différente, implique une valeur différente de la déformation ( $\epsilon_2$ ) pour chacun des noyaux.

Il semble donc que les orbitales non intruses n'aient pas non plus d'influence sur le moment quadrupolaire dont la valeur serait "dictée" par la composition en orbitales intruses du noyau.

### **Conclusion.**

Nous avons parcouru, au fil de ce cours, l'horizon de recherche ouvert par les récents développements de multidétecteurs gamma. Nous avons ainsi abordé le phénomène de superdéformation, ses apports et les questions qu'il laisse encore sans réponse à ce jour. Nous avons aussi effleuré les phénomènes étudiés dans les noyaux de déformation normale tels que les structures dipolaires, les coexistences et transitions de formes, les terminaisons de bandes et les vibrations octupolaires.

Nous avons vu que l'étude des bandes superdéformées apporte des informations sur la collectivité nucléaire. En effet, la mesure du moment quadrupolaire donne l'évolution de la déformation et l'étude de l'inertie permet d'extraire des informations précieuses sur l'évolution des forces nucléaires en fonction de la fréquence de rotation. Ce dernier point a d'ailleurs permis, grâce à une collaboration étroite entre expérimentateurs et théoriciens, de faire un grand pas dans le traitement de l'appariement nucléaire. Les données des bandes SD de la région de masse 150 donnent des informations sur les très faibles appariements et celles de la région de masse 190 sur la disparition et les effets de blocage de l'appariement.

Les bandes superdéformées donnent également des renseignements sur la structure quantique du noyau. En effet, la mesure de nombreuses bandes superdéformées excitées a permis d'étudier en profondeur le phénomène de bandes identiques et de mettre en lumière l'influence des orbitales intruses. La mesure de facteurs gyromagnétiques dans certains noyaux impairs de la région de masse 190 a donné accès aux caractéristiques quantiques de l'orbitale occupée par le nucléon célibataire. Les bandes superdéformées fournissent ainsi des indications expérimentales extrêmement précises sur les orbitales nucléoniques situées au voisinage du niveau de Fermi et sur leur position relative dans les cas où on observe un croisement de deux niveaux quantiques. Ceci impose des contraintes pointues sur les calculs théoriques et sur les développements de forces nucléaires.

De nombreuses avancées technologiques ont été associées au passage d'EUROGAM à EUROBALL, notamment le développement des détecteurs composites CLOVER et CLUSTER et d'un standard d'électronique intégrée VXI. Ce programme a également permis l'élaboration d'autres multidétecteurs tels EXOGAM, destiné à des mesures utilisant des faisceaux radioactifs. Les nouvelles campagnes de mesures auprès d'EUROBALL incluant de plus en plus des détecteurs additionnels devraient nous amener à bien des découvertes encore et nous permettre d'éclaircir les nombreux points restant encore dans l'ombre. C'est notamment le cas pour la décroissance des bandes superdéformées, l'hyperdéformation et les états superdéformés de bas spin dans la région de masse 190.

## Remerciements

Je tiens ici à remercier les organisateurs de l'École Joliot-Curie, en particulier Y. Abgrall, d'avoir bien voulu m'inviter à donner ce cours. Je tiens également à remercier mes collègues de l'IREs et de la collaboration EUROBALL ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce cours notamment Marie-Madeleine Aléonard pour son aide efficace et Norbert Schulz pour ses conseils avisés. Je dédie ce cours à Marie Geneviève Porquet qui a su me transmettre sa passion pour la spectroscopie nucléaire.

## Bibliographie.

- [Ai97a] M. Aiche et al., NIM A391(1997)329.
- [Ai97b] M. Aiche et al., Zeit. f. Physik A358(1997)175.
- [Al92] J. Alexander, IEEE Transactions on nuclear Science Vol 39 N°4 (1992).
- [Az91] F. Azaiez et al., Phys. Rev. Lett. 66(1991)1030.
  
- [Ba95] C. Baktash, B Haas et W. Nazarewicz, ann. rev. Nucl. Part. Sci. 45(1995)485.
- [Be92] F. A. Beck, Prog. Part. Nucl. Phys 28(1992)443.
- [Be96] C. W. Beausang et J. Simpson J. Phys. G22(1996)527.
- [Bi91] G. Bizar et al., Conférence Ierapetra (1991) world scientific ISBN 981-02-0861-8.
- [Bo96] S. Bouneau et al., Phys Rev C53(1996)R9.
- [BS95] Balraj Singh, R. B. Firestone et S. Y. Frank Chu, Table of Superdeformed Nuclear Bands and Fission Isomers, Second Edition LBL-380034(Nov 1995) Lawrence Berkeley Laboratory.
- [By90] T. Byrsky et al., Phys Rev Lett 64(1990)1654.
  
- [Ch83] R. Chapman et al., Phys. Rev. Lett. 51(1983)2265.
- [Cr94] B. Crowell et al., Phys. Lett. B333(1994)320.
- [Cr95a] A.J. Cresswell et al., Phys. ReV C52(1995)1934.
- [Cr95b] B. Crowell et al., Phys. C51(1995)R1599.
- [Cu88] D. Curien, thèse de l'université Louis Pasteur (Strasbourg I) (1988), CRN/PN 88-17.
- [Cu93] D. Curien et al., PRL 71(1993)2559.
  
- [Da94] P. J. Dagnal et al., Phys. Lett. B335(1994)313.
- [De95a] I. Deloncle et al., NIM A357(1995)151.
- [De95b] I. Deloncle et al., J. Phys. G21(1995)L35.
- [De96] G. De France et al., Phys Rev C53(1996)R1070.
- [De97] I. Deloncle et al., Z. Phys. A358(1997)181.
- [Dr92] M. W. Drigert et al., Nucl. Phys. A530(1992)452.
- [Du95] J. Duprat, thèse de l'université Paris XI, Orsay (1995), IPNO-T-95.02.
- [Du96] L. Ducroux et al., Z. Phys. A356(1996)241.
- [Du97] G. Duchêne, communication privée.
- [Du98] J. Dudek, communication privée.
  
- [Fi97] C. Finck thèse de l'université Louis Pasteur (Strasbourg I) (1997).
- [Fl92] S. Flibotte et al., Phys. Rev. C45(1992)R889.
- [Fl93] S. Flibotte et al., Phys. Rev. Lett. 71(1993)4299.
  
- [Ga94] B. Gall, thèse de l'université Paris XI, Orsay (1994) et B. Gall et al., Zeit. Phys. A348(1994)183.
- [Ga95a] S. J. Gale et al., J. Phys. G21(1995)193.
- [Ga95b] B. J. P. Gall et al., Phys. Lett. B345(1995)124.
- [Ga97] C Gautherin et al., Prog. Part. Nucl. Phys. (1997)194.

- [Ha89] D. Habs Nucl. Phys. A502(1989)105c.  
 [Ha91] B. Haas, Cours de l'Ecole Joliot-Curie 1991.  
 [Ha94] I. Hamamoto et B. Mottelson Phys. Lett. B(1994)294.  
 [He94] R. G. Henry et al., Phys. Rev. Lett. 73 (1994)777.
- [Jo93] M. J. Joyce et al., Phys. Rev. Lett. 71(1993)2176.
- [Ka96] M. Kaci, thèse de l'université Paris XI, Orsay (1996) et sous presse.  
 [Ko95] A. Korichi et al., Phys. Lett. B345(1995)403.
- [La90] I. Lazarus et A. Richard, European Ge card instruction manual, 1990  
 [Le90] I.-Y. Lee Nucl. Phys. A520(1990)641c.  
 [Li92] Y. Liang et al., Phys. Rev. C46(1992)R2136.  
 [Lo96] A. Lopez Martens et al., Phys. Lett. B380(1996)18.  
 [Lu96] R. Lucas, Pour la science, Dossier hors série octobre 1996.
- [Mo76] H Morigana et T. Yamazaki, In Beam Gamma-Ray Spectroscopy, North-Holland ISBN 0-7204-0297-2 (1976).  
 [Mo79] B. Mottelson, High spin phenomena in nuclei (1979) Argonne National Laboratory ANL/PHY-79-4
- [No90] P. J. Nolan, Nucl. Phys. A520(1990)657c.
- [Pa93] E. S. Paul et al., Phys. Rev. C48(1993)R490.  
 [Pe94] C. M. Petrache et al., Nucl. Phys. A579(1994)285.  
 [Po62] S. M. Polikanov Soc Phys JETP 15(1962)1016.  
 [Po98] M. G. Porquet et al., communication privée et à paraître.
- [Ri90] M.A. Riley et al., Nucl. Phys. A512(1990)178.  
 [Ri97] C. Rigollet thèse de l'université Louis Pasteur (Strasbourg I) (1997).  
 [RS80] P. Ring et P. Schuck The nucléar many body problem. Springer Verlag 1980.  
 [Ru98] D. Rudolph et al., submitted to Phys. Rev. Lett. (1998).
- [Sa95] D. G. Sarantites et al., Nucl. Instr. Meth. A354(1995)591.  
 [Sa96] H. Savajol et al., Phys. Rev. Lett. 76(1996)4480.  
 [Sc97] J. N. Scheurer et al. NIM A 385(1997)501.  
 [Se92] P. B. Semmes et al., Phys. Rev. Lett. 68(1992)460.  
 [Se96] A. T. Semple et al, Phys. Rev. Lett. 76(1996)3671.  
 [Si94] J. Simpson et al., Phys. Rev. Lett. B327(1994)187.  
 [Sl84] G. Sletten et al., Phys. Lett. B135(1984)33.  
 [Sm92] G. Smith et al., Phys. Rev. Lett. 68(1992)158.  
 [Sm95] J. F. Smith et al., Phys. Rev. Lett. 75(1995)1050.  
 [Sp72] H. J. Specht et al., Phys. Lett. B41(1972)43.  
 [Sp95] K. Spohr et al., Acta Phys. Polonica B26(1995)297.  
 [St68] V. M. Strutinsky. Nucl. Phys. A95(1968)420.  
 [Sv97] C. E. Svensson et al., Phys. Rev. Lett. 79(1997)1233.
- [Tw86] P. J. Twin et al., Phys. Rev. Lett. 57(1986)811.
- [Vi96] J. P. Vivien et al., communication privée 1996.  
 [Vi97] J. P. Vivien Journées thématiques de l'IPN 1997.
- [Wi92] D. F. Winchell et al., Phys. Lett. B289(1992)267.  
 [Wi94] P. Willsau et al., Nucl. Phys. A574(1994)570.  
 [Wu95] C. Y. Wu et al., Phys. Rev. C51(1995)1025.
- [XL96] Xiao-Ling Han et Cheng-Li Wu Atomic Data and Nuclear Data Tables Vol 63(1996)117.

## THE SPECTROSCOPY OF FISSION FRAGMENTS

W.R.Phillips

Department of Physics and Astronomy,  
University of Manchester, Manchester, M13 9PL, U.K.

### RESUME

L'utilisation de multidétecteurs  $\gamma$  à haute résolution et grande sélectivité dans l'étude des raies  $\gamma$  émises par des fragments de fission a fourni un ensemble de données sur les noyaux riches en neutrons qui n'auraient pas pu être obtenues d'une autre façon. Les structures yrast et yrare de nombreux fragments de fission riches en neutrons ont été observées durant la dernière décennie. Ce papier décrit le champ d'études abordé, les techniques utilisées, ainsi que quelques résultats tirés d'expériences récentes.

### ABSTRACT

High-resolution measurements on  $\gamma$  rays from fission fragments have provided a rich source of information, unobtainable at the moment in any other way, on the spectroscopy of neutron-rich nuclei. In recent years important data have been obtained on the yrast- and near yrast-structures of neutron-rich fission fragments. We discuss the scope of measurements which can be made on prompt gamma rays from secondary fission fragments, the techniques used in the experiments and some results recently obtained.

### 1. INTRODUCTION

Experiments made to study neutron-rich nuclei with as large a neutron excess as possible are performed on fragments produced in low-energy fission such as spontaneous fission or fission induced by low-energy neutron or proton beams. This is because at high excitations of the fissioning system more neutrons are emitted in the cooling down to secondary fragments than at low excitation. Fission at low energy usually gives rise to a characteristic double-humped mass distribution. The mass and charge distributions of the secondary fragments which can be studied are determined by the particular fission process and by the power of the gamma-ray detection array used in the experiments. Figure 1 shows a schematic picture of a particular mode of fission of the nucleus  $^{248}\text{Cm}$ , and serves to define primary and secondary fragments as the terms are used in this paper.

Results discussed here were obtained using the EUROGAM array, and the techniques outlined were designed for use with that array although they are applicable to any similar detection equipment. This paper first discusses the scope of present measurements on secondary fragments from low-energy fission, showing the nuclei studied and the spin range over which discrete levels in these nuclei have been observed. Following that, the techniques

used to obtain level schemes, level lifetimes, to identify new nuclei and to obtain gamma-ray correlation and polarisation data are outlined. Finally some recent results obtained with EUROGAM2 are presented.

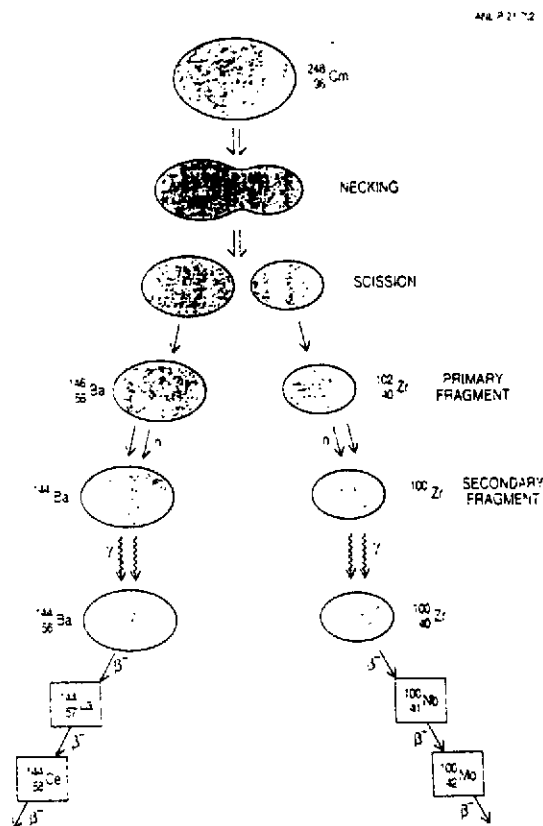


Figure 1. A schematic drawing showing a path to formation of a particular pair of secondary fragments,  $^{144}\text{Ba}$  and  $^{100}\text{Zr}$ , in the spontaneous fission of  $^{248}\text{Cm}$ .

## 2. MASS, CHARGE AND SPIN DISTRIBUTIONS

The scope of spectroscopic studies is determined by the distribution of secondary fragments made in realisable fissioning systems and by the range of spins the fission mechanism produces in those fragments. Yields of different fission products depend on the mass and charge of the nucleus which fissions and on its excitation energy. In general, fission of the ground state of a nucleus with a large  $N/Z$  ratio produces the most neutron-rich nuclei. Spontaneous fission and thermal-neutron induced fission have double-humped mass distributions with two separate peaks centred close to masses 100 and 140. It has been found that the mean mass of the higher mass peak remains the same for low energy fission of actinide nuclei of different mass but the mean mass of the lower peak increases with increase in mass of the fissioning nucleus. Thus, yields of nuclei in the low-mass hump produced in the thermal neutron induced fission<sup>1)</sup> of  $^{235}\text{U}$  are different from their yields in the spontaneous fission<sup>2)</sup> of  $^{252}\text{Cf}$ .

For a given mass number  $A = (N + Z)$  of a secondary, prompt  $\gamma$ -emitting fragment,

the most probable atomic number  $Z_P(A)$  is given to a first approximation by

$$Z_P(A) = \frac{Z_f}{(A_f - \nu)} \times A.$$

where the subscript  $f$  refers to the fissioning nucleus and  $\nu$  is the average number of neutrons emitted per fission. The charge distribution for a given  $A$  is given, to a good approximation, by

$$P(A, Z) = \sigma_Z(2\pi)^{1/2} \exp[-(Z_P(A) - Z)^2/2\sigma_Z^2],$$

where  $\sigma_Z$  the dispersion is close to 0.5.

For a given atomic number of the secondary fragment the mass number distribution is also given by an expression of the above form with the mass dispersion  $\sigma_A$  about equal to  $0.5 \times (A_f/Z_f)$ .

The spin distributions in fission fragments, together with the sensitivity of the detection equipment, determine the range of spins over which level structures in the fragments can be observed. The average spin in spontaneous fission fragments was known from early experiments<sup>3,4)</sup> to be in the range  $6-7\hbar$ . However, there is evidence that the spin distribution is skewed towards the high-spin side, and with the latest generation of  $\gamma$ -ray detector arrays it is possible to examine levels in strongly populated secondary fragments with spins up to  $\sim 20\hbar$ .

Normally fragments are formed hot at scission. A typical primary fragment may have an excitation energy of  $\sim 20$  MeV and a spin of  $\sim 7\hbar$ . It cools down with emission of two neutrons leaving a secondary fragment at excitation energy of a few MeV. The secondary fragment then continues to deexcite by  $\gamma$ -ray emission. The  $\gamma$  rays in the secondary fragment arise from a broad range of excitation energy corresponding to the spread in energies of the neutrons emitted from the primary fragment. They also arise from levels with a large spread of spins corresponding to the spread in the primary fragments introduced by the fission mechanism. There are also many  $\gamma$ -ray paths to the ground state from any point in this entry region. A variable number of *statistical*  $\gamma$  rays, with essentially continuous energy distribution and relatively high energies of an MeV or greater, takes the secondary fragment from the initial chaotic entry region down to a more ordered regime in which there are rather few yrast or near-yrast levels. This is illustrated schematically in figure 2. The number of statistical  $\gamma$  rays depends partly on the initial excitation energy of the primary fragment; in spontaneous fission there are typically one to three statistical  $\gamma$  rays per fragment.



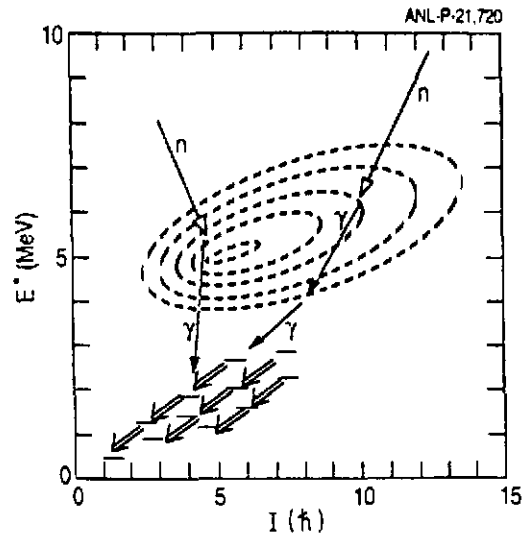


Figure 2. A schematic diagram illustrating a typical entry region into a secondary fragment.

Figure 3 shows the average spins  $\langle I \rangle$  of formation of discrete levels in fragments from three different fission processes. The data were obtained from direct analyses<sup>5)</sup> of the intensities of the discrete  $\gamma$  rays. The figure shows that heavy-ion induced fusion-fission gives higher values of  $\langle I \rangle$  than low-energy fission, and should therefore allow the construction of level schemes up to higher spins. However, this advantage is outweighed by the disadvantages that (i) the mass distributions are broadened, making it experimentally more difficult to examine in detail any one product, and (ii) the fragments are on average less neutron-rich than in low energy fission because more neutrons are emitted in total as pre-fission neutrons and/or from the more highly excited primary fragments.

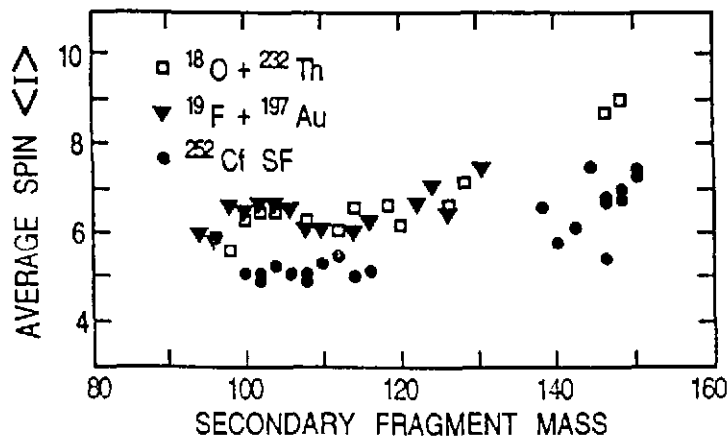


Figure 3. Average spins in secondary fission fragments.

### 3. EXPERIMENTAL TECHNIQUES

The chief difficulty when performing experiments on prompt  $\gamma$  rays from fission prod-

ucts is that many pairs of fragments are formed, each one typically emitting several  $\gamma$  rays. A particular nucleus under investigation needs a high degree of selectivity, and in prompt  $\gamma$ -ray experiments this is obtained by demanding time coincidences between (usually) three or more  $\gamma$  rays from the same fission event. Fragments come in pairs, and greater than 99% of pairs have  $Z_1 + Z_2$  equal to  $Z_f$ . Gating on a known  $\gamma$  ray in a particular nucleus ( $A_1, Z_1$ ) gives rise to coincident lines in several nuclei since there is a range of mass numbers  $A_2$  accompanying  $Z_2$ . Although this complicates coincidence spectra, it can sometimes be helpful since it enables spectra containing (apart from impurities) only lines in two nuclei to be produced.

The usual techniques of  $\gamma$ -ray analysis are used to determine partial decay schemes in fragments. Triple coincidences are organised into three-dimensional arrays, each axis corresponding to energies deposited in a germanium detector. Gating on two axes enables spectra of coincident  $\gamma$  rays to be produced and used to build up decay patterns. The starting points are usually lines known from earlier work, often studies of mass isolated beta-decaying fission product ground states. When nuclei about which nothing was previously known have been examined their identification has been made by comparing the yields of complementary fragments: the average complementary fragment mass is a good signature of the mass of the new fragment studied<sup>6,7</sup>.

The nearly  $4\pi$  coverage of EUROGAM2 and the close arrangement of four individual germanium crystals in the 'clover' detectors used in that array have allowed the application of  $\gamma$ -ray correlation and polarization techniques to greatly increase the spectroscopic information obtained on fission fragments.

### 3.1 Directional Correlations

When prompt  $\gamma$  rays are observed in an array without observation of fragments, the first  $\gamma$  ray in a decay sequence arises from the decay of a state which is unaligned, i.e. equally populated amongst its magnetic substates. For a cascade of two  $\gamma$  rays the second is then distributed anisotropically with respect to the first and if the directional correlation is measured, information can be obtained on the spins of the levels involved in the transitions and on the multipolarities of the two  $\gamma$  rays. Measurements on double cascades as described above are of limited use because of the lack of selectivity when using only a single coincidence gate on a fission spectrum. If selected triple coincidences are observed, and the energy information stored in a three-dimensional data array (cube) two gates can be used to increase the resolving power. If the first axis of a cube containing triple coincidences corresponds to  $\gamma$  rays observed anywhere in the array, while the other two axes correspond to detectors with roughly the same angle  $\theta$  between them, gating on the first axis for selectivity will (to a good approximation because of the near-isotropy of EUROGAM2) maintain the non-alignment of the top state in a cascade observed on the other axes. Cubes for detectors at different angles  $\theta$  then allow the determination of the  $\gamma$ - $\gamma$  directional correlation function. Figure 4 shows the validity of this approach as applied to cascades of known properties. For the cascades of two stretched electric quadrupoles (E2-E2) on the left-hand side of the figure the theoretical value of the coefficients  $A_{22}/A_{00}$

and  $A_{44}/A_{00}$  are 0.102 and 0.009 respectively. For the stretched E1-E2 cascades on the right the theoretical values are -0.07 and zero respectively.

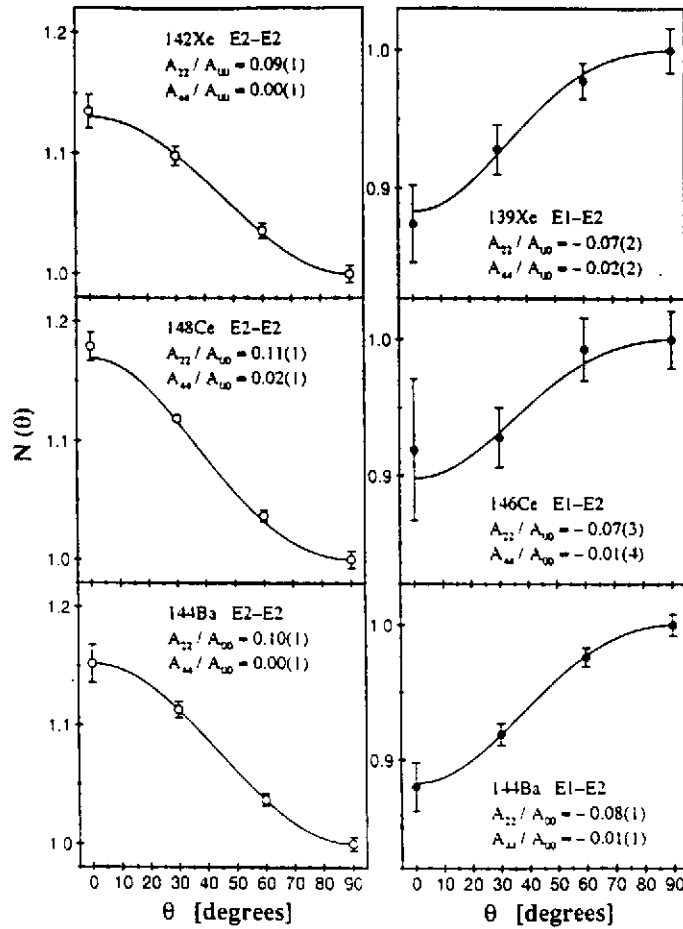


Figure 4. Observed  $\gamma-\gamma$  directional correlations for stretched cascades as described in the text.

### 3.2 Polarizations

There is a higher cross section for Compton-scattering of a linearly polarized photon in a direction perpendicular to the plane containing the electric field vector and the momentum vector than there is in a direction parallel to that plane. The construction of the clover detectors in EUROGAM2, in which four germanium crystals sit side by side forming a square, allows these detectors to be used as Compton polarimeters. The clovers are placed close to  $90^\circ$  to the beam direction and arranged such that scattering from one element to another either corresponds to scattering in the plane defined by the beam axis and the line joining the target to the clover detector, or scattering perpendicular to that plane.

In a  $\gamma_1-\gamma_2$  cascade beginning on a state which is equally populated amongst its sub-states the probability of there being a coincidence event for two detectors with angle  $\theta$  between them, and with  $\Psi$  the angle between the direction of the electric field vector and

the plane containing the momentum vectors of the two  $\gamma$  rays, is proportional to <sup>8)</sup> the function

$$W(\gamma_2; t_1, t_2, \theta, \Psi) = \sum_{\lambda} \left( A_{\lambda}(t_1, t_2) P_{\lambda}(\cos \theta) + A_{\lambda}^{(p)}(t_1, t_2) P_{\lambda}^{(2)}(\cos \theta) \cos(2\Psi) \right).$$

where  $P_{\lambda}$  and  $P_{\lambda}^{(2)}$  are Legendre polynomials and  $t_1$  and  $t_2$  label the properties of the two transitions and the states between which the transitions are made. The coefficients  $A$  depend upon the pathways  $t$ . If the detection system is insensitive to polarization, integrating over all angles  $\Psi$  gives the  $\gamma$ - $\gamma$  directional correlation function discussed in Section 3.1.

If data are taken with  $\gamma_1$  detected in Ge detectors close to zero or  $180^\circ$ , and  $\gamma_2$  detected via summing scattered signals in two elements of a clover near  $90^\circ$  the experimental arrangement approximates that described in the opening paragraph of this section. For the angle  $\Psi$  equal to zero, the scattering parallel to the plane defined by the momentum vectors of  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  has a lower probability than that perpendicular to the plane, and vice versa if the angle  $\Psi$  equals  $\pi/2$ . The polarization of a beam of  $\gamma_2$  photons detected in two elements of a clover in coincidence with  $\gamma_1$  can be defined as

$$P = \frac{W(90, 90) - W(90, 0)}{W(90, 90) + W(90, 0)}.$$

Using equation (3.1) with  $\theta$  equal to  $90^\circ$ , this can be calculated for given pathways  $t$  and depends on the electric and magnetic nature of the transition  $\gamma_2$ . It can be measured by observing the number of scattered events  $N_{\parallel}$  and  $N_{\perp}$  in appropriate elements of the clover detectors.

$$P = \left( \frac{N_{\perp} - N_{\parallel}}{N_{\perp} + N_{\parallel}} \right) \cdot \left( \frac{R + 1}{R - 1} \right).$$

Comparison of measurement with predictions then gives information on the multipolarity and parity of the transition  $\gamma_2$ . In the above formula  $R$  is a parameter depending on the different Compton scattering cross-sections at zero and  $90^\circ$ . For non-point detectors averaging over all angles involved gives

$$P = \frac{1}{Q} \cdot \frac{aN_{\perp} - N_{\parallel}}{aN_{\perp} + N_{\parallel}},$$

where  $Q$  is the polarization sensitivity of the polarimeters, obtained by calibration, and  $a$  is a factor close to unity which takes into account any instrumental anisotropy.

Figure 5 shows the validity of the polarization technique as applied to cascades of known properties in various nuclei. In spite of relatively large errors on the data they can still easily distinguish between transitions of pure electric or pure magnetic type because the two  $P$  values, although equal, have opposite sign.

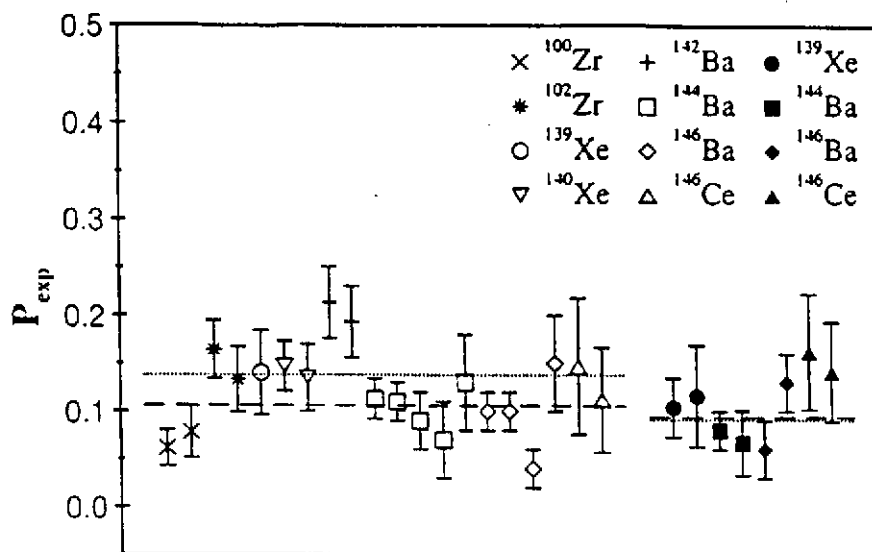


Figure 5. Observed polarisations for known stretched E2-E2 and E1-E2 cascades in fission fragments. Full symbols are E1-E2 and open are E2-E2. The horizontal dashed lines show averages of experimental values: the dotted lines show predictions.

### 3.3 Lifetimes

For a fission source uniformly embedded in a solid environment the fission fragments to a good approximation are all stopped in a very short time and with ranges of 3-15 mg  $\text{cm}^{-2}$  depending on the stopping material. The initial energy of a typical fragment from spontaneous fission is about 1 MeV per nucleon, and the range in gold of a fragment of this energy is typically about 13 mg  $\text{cm}^{-2}$  ( $\sim 7 \times 10^{-4}$  cm) with a slowing down time of about 1.5 ps. For a source embedded in a material of lower average atomic number, the rate of energy loss per unit length is lower, the range in mg  $\text{cm}^{-2}$  somewhat lower and the slowing down time a little longer. If a secondary fragment emits a  $\gamma$  ray from a state with a lifetime shorter than the slowing down time, the energy of the  $\gamma$  ray is Doppler shifted by an amount depending on the speed of the fragment at the time of emission and the angle of emission of the  $\gamma$  ray with respect to the direction of motion of the fragment. For  $\gamma$  rays detected singly in an array without observation of the fragments the result is a symmetric broadening of the line shapes about the energies the  $\gamma$  rays would have if emitted from fragments at rest. For an approximately isotropic array  $\gamma$  rays observed in coincidences taken between all detectors also originate from unaligned states and the result is a similar broadening of the line shape. Observation of this broadening, and analyses made assuming knowledge of the slowing down process and of the manner in which the states are produced from the entry points into the secondary fragments, have been used<sup>9)</sup> to measure lifetimes. The lineshapes must be extracted cleanly enough and the lifetimes must be comparable to the slowing down time for good results to be obtained. Figure 6 shows an example of fits to yrast transitions in Nd isotopes.

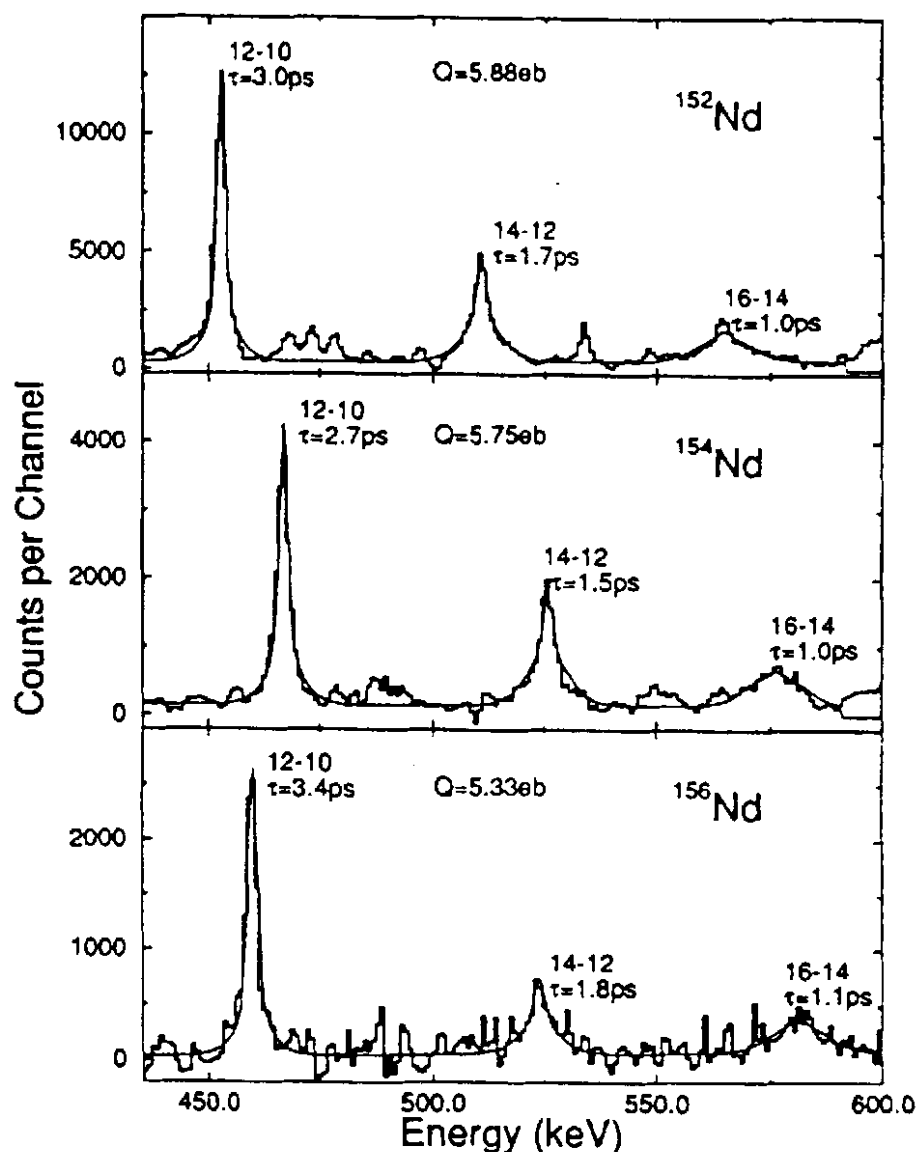


Figure 6. Line shapes in the  $\gamma$ -ray energy spectra of  $^{152,154,156}\text{Nd}$ .

Lifetime measurements extracted in this way are subject to uncertainties due to lack of precise knowledge of stopping powers and to unknown details of feeding mechanisms. Relative lifetimes in an isotopic sequence, as in the case of the Nd isotopes above, are not subject to errors from stopping powers. The uncertainty arising from unknown feeding times can be reduced by including different models of the feeding process in the analysis. To the extent that such analyses give reasonable estimates of feeding times, they can be used to give valuable information on fragment formation-mechanisms as the neutron excess changes.

## 4. NEW SPECTROSCOPIC RESULTS

### 4.1 Octupole correlation effects in nuclei near mass 100

The structures at low excitation energy of neutron-rich nuclei near  $N=88$  and  $Z=56$  are expected to be influenced by strong octupole correlations. The close spacing of appropriate deformed single-particle orbits near the Fermi surface in this region may allow strong enough mixing of opposite parity states for the nucleus to be reflection-asymmetric in the intrinsic frame. Some time ago, features characteristic of octupole deformation or softness in even-even nuclei were found<sup>10,11)</sup>, including alternating parity bands usually connected by strong electric dipole (E1) transitions. The strength of the observed E1 transitions from states of spin  $I_i$  to spin  $I_f$ ,  $B(E1; I_i \rightarrow I_f)$ , may be converted into an intrinsic electric dipole moment  $D_0$  using a rotational model prescription.

$$B(E1; I_i \rightarrow I_f) = \frac{3}{4\pi} D_0^2 \langle I_i 0 1 0; I_f 0 \rangle^2.$$

Figure 7 shows values of this moment for a range of even-even nuclei near mass 150.

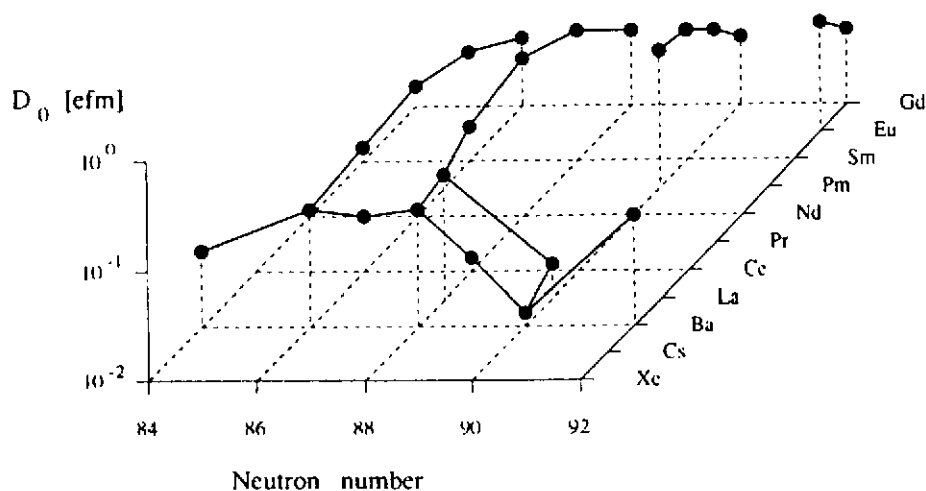


Figure 7. Intrinsic electric dipole moments for nuclei near mass 150.

More conclusive information on the influence of octupole effects can be obtained from studies of odd-A nuclei in this region. In odd-A nuclides, parity doublet bands with similar properties and connected by (usually) strong E1 transitions are expected if the correlations are strong enough to give stable octupole-deformed shapes. Recent experiments on odd-Ba nuclei<sup>12,13,14)</sup> have revealed no strong evidence for such parity doublets although strong E1 transitions were observed<sup>14)</sup> using spin-parity assignments based on systematics. The moment obtained for  $^{143}\text{Ba}$  from the average of the E1 strengths is similar to those observed in  $^{142}\text{Ba}$  and  $^{144}\text{Ba}$ . No well-developed structures suggestive of reflection-asymmetry are seen in  $^{145}\text{Ba}$ , although E1 transitions are observed. Using these to deduce an intrinsic E1 moment produces a value somewhat smaller than that observed in  $^{143}\text{Ba}$  and  $^{144}\text{Ba}$  and confirms the theoretical predictions of a downward trend towards  $^{146}\text{Ba}$ .

A summary of the situation in the odd-A Ba isotopes is that features expected for reflection-asymmetric odd-A nuclei, such as parity-doublet bands, have not been observed in a clearly-developed form, even though the intrinsic electric dipole moments in these nuclei as determined from a rotational model follow the same trend as seen in the even-even isotopes, a trend reproduced by reflection-asymmetric model calculations<sup>16)</sup>. In contrast, odd-proton nuclei in this region, such as <sup>151</sup>Pm and <sup>153</sup>Eu, show<sup>17,18)</sup> extended opposite-parity band structures connected by strong E1 transitions. However, these bands exhibit different magnetic properties suggesting a reflection-symmetric rather than asymmetric description. The odd-A La isotopes studied<sup>19)</sup> in the EUROGAM2 experiments with <sup>248</sup>Cm show no clearly defined parity-band structures although the E1 strengths measured determine an intrinsic E1 moment of size similar to those observed in the other odd-Z nuclei. A reason for the different behaviour observed in odd-N and odd-Z nuclei in this region may be different blocking effects for neutrons and protons.

#### 4.2 Shape trends in the mass 100 region--lifetime measurements

As the neutron number in Sr and Zr isotopes increases through 60 there is a well-known rapid change of ground-state shape to large deformation, with these nuclei exhibiting<sup>6)</sup> good rotational features. We have now measured<sup>20)</sup> the lifetimes of higher-lying members of the ground-state bands of <sup>98</sup>Sr and of even-even Zr and Mo isotopes in order to investigate the stability of the deformation with rotation. The measured lifetimes have been transformed into quadrupole moments within a rotational model description. The present results, which correspond to a fit to the lineshapes of  $\gamma$  rays from the decay of the J=8, 10 and 12 members of the ground-state bands, are given in the final column of the table below. The column labelled Raman shows the values of the quadrupole moment derived<sup>21)</sup> from the lifetimes of 2<sup>+</sup> states; that labelled Moller shows theoretical predictions<sup>22)</sup> of ground-state moments. It can be seen that the new data strongly suggest that the shapes of the well-deformed Sr and Zr nuclei do not change with angular momentum, at least up to spin 12 $\hbar$ . This is consistent with theoretical expectations from calculations<sup>22)</sup> of Total Routhian Surfaces (TRS).

Nucleus	Raman	Moller	Present
<sup>98</sup> Sr	3.12(18)	3.14	3.17(20)
<sup>100</sup> Zr	3.04(19)	3.36	3.19(10)
<sup>102</sup> Zr	4.01(40)	3.51	3.52(17)
<sup>104</sup> Zr		3.68	3.72(16)
<sup>102</sup> Mo	3.26(19)	3.29	2.44(17)
<sup>104</sup> Mo	3.29(13)	3.54	2.84(14)
<sup>106</sup> Mo	3.62(10)	3.70	2.85(13)
<sup>108</sup> Mo	3.58(42)	3.46	2.79(20)

In contrast to the rigidity of the Sr and Zr isotopes, there is a consistent reduction of 20% in the quadrupole moments of the intermediate spin states in the Mo isotopes as spin increases. This is also predicted by TRS calculations which suggest that, as the nuclei rotate, the yrast states take on a triaxial shape due to the alignment of  $h \frac{11}{2}$  neutrons. The tendency to triaxiality in the Mo isotopes is of interest, because the Ru isotopes exhibit<sup>23)</sup> characteristics of rigid triaxiality. Thus more detailed information on the transition from axial symmetry in the Sr and Zr isotopes to rigid triaxiality in Ru, via the Mo isotopes



could clarify the role of different deformed orbitals in that evolution.

### 4.3 Two-phonon vibrational states

Rotational bands based on intrinsic structures in deformed nuclei which correspond macroscopically to vibrations about simple average shapes are well established. One such is the gamma vibrational band based on a triaxial oscillation of a nuclear shape which on average has axial symmetry. Levels with positive parity and spin quantum number 2 have an intrinsic structure corresponding to one phonon of such a vibration. Regular searches have been made for good candidates for levels which correspond to two phonons of gamma vibration, and recently<sup>24)</sup> data from fission gamma rays have suggested that the neutron-rich Mo and Ru nuclei may provide excellent candidates.

Figure 8 shows the level scheme obtained for  $^{106}\text{Mo}$  from the EUROGAM2 experiments with  $^{248}\text{Cm}$ . The level at 1435 keV excitation energy is below the pairing gap which is close to 2 MeV and hence the level has a strongly collective nature; it has an excitation energy twice that of the level at 710 keV which has an internal structure corresponding to one phonon of gamma vibration. The 1435 keV state has spin quantum number 4 and positive parity as required for a state corresponding to two gamma-phonons. The decay properties of the band based on the 1435 keV state are also consistent with such a description, and the 1435 keV state is one of the best candidates known for a state with two quanta of gamma-vibration.

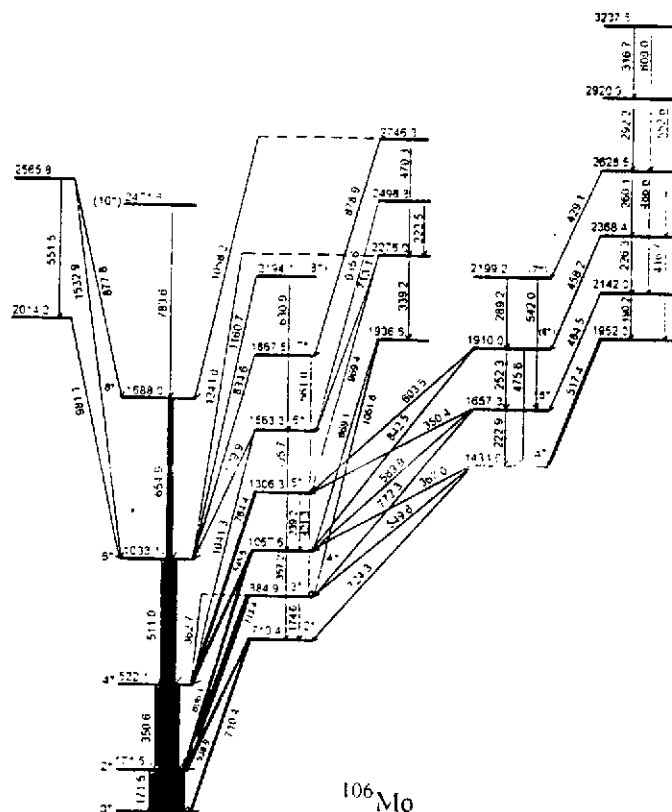
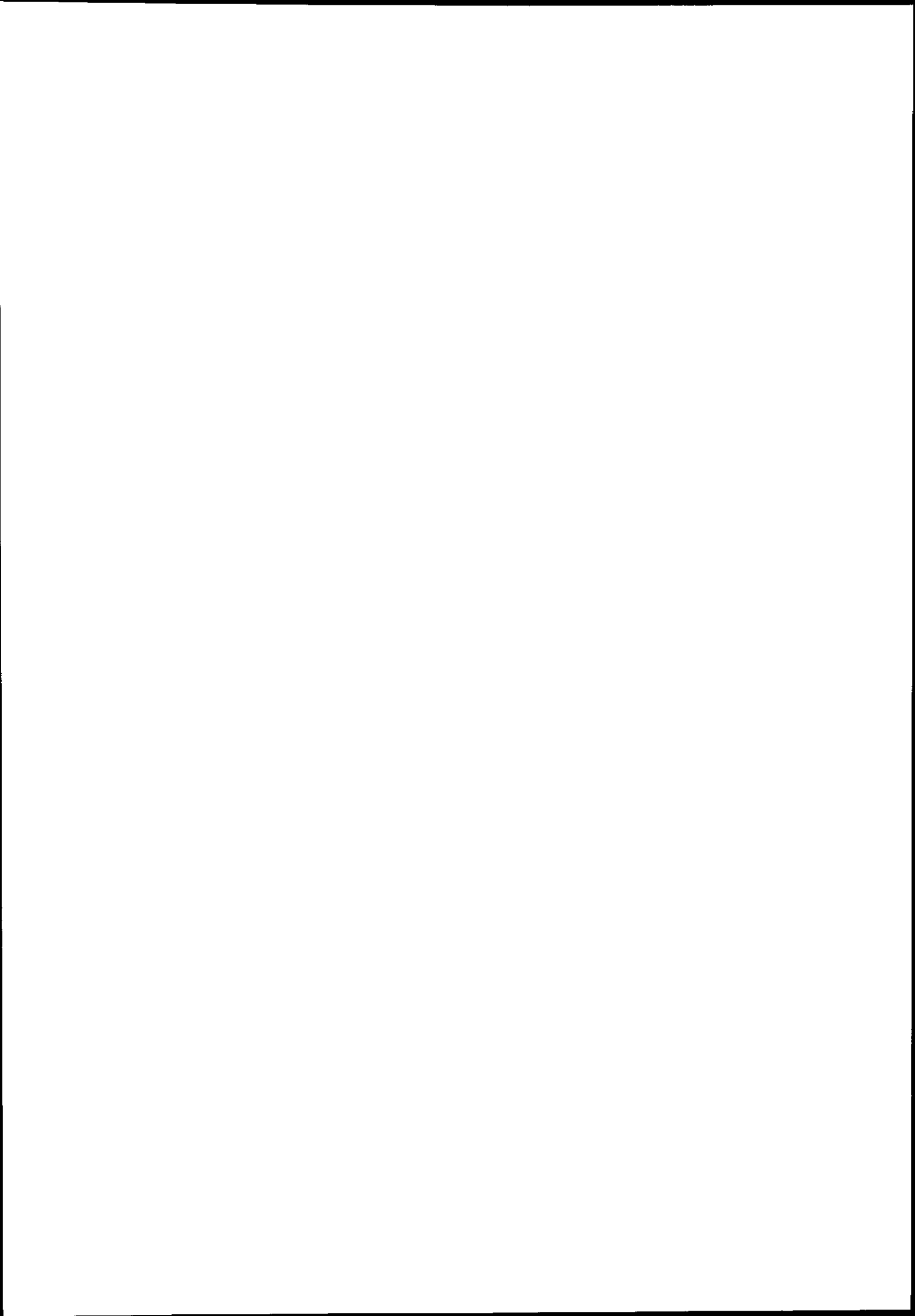


Figure 8. A partial decay scheme for  $^{106}\text{Mo}$ .

The work discussed in this paper has been performed in collaboration with several researchers from the University of Manchester, the Argonne National Laboratory, USA, and the CNRS Laboratory at Strasbourg. For several of the topics outlined in this paper special thanks are due to M.A.Jones, W.Urban, A.G.Smith and N.Schulz. The work was supported by the Science and Engineering Research Council of the UK under grant no. GRH71161, and by the US Dept. of Energy under contract No. W-31-109-ENG-38. The author is also indebted for the use in experiments of  $^{248}\text{Cm}$  to the Office of Basic Energy Sciences, US Dept. of Energy, through the transplutonium element production facilities at the Oak Ridge National Laboratory.

### References

- 1) B.F.Rider, Vallecitos Nuclear Center Report No. NEDO-12154-3(B), 1980
- 2) K.F.Flynn *et al.*, J.Inorg. Chem. 37 (1975) 881-5
- 3) R.W.Peele and F.C.Maienschein, Phys. Rev. C3 (1971) 373-90
- 4) V.V.Verbinsky *et al.*, Phys. Rev. C7 (1973) 1173-85
- 5) Y.Abdelrahman *et al.*, Phys. Lett. 199B (1987) 504-8
- 6) M.A.C.Hotchkis *et al.*, Nucl.Phys. A530 (1991) 111-34
- 7) I.Ahmad and W.R.Phillips, Rep. Prog. Phys. 58 (1995) 1415-63
- 8) R.M.Steffen and K.Alder, in The Electromagnetic Interaction in Nuclear Spectroscopy, ed. W.D.Hamilton (North-Holland, 1975)
- 9) A.G.Smith *et al.*, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 2540-2
- 10) W.R.Phillips *et al.*, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 3257-9
- 11) W.R.Phillips *et al.*, Phys. Lett B212 (1988) 402-6
- 12) J.D.Robertson *et al.*, Phys. Rev. C34 (1986) 1012-1023
- 13) J.D.Robertson *et al.*, Phys. Rev. C40 (1989) 2804-2822
- 14) S.J.Zhu *et al.*, Phys. Lett. B357 (1995) 273-80
- 15) M.A.Jones *et al.*, Nucl. Phys. A605 (1996) 133-43
- 16) P.A.Butler and W.Nazarewicz, Nucl. Phys. A533 (1991) 249-61
- 17) W.Urban *et al.*, Phys. Lett. B247 (1990) 238-41
- 18) C.J.Pearson *et al.*, Phys. Rev. C49 (1994) 1239-42
- 19) W.Urban *et al.*, Phys. Rev. C54 (1996) 945-8
- 20) A.G.Smith *et al.*, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1711-1714
- 21) S.Raman *et al.*, At. Dat. Nucl. Dat. Tables 36 (1987) 1-96
- 22) P.Moller *et al.*, At. Dat. Nucl. Dat. Tables 59 (1995) 185-382
- 23) J.A.Shannon *et al.*, Phys. Lett. B336 (1994) 136-40
- 24) A.Guessous *et al.*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 2280-2283



# Détection des ondes gravitationnelles

P. Hello

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Groupe VIRGO  
Bâtiment 208, Université Paris-Sud, 91405 Orsay

**Résumé:** La détection directe des ondes gravitationnelles est l'un des défis les plus prometteurs de cette fin de siècle. Dans ce cours, on rappelle tout d'abord la notion d'onde gravitationnelle, puis on donne les sources astrophysiques envisagées pour les détecteurs terrestres. Les méthodes de détection sont ensuite passées en revue: barres résonnantes et interféromètres, avec, pour ces derniers des exemples et illustrations tirés de l'expérience VIRGO.

**Abstract:** The direct detection of gravitational waves is one of the most challenging physics experiments. Here, the notion of gravitational waves is first recalled and astrophysical sources of interest for Earth-based detectors are given. The methods of detection are then reviewed: resonating bars and interferometers, the later being illustrated by examples from the VIRGO experiment.

## 1 Les ondes gravitationnelles et les sources astrophysiques

### 1.1 Les ondes gravitationnelles dans le cadre de la Relativité Générale

Dans le cadre de la Relativité Générale, les ondes gravitationnelles (OG) apparaissent comme une solution naturelle des équations d'Einstein linéarisées. Les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci,  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur impulsion-énergie,  $R$  est la courbure scalaire (trace du tenseur de Ricci), et  $g_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique qui définit, entre autre, l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (2)$$

Dans l'approximation des champs faibles,  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , où  $\eta_{\mu\nu}$  est le tenseur de Minkowski (espace-temps plat) :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

et  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , les équations d'Einstein sont linéarisées et deviennent :

$$\square k_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

où  $\square$  représente l'opérateur D'Alembertien et  $T_{\mu\nu}$  est ici l'approximation d'ordre 0 en  $h$  du tenseur énergie-impulsion. Le champ gravitationnel  $k_{\mu\nu}$  est relié à la perturbation de la métrique  $h_{\mu\nu}$  par

$$k_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (5)$$

$h$  étant la trace de  $h_{\mu\nu}$ . Le tenseur métrique étant symétrique, il y a au plus 10 composantes indépendantes dans  $h_{\mu\nu}$  et  $k_{\mu\nu}$ . De plus, l'équation de conservation du tenseur impulsion-énergie,  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , implique  $\partial^\mu k_{\mu\nu} = 0$ , ce qui réduit à 6 le nombre de composantes indépendantes.

Un certain changement de jauge, qui correspond à la jauge TT (pour Transverse Traceless), permet encore de simplifier le problème et de se ramener à une description minimale (deux composantes indépendantes). Cette jauge permet en outre de "confondre" les tenseurs métrique  $h_{\mu\nu}$  et champ  $k_{\mu\nu}$ . Dans la jauge TT, la perturbation de la métrique possède les propriétés :

- $h_{0\nu}^{TT} = 0$  : le tenseur est transverse (seules les composantes spatiales sont non nulles).
- $h_{\mu\mu}^{TT} = 0$  : le tenseur est de trace nulle.
- $\partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = 0$  : le tenseur est de divergence nulle (ce qui n'est pas propre à la jauge TT).
- $\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0$  : équation de propagation (loin des sources de champ).

La première conséquence est que les OG se propagent à la vitesse de la lumière, comme l'indique l'équation de propagation. Enfin, l'écriture la plus générale de  $h_{\mu\nu}^{TT}$  est (Oz étant la direction de propagation de l'OG) :

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

soit  $h_{\mu\nu}^{TT} = h_+ e_{\mu\nu}^+ + h_\times e_{\mu\nu}^\times$ , avec

$$e_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_{\mu\nu}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

On remarque que les deux tenseurs  $e_{\mu\nu}^+$  et  $e_{\mu\nu}^\times$  sont linéairement indépendants, ce qui montre qu'il y a finalement deux polarisations indépendantes pour l'OG, que l'on notera "+" et "×". De plus, il est facile de constater que l'on passe d'une polarisation à l'autre par une rotation d'angle  $\pi/4$ , ce qui est caractéristique d'une onde d'hélicité 2 (le graviton est donc de spin 2).

Enfin, toujours en considérant une OG se propageant selon l'axe des  $z$ , en posant encore  $h_+ = h_{11}^{TT} = -h_{22}^{TT}$  et  $h_\times = h_{12}^{TT} = h_{21}^{TT}$ , et en remontant aux sources de champ, on peut montrer que les polarisations  $h_+$  et  $h_\times$  de l'OG sont reliées au *moment quadrupolaire réduit*  $q_{\mu\nu}^{TT}$  de la source par :

$$h_+ = -\frac{G}{Rc^4} \left( \frac{\partial^2 q_{11}^{TT}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q_{22}^{TT}}{\partial t^2} \right), \quad (8)$$

$$h_\times = -\frac{2G}{Rc^4} \frac{\partial^2 q_{12}^{TT}}{\partial t^2}, \quad (9)$$

où  $R$  est la distance de la source. Le moment quadrupolaire réduit  $q_{\mu\nu}$  est simplement la partie sans trace du moment quadrupolaire  $Q_{\mu\nu} = \int \int \int \rho x_\mu x_\nu d^3x$  de la source :  $q_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} Q_\alpha^\alpha$ .

## 1.2 Effet d'une onde gravitationnelle

Une OG étant définie comme une perturbation propagative de la métrique de l'espace-temps, le passage d'une OG au voisinage de deux masses d'épreuve va donc modifier la distance entre celles-ci. Ici, "distance" est à prendre au sens opérationnel, c'est à dire le temps mis par la lumière pour aller d'une masse à l'autre. Si  $A$  et  $B$  sont les "positions" des deux masses dans l'espace-temps, et si on pose  $\mathbf{AB} = (x^\mu)$ , le vecteur  $(x^\mu)$  obéit à l'équation de la géodésique en champ faible :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}^{TT}}{\partial t^2} x^\nu. \quad (10)$$

La variation maximale de la distance mesurée entre  $A$  et  $B$  est donc :

$$\delta L \approx \frac{h}{2} L, \quad (11)$$

où  $L$  est la longueur du segment  $AB$  au repos et  $h$  est l'amplitude de l'onde gravitationnelle. D'après l'équation précédente,  $h$  peut être interprété comme un taux de déformation

de l'espace; en effet, l'OG modifie la distance *relative* entre les deux masses-test. On peut montrer que l'effet est de plus différentiel, c'est à dire que lorsque les distances semblent s'allonger dans une certaine direction, elles semblent alors se raccourcir dans une direction orthogonale (et vice versa une demi-période plus tard), ce qui rappelle la nature quadrupolaire des OG (voir figure 1).

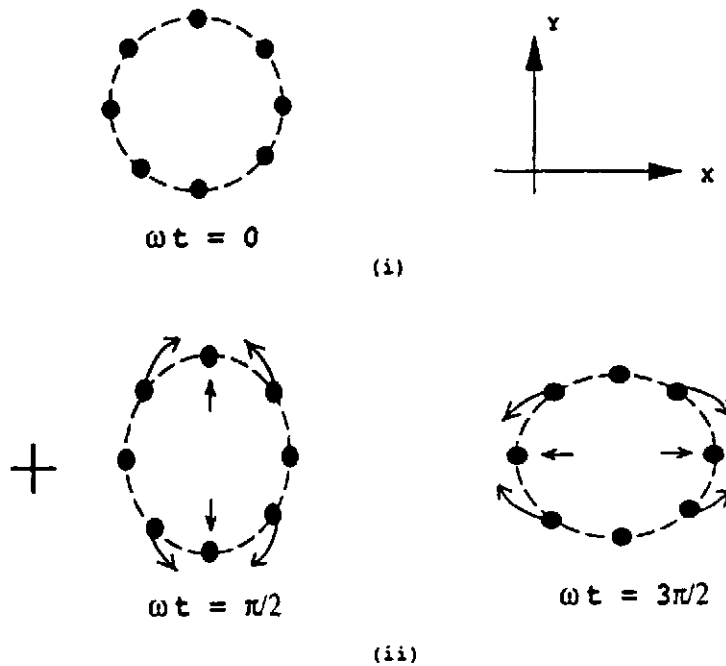


Figure 1: Effet d'une OG sur un cercle de masses d'épreuve. L'incidence est l'onde est normale au plan des masses.

### 1.3 Sources d'onde gravitationnelle et puissances rayonnées

La puissance rayonnée par un système dans le domaine gravitationnel s'écrit :

$$P = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{\partial^3 Q_{\mu\nu}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 Q^{\mu\nu}}{\partial t^3} \right\rangle . \quad (12)$$

De façon générale, une source d'ondes gravitationnelles doit posséder un moment quadrupolaire non nul et non statique. On peut déjà conclure que tout système à symétrie sphérique

ne pourra rayonner d'OG. De plus, le rapport  $G/c^5$  est ridiculement petit, de l'ordre de  $3 \times 10^{-53} \text{ W}^{-1}$ , si bien que seules des systèmes possédant un moment quadrupolaire consistant et rapidement variable vont donner lieu à des puissances rayonnées appréciables. Le tableau ci dessous donne quelques ordres de grandeur pour les puissances, flux et amplitudes de sources typiques. Les amplitudes ont été calculées selon

$$h \simeq \frac{1}{R\omega} \left( \frac{GP}{c^3} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

où  $\omega$  est une pulsation caractéristique de la source et  $R$  la distance à la source. Force est de constater qu'il s'avère impossible de réaliser une expérience de Hertz (émission-détection) dans le domaine des OG au laboratoire! Au contraire, la coalescence de deux trous noirs dans l'amas de la Vierge (Virgo), à 10 Mpc, peut rayonner une puissance formidable, de l'ordre de  $2 \times 10^{50} \text{ W}$  (supérieure à la luminosité de l'Univers observable dans le domaine électromagnétique!), qui peut être éventuellement détectée sur Terre.

	P(W)	distance	Flux(W.m <sup>-2</sup> )	h
barreau acier				
M = 500 T, r = 1 m	$2 \times 10^{-29}$	1 m	$5 \times 10^{-31}$	$2 \times 10^{-34}$
L = 20 m, 5 tours/s				
Bombe H – 1MT, asym = 10%	$5 \times 10^{-11}$	10 km	$5 \times 10^{-18}$	$2 \times 10^{-39}$
systeme Terre – Lune	$6 \times 10^{-6}$			
systeme Terre – Soleil	187			
supernova – 10 M <sub>☉</sub> , asym = 3%	$10^{44}$	10 Mpc	$10^{-3}$	$10^{-23}$
2 trous noirs 1 M <sub>☉</sub> , d = 3 km	$2 \times 10^{50}$	10 Mpc	$2 \times 10^3$	$10^{-20}$

Table 1: Quelques exemples de générateurs d'ondes gravitationnelles.

On peut réécrire la puissance rayonnée en fonction des paramètres caractéristiques de la source, sa masse  $M$ , ses dimensions  $d$ , une pulsation  $\omega$ . En posant le moment quadrupolaire typique  $Q \simeq aMR^2$ , où  $a$  est un facteur d'assymetrie (écart à la symétrie sphérique), il vient :

$$P \sim \frac{G}{c^5} a^2 M^2 \omega^6 d^4. \quad (14)$$

Suivant Weber<sup>1)</sup>, on peut alors transformer cette expression de façon à inverser le rapport  $G/c^5$  ridiculement petit en  $c^5/G \simeq 4 \times 10^{52} \text{ W}$ , facteur fantastiquement grand! En effet, si  $R_s = 2GM/c^2$  est le rayon de Schwarzschild de la source, et si  $v$  est une vitesse caractéristique de la source, alors  $\omega \sim v/d \sim v/c \times c/d$  et  $M = R_s c^2 / 2G$  d'où :

$$P \sim \frac{G}{c^5} a^2 \left( \frac{R_s c^2}{G} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 \left( \frac{c}{d} \right)^6 d^4, \quad (15)$$



soit

$$P \sim \frac{c^5}{G} a^2 \left( \frac{R_s}{d} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6, \quad (16)$$

et le tour est joué; un système tel que  $d \sim R_s$  et  $v \sim c$  pourra rayonner gravitationnellement une puissance formidable. Heureusement, de tels objets existent dans l'Univers: ce sont les astres "compacts" (relativistes), étoiles à neutrons ( $d \sim$  quelques  $R_s$ ) et trous noirs ( $d = R_s$ , vitesse de chute libre d'une particule sur un trou noir =  $c$  sur l'horizon). Il est clair que seules des sources impliquant un ou plusieurs astres compacts peuvent produire une puissance rayonnée intense (voir la table 1). Cependant, si la puissance émise peut être énorme, l'amplitude  $h$  reste toujours très petite. Dans l'exemple de la coalescence des deux trous noirs ci-dessus, la puissance rayonnée équivaut à environ  $10^{24}$  fois la luminosité du Soleil, mais l'amplitude, après 10 Mpc de propagation, n'est que  $h \sim 10^{-20}$ . On peut interpréter  $h$  comme un taux de déformation de l'espace-temps, mais l'espace-temps est un milieu très rigide, d'impédance mécanique caractéristique  $Z_{vide} \sim c^3/G \sim 4 \times 10^{35} \text{ kg s}^{-1}$ , ce qui explique qu'une OG, même propageant une énergie considérable, ne peut avoir qu'une amplitude très faible. Une autre conséquence, importante du point de vue de la détection, est que le rayonnement gravitationnel se couple très peu avec la matière. Prenons l'exemple d'un détecteur résonnant (voir partie 2) d'impédance mécanique typique  $Z_d \sim 10^8 \text{ kg s}^{-1}$ ; la désadaptation d'impédance entre le "vide" et le milieu détecteur est de l'ordre de  $Z_d/Z_{vide} \sim 10^{-27}$  ce qui indique la difficulté de la détection directe des OG.

## 1.4 Sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles

### 1.4.1 Supernovae

Les effondrements d'étoiles sont historiquement les premières sources possibles d'OG envisagées par les astrophysiciens. Si l'on connaît assez bien le taux d'occurrence des supernovae de type II, environ 2-3 SN II par siècle et par galaxie, on ne sait pas en revanche prédire les formes d'ondes émises. Il n'y a pas en effet de véritable contrainte observationnelle directe sur l'asphéricité (nécessaire pour émettre) des effondrements; rappelons qu'une SN II est l'effondrement du coeur d'une étoile massive (en fin d'évolution) en étoile à neutrons et que l'on ne peut observer à l'aide de nos télescopes que les couches externes de l'étoile, éjectées lors de l'effondrement. Les seules causes possibles d'asymétrie sont liées à la présence d'un compagnon ou à la loi de rotation de l'étoile. Les modèles modernes<sup>2)</sup> prédisent que l'asphéricité reste faible et que l'amplitude reçue sur Terre est  $h \sim 10^{-23} - 10^{-22}$  pour une source située à 10 Mpc (dans l'amas de la Vierge) avec des fréquences d'émission typiques de l'ordre de 100 Hz à 1 kHz (voir figure 2). Cependant, on connaît des pulsars (résidus de SN II) se déplaçant à des vitesses de l'ordre de plusieurs centaines de km/s; en particulier le pulsar PSR 2224+65 ("s'échappant" de la nébuleuse de la guitare) possède une vitesse supérieure à 800 km/s, ce qui en fait l'objet le plus rapide de la Galaxie<sup>3)</sup>. Ceci montre que dans quelques cas, un effondrement peut-être TRES asymétrique.

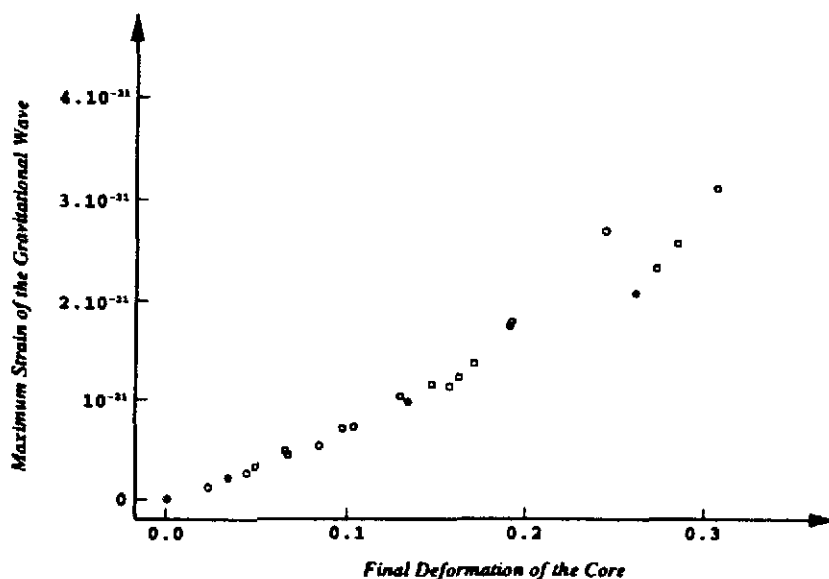


Figure 2: Amplitude maximale d'OG émises par une supernova de type II à 1 Mpc en fonction de la déformation finale du coeur pour différents scénarios et conditions initiales, d'après Bonazzola et Marck<sup>(2)</sup>.

Les effondrements en trous noirs (supernovae "silencieuses") semblent plus efficaces du point de vue émission avec des amplitudes typiques  $h \sim 10^{-22}$  à 10 Mpc<sup>(4)</sup>. Par contre on ne peut pas dire grand chose quant au taux d'occurrence de ces événements, car ils sont justement optiquement inobservables.

#### 1.4.2 Binaires spirallantes

Une binaire compacte spirallante désigne un couple d'étoiles à neutrons ou de trous noirs ou d'un trou noir et une étoile à neutrons. Au contraire des supernovae, les signaux émis par les binaires compactes spirallantes sont très bien modélisés, jusqu'à des instants proches de la coalescence (fusion) finale. Un tel système possède en effet un moment quadrupolaire variable et émet donc des OG. Emettant des OG, il perd de l'énergie et les deux étoiles se

rapprochent. Se rapprochant, la variation de moment quadrupolaire augmente, de même que l'énergie perdue par émission d'OG, et cette évolution catastrophique du système conduit inexorablement les deux compagnons jusqu'à la coalescence; le fameux pulsar binaire PSR 1913+16 coalescera par exemple dans environ 300 millions d'années. La partie spiralante est très bien comprise<sup>5)</sup>: il s'agit essentiellement d'un mouvement newtonien de deux masses ponctuelles avec dissipation due à la génération d'OG. On peut voir sur la figure 3, la forme d'onde typique pour les derniers instants d'un système de deux étoiles à neutrons. Par contre la coalescence proprement dite est pour ainsi dire inconnue, car les détails fins de la structure des étoiles sont prépondérants (équation d'état des étoiles à neutrons par exemple) ou encore car on ne sait pas résoudre exactement le problème à deux corps en relativité générale (problème de la fusion de deux trous noirs).

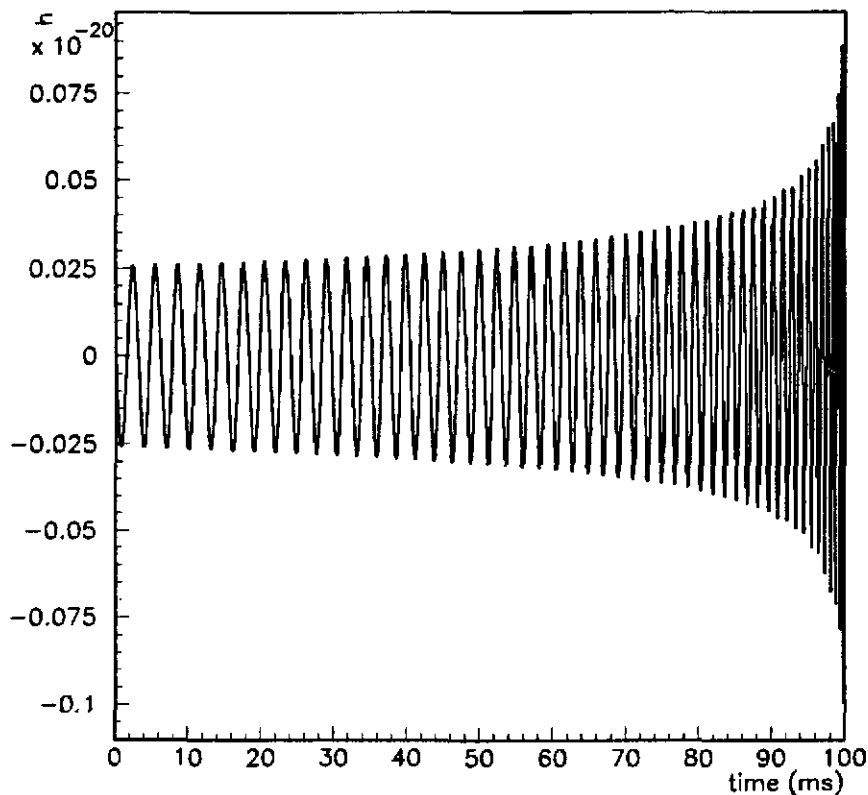


Figure 3: Amplitude  $h$  d'une OG émise par un système de deux étoiles à neutrons situé à 10 Mpc. Les deux étoiles ont même masse  $\simeq 1.4 M_{\odot}$ .

Si la partie quasi-newtonienne du mouvement est bien connue, on ne peut pas en dire autant de la statistique des événements. Les chiffres varient de 1 à 100 selon les auteurs<sup>6)</sup>, cette disparité étant due essentiellement au faible échantillon de pulsars binaires détectés dans la

Galaxie (5 soit 1% du nombre total de pulsars connus). Un consensus conservateur permet d'espérer en gros un événement par an détectable par les détecteurs interférométriques.

### 1.4.3 Pulsars

On estime à plus de  $10^5$  le nombre de pulsars dans notre Galaxie et à quelques milliers le nombre de pulsars de fréquence supérieure à quelques Hz et susceptibles d'être détectés sur Terre. Si ces derniers sont asymétriques (mémoire de "starquakes" ou instabilité de rotation) ou même s'ils restent axisymétriques mais précèdent, ils peuvent émettre un signal périodique d'OG. Mais les amplitudes attendues sont faibles (contraintes par le ralentissement observé de quelques pulsars), par exemple  $h_{max} \sim 10^{-24}$  pour le pulsar du crabe. Par contre, le signal étant périodique, il peut être intégré sur un temps suffisamment long pour l'exhiber du bruit du détecteur, après une démodulation Doppler convenable.

### 1.4.4 Sources stochastiques

On peut regrouper dans cette catégorie nombre de sources plus ou moins exotiques. Fonds cosmologiques dus à différentes transitions de phase de l'Univers naissant, vibrations de cordes cosmiques, ou superposition incohérente d'un grand nombre de sources individuelles, comme le fond dû aux binaires galactiques (fond à basse fréquence  $< \text{mHz}$ ).

## 2 Détection des ondes gravitationnelles, généralités

L'américain Joe Weber eut le premier l'idée, à la fin des années 50, que des OG de fréquence appropriée pouvaient exciter les modes de vibration d'un solide. Il conçut ainsi le premier détecteur : un cylindre d'Aluminium de 1.5 m de longueur de 65 cm de diamètre (fréquence du fondamental  $\sim 1660 \text{ Hz}$ ), couplé à des capteurs piezoélectriques. Il est remarquable de songer que ce travail de pionnier fut entrepris alors que l'on savait peu de choses sur les sources possibles d'OG; rappelons que certains objets comme les pulsars, les quasars ou les binaires X n'avaient pas encore été découverts à l'époque, et qu'on avait alors l'image d'un Univers bien tranquille, image bouleversée ensuite grâce aux progrès de la radioastronomie et aux détecteurs X,  $\gamma$ ... embarqués. Le tableau ci-dessous rappelle les dates essentielles concernant les efforts entrepris pour la détection des OG depuis Weber.

- 1960 Premier détecteur (Weber)
- 1963 Proposition de détection interférométrique (Gertsenshtein et Pustovoit)
- 1969 Fausse première détection (Weber)
- 1970s Essort des détecteurs résonnants

- 1972 Faisabilité des détecteurs interférométriques (Weiss)
- 1972 Premier prototype d'interféromètre (Forward)
- 1974 Découverte du pulsar binaire PSR 1913+16 (Hulse et Taylor)
- Fin des 70s-début des 80s Barres refroidies à 4K et prototypes d'interféromètres (Garching, Glasgow et Caltech)
- 1980 Premières études en France concernant les détecteurs interférom. (Brillet et Tourrenc)
- 1986 Début de la collaboration Virgo (France+Italie)
- 1989 Soumission du Virgo proposal au CNRS et à l'INFN. Soumission du LIGO proposal à la NSF
- 1990 GEO proposal (RFA+GB). Plans au Japon et en Australie.
- 1992 Virgo approuvé en France. Approbation de LIGO. GEO retardé
- 1993 Virgo approuvé en Italie. Pré-études d'interféromètres spatiaux (LISA)
- 1996 Début construction Virgo et LIGO. GEO devient GEO600. TAMA-300 au Japon
- Futur probable : 3 grands interféromètres (1 pour Virgo et 2 pour LIGO)+GEO600+TAMA-300 et barres de troisième génération refroidies sous les 100 mK.

Le principe général de détection repose sur une mesure sensible de la modification des longueurs induite par le passage d'une OG (cf Eq.11). On peut séparer les détecteurs en deux catégories : détecteurs résonnants (barre de Weber) où l'OG incidente vient exciter la résonance mécanique de la barre et détecteurs électromagnétiques (interféromètre, timing de pulsars ou poursuite Doppler de sondes spatiales) où l'OG perturbe le temps de vol des photons (ou la phase de l'onde lumineuse) se propageant entre un émetteur et un récepteur. Dans la suite, on va étudier en détail les deux principaux types de détecteurs terrestres d'OG : les barres résonnantes et les interféromètres de type Michelson.

### 3 Barres résonnantes ou barres de Weber

#### 3.1 Les barres résonnantes dans le monde

Les barres actuellement en service ou en développement (voir table 2) sont restées fidèles au principe du premier détecteur de Weber. Sur la figure 4, on peut voir la barre Niobe

en service en Australie. C'est une barre de seconde génération, refroidie à l'Hélium liquide. Le matériau utilisé est un quasi monocristal de Niobium ( $m \simeq 1500$  kg), particulièrement intéressant pour son facteur de qualité mécanique très élevé ( $Q \simeq 2 \times 10^8$  à 4 K). On remarque le transducteur placé sur l'une des extrémités de la barre et chargé de recueillir et d'amplifier les vibrations de la barre au voisinage de sa fréquence fondamentale. Notons que toutes les autres barres sont en Aluminium Al5056 ( $Q \simeq 4 \times 10^7$  à 4 K).

Nom	Location	Température	Fréquence	Sensibilité r.m.s.
Explorer	CERN (Rome)	4 K	840 Hz	$h \sim 6 \times 10^{-19}$
Allegro	Bâton Rouge (L.S.U.)	4 K	915 Hz	$h \sim 8 \times 10^{-19}$
Niobe	Perth (UWA)	4 K	700 Hz	$h \sim 7 \times 10^{-19}$
Nautilus	Rome	< 100 mK	920 Hz	$h < 10^{-19}$ (*)
Auriga	Legnaro	< 100 mK	920 Hz	$h < 10^{-19}$ (*)

Table 2: barres de Weber en service ou en développement. (\*): sensibilité prévue.

### 3.2 Réponse d'une barre à une onde gravitationnelle

Une OG incidente sur la barre produit des contraintes à l'intérieur de matériau qui se traduisent par l'excitation de ses modes de vibration (principalement le fondamental). Si  $x(t)$  représente le déplacement de la face du cylindre où est placé le transducteur,  $x(t)$  est régi par l'équation d'un oscillateur harmonique équivalent de même pulsation  $\omega_0$  que la barre, de longueur  $L_{eq} = 4L/\pi^2$  et de masse  $m_{eq} = M_{barre}/2$  <sup>8)</sup>:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{2L}{\pi^2} \frac{d^2h}{dt^2}, \quad (17)$$

où  $Q$  est le facteur de qualité mécanique de la barre et le terme de droite (écrit pour une incidence optimale de l'OG) est l'analogie d'une force ("force de Riemann"). On obtient alors facilement la fonction de transfert gravito-mécanique de la barre:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{2L}{\pi^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q}} \tilde{h}(\omega). \quad (18)$$

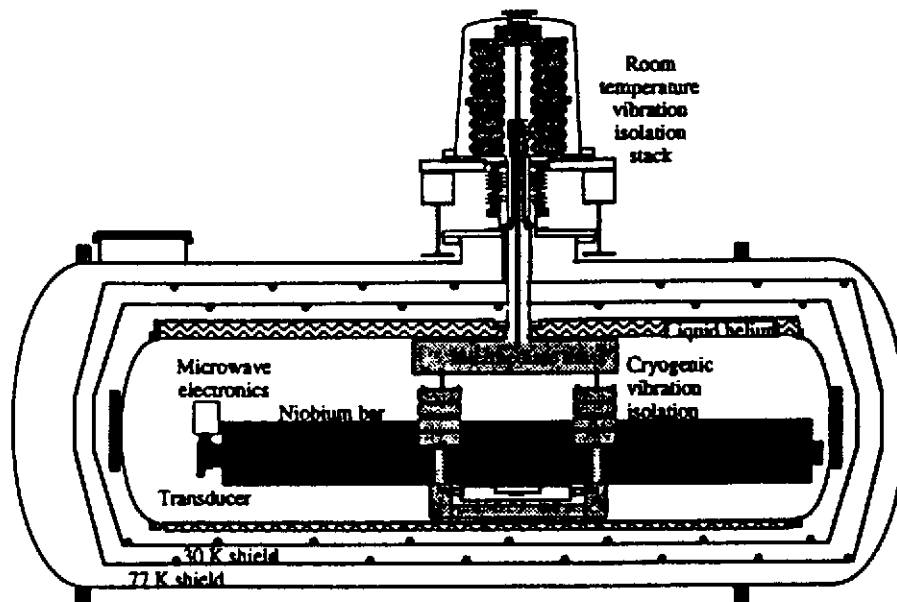


Figure 1. Cross-section of the antenna showing the niobium bar and vibration isolation system.

Figure 4: Barre résonnante de l'University of Western Australia<sup>7)</sup>.

On reconnaît la forme d'un filtre lorentzien centré sur  $\omega_0$ . On peut alors en déduire la réponse de la barre à un burst d'OG de durée  $\tau$ , modélisé comme un créneau de largeur temporelle  $\tau$  :

$$x(t) = \frac{2L}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) h(\omega_0) \omega_0 \tau \sin(\omega_0 t). \quad (19)$$

La barre détecte donc la composante de Fourier de l'OG à sa fréquence de résonance et elle garde la mémoire du signal pendant la durée  $\sim 2Q/\omega_0$ . La barre se comporte finalement comme un gong sous l'action de l'OG.

### 3.3 Extraction du signal mécanique: le transducteur

Le transducteur est chargé de transformer les vibrations mécaniques de la barre en signal électrique. Dans les premiers détecteurs, on utilisait de simples céramiques piezoélectriques,

vite remplacées, dans les années 70, par des accéléromètres à SQUIDS. Les transducteurs ont en général une fréquence de résonance accordée sur celle de la barre, ce qui induit un gain considérable entre les oscillations du transducteur et celles de la barre. En effet, le schéma mécanique équivalent du système barre+transducteur est reproduit sur la figure 5. Les raideurs et masses de la barre et du transducteur,  $K_{barre}$ ,  $k_t$ ,  $M_{barre}$  et  $m_t$  respectivement, sont reliées par  $K_{barre}/k_t = M_{barre}/m_t$ , qui exprime l'égalité des deux fréquences de résonance.

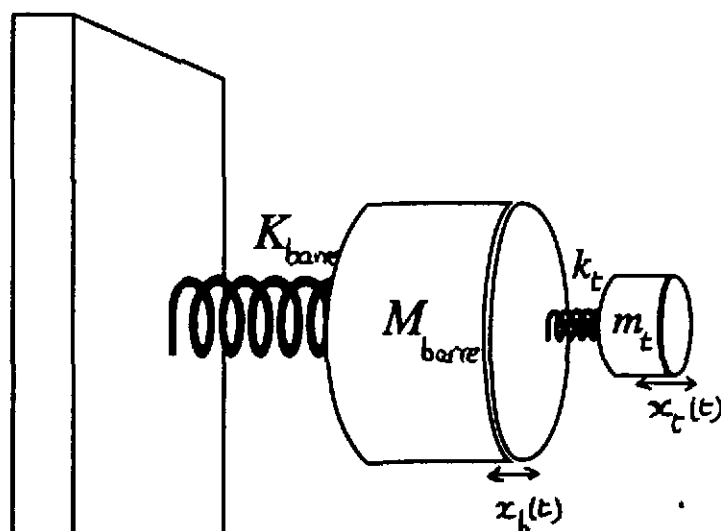


Figure 5: Schéma mécanique du système barre+transducteur

On a donc affaire à deux oscillateurs couplés et on montre sans mal que les vibrations du transducteur suivent celles de la barre mais avec un gain de l'ordre de  $\sqrt{M_{barre}/m_t}$ :

$$x_t = \pm 2 \sqrt{\frac{M_{barre}}{m_t}} x_b \quad (20)$$

Le signal mécanique ainsi amplifié peut être plus facilement converti en signal électrique. Pour un transducteur capacitif comme celui utilisé sur Explorer, la tension mesurée aux bornes du transducteur est simplement proportionnelle à  $x_t$  qui définit la distance entre les deux armatures d'une capacité (voir la figure 6)

L'efficacité du transducteur est définie par

$$\beta = \frac{\text{energie electrique}}{\text{energie mecanique}} \simeq \frac{1/2CV^2}{1/2m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle}, \quad (21)$$

dans le cas d'un transducteur capacitif. Le coefficient  $\beta$  peut être interprété comme un facteur d'adaptation d'impédance entre la barre et le transducteur. Pour les détecteurs actuels on a  $\beta < 10^{-2}$ .



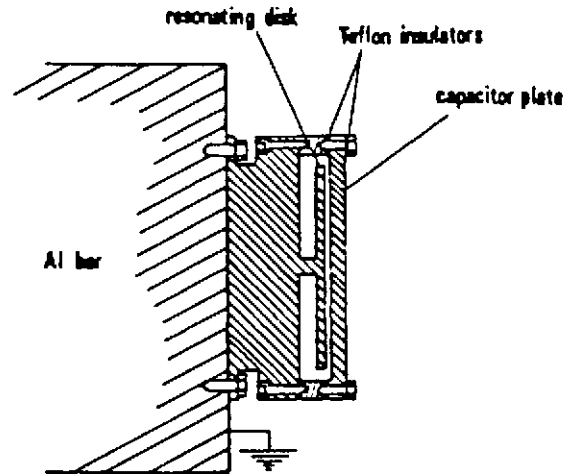


Figure 6: Le transducteur d'Explorer

### 3.4 Bruits et bande passante

Le bruit thermique résulte de l'excitation aléatoire du mode de vibration de la barre par couplage avec le monde extérieur. L'oscillateur harmonique représentant la barre (voir section 3.2) est excité par la force de Langevin de densité spectrale :

$$\tilde{F}_{th}(\omega) = \frac{4kTm\omega_0}{Q}, \quad (22)$$

où  $Q$  est le facteur de qualité mécanique de la barre (voir Appendice 1). La réponse de la barre s'écrit donc, en terme de densité spectrale :

$$\tilde{x}_{th}(\omega) = \frac{4kT\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q}. \quad (23)$$

On peut noter que la force de Langevin est filtrée par la fonction de transfert lorentzienne de la barre de la même façon que la "force" de Riemann due à une OG. Si le bruit thermique était le seul bruit, ou le bruit dominant, dans la barre, alors le rapport signal/bruit serait indépendant de la fréquence et la bande passante serait en principe infinie. Malheureusement, l'existence d'autres sources de bruit (de plus en plus critiques au fur et à mesure que la barre est refroidie) limite sévèrement la bande passante autour de  $\omega_0$ . En particulier le

bruit de l'amplificateur (à peu près blanc) n'est pas filtré par la réponse de la barre et est le principal responsable de la réduction de la bande passante<sup>9)</sup>. Par exemple, dans le cas du transducteur capacitif, la bande passante peut s'écrire<sup>10)</sup>:

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{2\omega_0}{Q} \frac{\alpha\sigma_{th}}{\sqrt{S_0}}} \quad (24)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de proportion entre le déplacement de l'armature du transducteur et la tension mesurée aux bornes de la capacité,  $V = \alpha x$ ,  $\sigma_{th}$  est la valeur rms du bruit thermique et  $S_0$  (unité  $V^2 \text{ Hz}^{-1}$ ) est la densité spectrale du bruit de l'amplificateur, bruit supposé blanc. Avec les valeurs courantes pour les détecteurs actuels, on arrive difficilement à des bandes passantes de l'ordre de quelques dizaines de Hz.

### 3.5 Limite quantique

Étant donné l'ordre de grandeur des déplacements à mesurer pour espérer détecter le passage d'une OG, il est nécessaire de considérer le comportement quantique d'une barre résonnante. La barre étant toujours considérée comme un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  (dans son état fondamental) et de masse équivalente  $m_{eq} = m/2$ , l'incertitude sur la mesure de sa position est donnée par<sup>11)</sup> :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eq}\omega_0}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \quad (25)$$

qui ne dépend que de la masse de la barre et de sa fréquence de vibration. Pour une barre de 2 tonnes résonnant à 1 kHz, on trouve  $\Delta x \simeq 2 \times 10^{-21}$  m, soit une sensibilité rms  $h_{quant} \sim 10^{-21}$ , ce qui est malencontreusement l'ordre de grandeur de la sensibilité minimale pour espérer détecter des OG d'origine extragalactique. Voilà donc le drame apparent des barres de Weber: l'amélioration continue des barres depuis bientôt 40 ans va finir par se heurter à cette limite quantique alors que la valeur de cette limite définit aussi la sensibilité minimale pour enfin détecter quelque chose. Mais cette limite, dite "limite quantique standard" n'est heureusement pas infranchissable. En effet si on réécrit la position  $x(t)$  comme

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_0 t) + X_2 \sin(\omega_0 t), \quad (26)$$

on peut montrer que les deux quadratures  $X_1$  et  $X_2$  vérifient la relation d'incertitude

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar}{m\omega_0}. \quad (27)$$

On retrouve la limite quantique standard pour l'état fondamental de l'oscillateur harmonique pour lequel  $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ . Mais on peut tout à fait favoriser une quadrature,  $X_1$  par exemple, au détriment de l'autre de façon à ce que l'incertitude sur  $X_1$  "batte" la

limite quantique:  $\Delta X_1 \leq \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ . Cela équivaut à préparer l'état quantique du détecteur dans un autre état que son état propre fondamental. Ces concepts appelés "Quantum Non-demolition" en anglais sont développés depuis les années 70 et forment un chapitre de la théorie de la mesure en Mécanique Quantique essentiellement dû au développement des détecteurs d'OG<sup>12)</sup>.

### 3.6 Barres et astrophysique

Il existe actuellement un réseau de 3 barres de seconde génération fonctionnant en coïncidence (Explorer, Allegro et Niobe). C'est le minimum pour reconstruire la direction d'un éventuel signal (la réponse spatiale d'une barre n'étant pas très directionnelle), et donc pour faire de l'astronomie. Par contre, chaque barre étant sensible dans une bande étroite autour de sa fréquence fondamentale, on ne peut pas faire d'astrophysique, c'est à dire remonter au spectre d'émission de la source et en tirer des informations sur la physique de cette source.

Il existe cependant une alternative: la construction de détecteurs "xylophone", par exemple plusieurs barres de longueurs différentes sur un même site, sensible à plusieurs fréquences (la fréquence de résonance d'un cylindre est en  $1/L$ ). Parallèlement, les physiciens des barres ont commencé à développer un nouveau type de détecteur résonnant: les TIGAs (pour Truncated Isocahedral Gravitational Antenna). L'avantage d'une telle géométrie (celle du ballon de football) est qu'en principe on dispose de 5 signaux indépendants sur un seul détecteur et donc qu'on peut reconstruire avec ce seul détecteur la direction et la polarisation de l'OG. Un xylophone de TIGAs pourrait donc fournir un observatoire gravitationnel sur un seul site avec lequel on puisse faire de l'astronomie ET de l'astrophysique. La figure 7 permet de comparer la sensibilité d'un xylophone de barres et d'un xylophone de TIGAs à la sensibilité de LIGO. Attention: les sensibilités des détecteurs résonnants correspondent à leur bruit quantique (on n'y est pas encore!) alors que la sensibilité de LIGO est celle, réaliste, prévue pour la première génération et est loin de la limite quantique (voir chap.4.8); de plus LIGO et VIRGO auront une bien meilleure bande passante que la bande 800 Hz-2.2 kHz montrée sur la figure.

## 4 Détection interférométrique des ondes gravitationnelles

L'idée d'une détection interférométrique des OG remonte au début des années 60<sup>14)</sup>. Les premiers travaux sérieux ne commencèrent qu'une dizaine d'années plus tard, tant pour la théorie de l'instrument et l'étude systématique des bruits<sup>15)</sup> que le premier prototype<sup>16)</sup> qui montrèrent l'intérêt de l'approche interférométrique. Depuis, plusieurs prototypes ont vu le jour, à Garching, Glasgow et au Caltech, avec des sensibilités de l'ordre de  $10^{-18} / \sqrt{\text{Hz}}$ , comparables à celle des barres modernes autour de leur fréquence de résonance. Aujourd'hui, des grands projets d'interféromètre kilométriques, comme le projet franco-italien

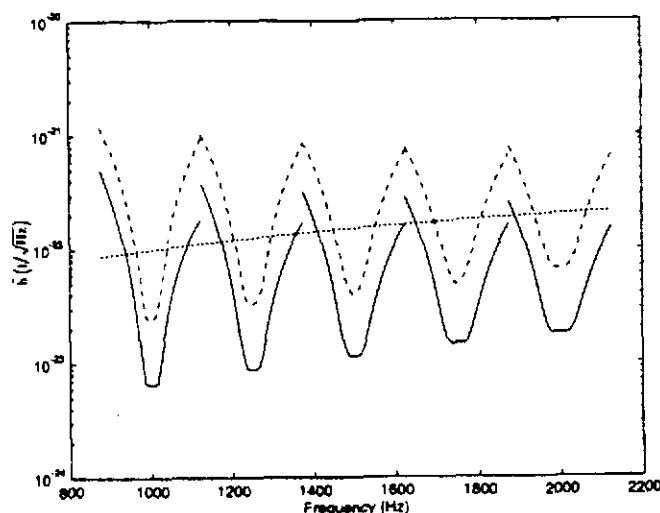


Figure 7: Sensibilités comparés d'un xylophone de TIGAs à la limite quantique (trait plein), d'un xylophone de barres traditionnelles à la limite quantique (tirets) et du détecteur interférométrique LIGO (limité par le bruit de photons à ces fréquences (pointillés)<sup>13)</sup>

VIRGO ou le projet américain LIGO, visent des sensibilités de l'ordre de  $10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}$  autour de 1 kHz et  $10^{-21} / \sqrt{\text{Hz}}$  autour de 10 Hz, ce que semble permettre le meilleur de la technologie actuelle, comme on va le voir dans ce qui suit.

#### 4.1 Principe: phase minimale détectable

Une OG incidente sur une interféromètre de Michelson va induire un changement apparent de longueur de ses bras: l'un semble s'allonger pendant que l'autre se rétrécit et vice versa une demi-période gravitationnelle plus tard (voir 1.2) Un point de vue équivalent est aussi de dire que l'indice du vide dans les bras de l'interféromètre est modifié. Si l'OG est polarisée "+" selon les bras du Michelson, supposés alignés selon les directions Ox et Oy, d'incidence normale et de fréquence  $\nu_{og} = \Omega/2\pi$ , alors on peut calculer, à partir de

$ds^2 = 0$ , les temps de vol (retardés) des photons pour un aller-retour dans chacun des bras de l'interféromètre :

$$t_r \simeq t - \frac{2L}{c} \pm h \frac{L}{c} \cos \left( \Omega t + \frac{\Omega L}{c} \right), \quad (28)$$

où  $L$  est la longueur (macroscopique) des bras, et le  $\pm$  vaut par exemple  $+$  dans le bras Ox et  $-$  dans le bras Oy. Chaque onde réfléchiée par les bras de l'interféromètre acquiert donc une phase  $\omega t_r$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde lumineuse incidente. On peut maintenant développer le terme de phase correspondant,

$$e^{-i\omega t_r} = e^{\frac{2i\omega L}{c}} \left( e^{-i\omega t} \pm \frac{h\omega L}{2c} e^{\frac{-i\Omega L}{c}} e^{-i(\omega+\Omega)t} \pm \frac{h\omega L}{2c} e^{\frac{i\Omega L}{c}} e^{-i(\omega-\Omega)t} \right), \quad (29)$$

et on voit que l'effet de l'OG revient finalement, du point de vue de la lumière, à une modulation de phase et une modulation de plus différentielle dans les deux bras, qui induit l'apparition de bandes latérales à la fréquence de l'OG autour d'une porteuse à la fréquence de la lumière. Selon les réglages de l'interféromètre, les bandes latérales réfléchiées par chacun des bras peuvent interférer de façon à induire sur une photodiode placée en sortie un signal reproduisant fidèlement la signature de l'OG, c'est à dire proportionnel à l'amplitude  $h$  et de même fréquence angulaire  $\Omega$  que l'OG.

La question qui se pose ensuite est d'estimer la phase minimale puis l'amplitude d'OG minimale détectables par un Michelson. Considérons un interféromètre tel que celui représenté sur la fig.8, éclairé par un faisceau de puissance  $P_{in}$  et transmettant vers un photodétecteur une puissance  $P_{out}$ . On peut écrire le déphasage entre les deux bras comme  $\delta\varphi = \pi + \alpha + \varphi_{OG}$ , où le terme  $\pi + \alpha$  résulte du réglage du Michelson et  $\varphi_{OG}$  est le déphasage induit par une éventuelle OG, proportionnel à l'amplitude de l'OG. Le terme de réglage du Michelson est écrit ainsi de façon à ce que  $\alpha$  représente un écart à la frange noire (minimum de transmission) : si  $\alpha = 0$  et en l'absence d'OG, l'interféromètre est réglé sur une frange noire ( $P_{out} = 0$ ).

La puissance transmise par le Michelson s'écrit en général comme

$$P_{out} = P_{in} \sin^2 \left( \frac{\alpha + \varphi_{OG}}{2} \right), \quad (30)$$

et comme  $\varphi_{OG} \ll 1$ , on obtient :

$$P_{out} \simeq P_{in} \left( \sin^2(\alpha/2) + \frac{1}{2} \sin \alpha \varphi_{OG} \right). \quad (31)$$

On suppose que les seules perturbations à la mesure proviennent du bruit de photons (ou bruit de grenaille ou bruit de comptage de photons). Pour évaluer ce bruit, on calcule les fluctuations  $\delta N$  du nombre  $N$  de photons détectés par la photodiode en l'absence de signal ( $\varphi_{OG} = 0$ ). Pendant le temps  $\delta t$ , la photodiode compte  $N$  photons tel que :

$$N\hbar\omega = \eta P_{in} \sin^2(\alpha/2) \delta t, \quad (32)$$

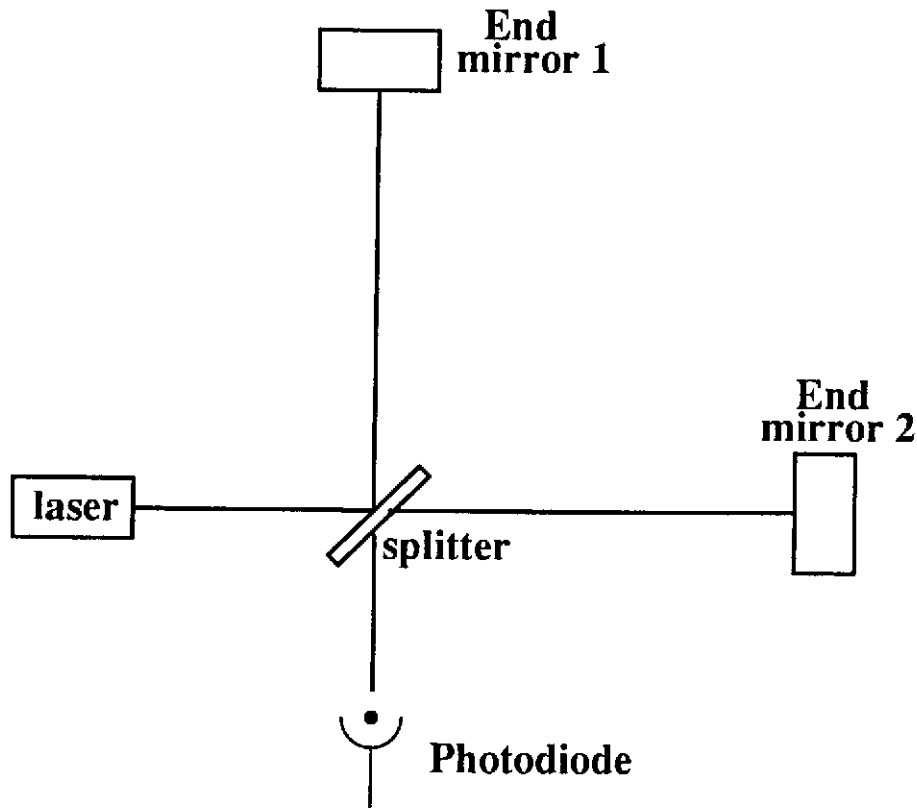


Figure 8: Schéma de l'interféromètre de Michelson.

où le rendement quantique  $\eta$  de la diode est proche de 1. Le nombre de photons  $N$  fluctue comme  $\delta N = \sqrt{N}$  (processus poissonien), soit :

$$\delta N = \sqrt{\frac{\eta P_{in} \delta t}{\hbar \omega} \sin^2(\alpha/2)}, \quad (33)$$

ce qui correspond à une fluctuation de puissance détectée  $\delta P$  telle que  $\eta \delta P \delta t = \delta N \hbar \omega$ , c'est à dire :

$$\delta P = \sqrt{\frac{P_{in} \hbar \omega}{\eta \delta t}} |\sin(\alpha/2)|. \quad (34)$$

En présence d'une OG, le signal correspond à la puissance détectée :

$$P_s = \frac{1}{2} P_{in} \sin \alpha \varphi_{OG}, \quad (35)$$

d'où le rapport signal sur bruit  $S/B = P_s/\delta P$  :

$$S/B = \sqrt{\frac{\eta P_{in} \delta t}{\hbar \omega}} |\cos(\alpha/2)| \varphi_{OG}. \quad (36)$$

Le rapport  $S/B$  est donc maximal si  $\alpha = 0$ , c'est à dire que l'expérimentateur a tout intérêt à régler le Michelson sur une frange noire (interféromètre parfaitement symétrique). Dans ce cas le  $S/B$  devient :

$$S/B_{opt} = \sqrt{\frac{\eta P_{in} \delta t}{\hbar \omega}} \varphi_{OG}, \quad (37)$$

et le plus petit déphasage détectable par un interféromètre de Michelson limité par le bruit de photons, correspondant au cas limite  $S/B=1$ , est :

$$\varphi_{OG}^{min} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\eta P_{in} \delta t}}. \quad (38)$$

Avec un laser source tel que celui prévu pour VIRGO ( $\lambda = 1064$  nm et  $P_{in} \simeq 20$  W) et pour un photodétecteur idéal ( $\eta = 1$ ), on obtient en terme de sensibilité :

$$\varphi_{OG}^{min} \simeq 10^{-10} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (39)$$

En terme d'amplitude d'OG  $h$ , on a  $\varphi_{OG} = \frac{4\pi L}{\lambda} h$ , d'où la sensibilité d'un Michelson de longueur de bras  $L$  et éclairé par un laser de puissance  $P_{in}$  :

$$\tilde{h}_{min} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\eta P_{in}}} / \sqrt{\text{Hz}}. \quad (40)$$

Pour les valeurs numériques précédentes et pour  $L = 1$  m, on obtient  $\tilde{h}_{min} \simeq 10^{-17} / \sqrt{\text{Hz}}$ .

On est loin de la sensibilité visée qui est  $\tilde{h} \simeq 2 - 3 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}$ . En inspectant l'équation 40, on remarque qu'on ne peut jouer que sur deux paramètres pour améliorer la sensibilité (si celle-ci est limitée par le bruit de photons) : la longueur des bras et la puissance du laser.

## 4.2 Augmenter la longueur : cavités Fabry-Perot

On peut tout d'abord augmenter la longueur physique des bras, mais on est vite arrêté par des contraintes géométriques (il faut compenser la courbure de la Terre en surélevant les tours abritant les miroirs de renvoi par exmple), de terrain adéquat, et surtout de coût (en particulier du tube à vide). Les longueurs choisies pour LIGO et VIRGO sont respectivement 4 et 3 km. L'emploi de bras de 3 km conduit à une sensibilité de l'ordre de  $\tilde{h} \simeq 3 \times 10^{-21} / \sqrt{\text{Hz}}$  et il reste 2 ordres de grandeur à gagner. Notons que l'avantage d'étirer le plus possible la longueur des bras est aussi de diminuer l'influence des bruits (on cherche à détecter une variation *relative* de longueur).

Les longueurs des bras étant fixées, on peut aller plus loin en augmentant cette fois les longueurs optiques, en remplaçant les bras simples du Michelson par des cavités Fabry-Pérot, dont le miroir d'entrée est placé près de la séparatrice et le miroir de fond à l'extrémité

du bras, 3 km plus loin dans le cas de VIRGO (voir fig.9). Des rappels utiles concernant les cavités sont donnés dans l'appendice 2. Pour une cavité de finesse  $\mathcal{F}$ , le nombre d'allers-retours équivalent pour les photons est de  $2\mathcal{F}/\pi$  ce qui correspond à une longueur de bras équivalente de  $L_{opt} = \mathcal{F}L/\pi$ . Pour une cavité du type VIRGO de longueur 3 km et de finesse 50, on a  $L_{opt} \simeq 50$  km. La présence de cavités dans les bras n'a pas en fait un effet aussi simple que de modifier la longueur optique mais change la réponse du Michelson à une OG. La fonction de transfert gravitationnelle d'une cavité peut s'écrire<sup>17)</sup> comme :

$$F(\nu_{OG}) = \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{\left(\frac{t_1}{1-r_1r_2}\right)^2 r_2}{\sqrt{1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{2\pi\nu_{OG}L}{c}\right)}}, \quad (41)$$

où l'on reconnaît la fonction d'Airy de la cavité exprimée à la fréquence de l'OG, ce qui montre que la cavité se comporte comme un filtre passe-bas (c'est une propriété générale des Fabry-Perot) avec une fréquence de coupure  $f_c = c/4\mathcal{F}L \simeq 500$  Hz dans le cas de VIRGO. La sensibilité se déduit de la fonction de transfert d'une cavité par<sup>17)</sup> :

$$\tilde{h}(\nu_{OG}) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{P_{in}}} \frac{1}{2F(\nu_{OG})}. \quad (42)$$

Le gain par rapport à un Michelson simple de longueur 3 km, pour lequel la fonction de transfert de chaque bras est  $F(\nu_{OG}) = 2\pi L/\lambda$ , est à basse fréquence  $\simeq \left(\frac{t_1}{1-r_1r_2}\right)^2 \simeq 31.8$  dans le cas de VIRGO et à 1 kHz  $\simeq 14.3$  toujours pour VIRGO.

### 4.3 Augmenter la puissance : le recyclage

L'autre façon d'améliorer la sensibilité est d'augmenter la puissance. Malheureusement, on se sait pas réaliser avec la technologie actuelle des lasers continus fiables et stables en fréquence et en amplitude et délivrant une puissance supérieure à quelques dizaines de Watts. Mais on peut tirer profit de la configuration de l'interféromètre. Celui-ci, réglé sur une frange noire, peut être perçu comme un miroir presque parfaitement réfléchissant (en effet toute la lumière du laser est renvoyé par le Michelson vers la source). On peut alors interposer un miroir partiellement réfléchissant entre la source et l'interféromètre, de façon à former une nouvelle cavité Fabry-Perot (avec un miroir de renvoi "composite"), voir la fig.9. Si cette cavité est résonnante pour le laser incident, alors il y a gain de puissance  $G$  pour l'onde stockée dans la cavité (voir l'Appendice 2). Vu depuis la séparatrice, tout ce passe comme si, à la place d'un laser de puissance  $P_{in}$ , on disposait d'une source de puissance  $G \times P_{in}$ . C'est le principe du "recyclage de puissance", dû à l'écossais Drever<sup>18)</sup>. La puissance maximale est obtenue quand le gain  $G$  compense exactement les pertes  $\mathcal{P}$  de l'interféromètre :  $G = 1/\mathcal{P}$ , la cavité de recyclage est alors couplée optimalement au laser incident (on parle de "recyclage optimal") et toute l'énergie incidente est utile et est dissipée, à travers les pertes, dans l'interféromètre. C'est un bel exemple d'adaptation d'impédances. Finalement, si l'on dispose d'une source laser de 20 W et d'un interféromètre



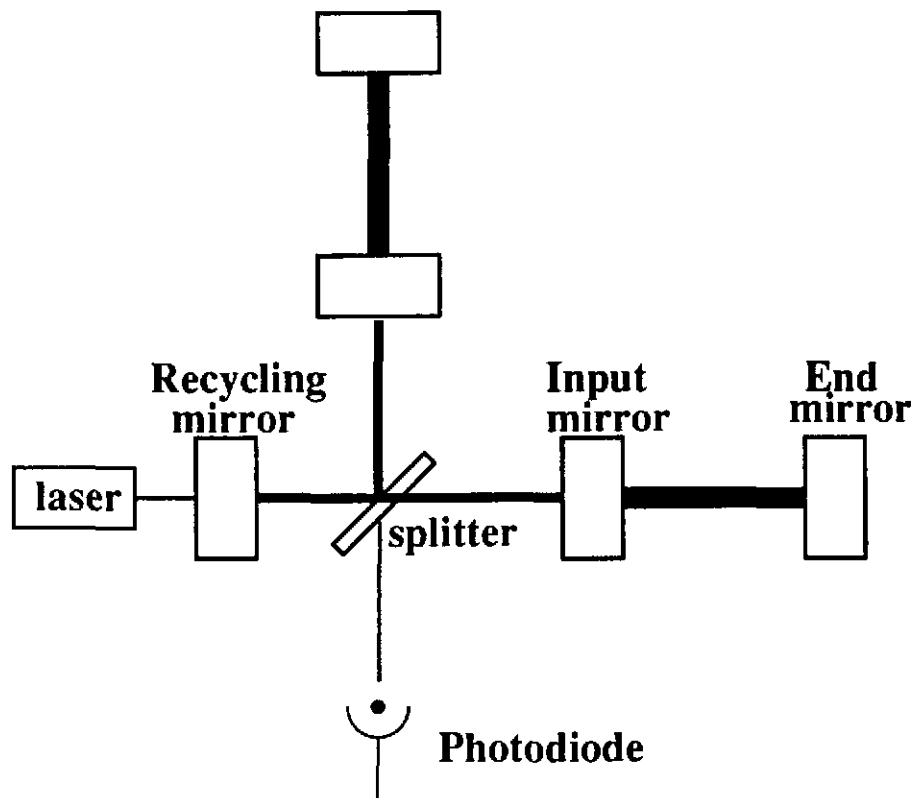


Figure 9: Schéma d'un interféromètre à recyclage tel que VIRGO.

à cavités de pertes de l'ordre de 2%, (soit  $G \sim 50$ ) on arrive à une puissance au niveau de la séparatrice de l'ordre de 1 kW, ce qui permet d'obtenir l'ordre de grandeur qui manquait pour atteindre la sensibilité, limitée par le bruit de photons,  $\tilde{h} \simeq 2 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}$ . Bien entendu, l'objectif de 2% de pertes pour l'interféromètre fixe les tolérances sur la qualité des composants optiques.

#### 4.4 Le bruit sismique et son filtrage

La densité spectrale de déplacement induit par le bruit sismique est typiquement pour un terrain calme de l'ordre de  $\delta \tilde{x}_{\text{sism}}(\nu) \sim \frac{10^{-6}}{\nu^2} \text{m} / \sqrt{\text{Hz}}$ . Une telle valeur a été mesurée en particulier sur le site de VIRGO à Cascina (sur la plaine sédimentaire du bassin de l'Arno). Un tel bruit se traduit en terme d'amplitude d'OG ( $h \sim \delta x / L$ ) par :

$$\tilde{h}_{\text{sism}}(\nu) \sim \frac{7 \times 10^{-10}}{\nu^2} / \sqrt{\text{Hz}}, \quad (43)$$

avec  $L = 3 \text{ km}$ . Il est donc indispensable de filtrer ce bruit, c'est à dire isoler les parties sensibles du détecteur (les miroirs) de ce bruit sismique.

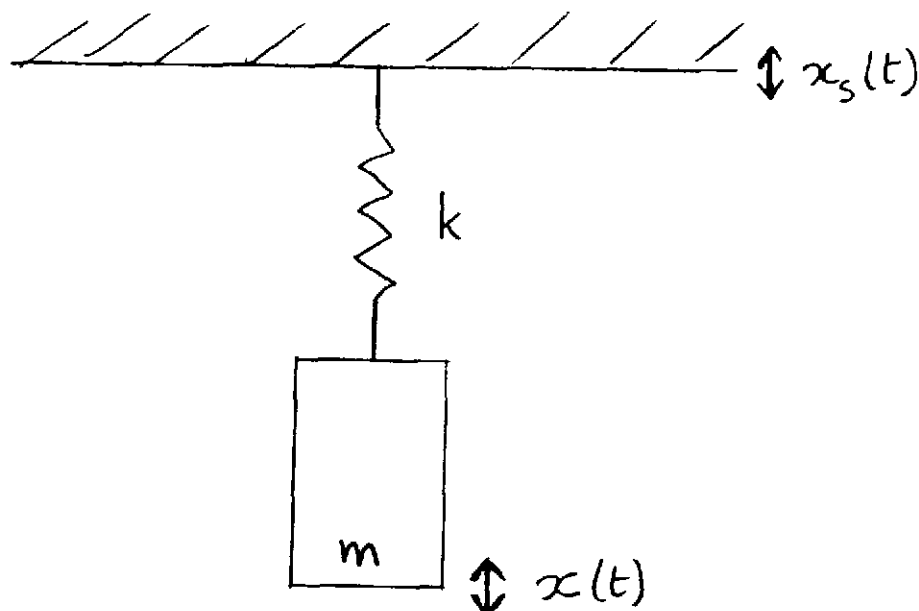


Figure 10: Masse suspendue au bout d'un ressort. Son mouvement est décrit par  $x(t)$ , les vibrations du sol par  $x_s(t)$ .

L'isolation sismique repose sur un principe fort simple: si pour un oscillateur il y a gain d'amplitude à résonance, il peut y avoir atténuation en dehors. En effet, considérons le pendule de la fig.10; le déplacement de la masse test obéit à (en négligeant l'amortissement):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k(x - x_s) = 0. \quad (44)$$

En passant dans l'espace de Fourier, on déduit immédiatement la fonction de transfert entre les fluctuations de  $x_s$  et celles de  $x$ :

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{x}_s(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (45)$$

et si  $\omega \gg \omega_0$ , alors  $|\tilde{H}(\omega)| = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ . Il y a bien atténuation si  $\omega > \omega_0$ . Si maintenant, on attache  $N$  pendules identiques de même pulsation à la queue leu, la fonction de transfert globale devient

$$|\tilde{H}(\omega)| = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2N}. \quad (46)$$

Prenons l'exemple de 5 oscillateurs de pulsation  $\omega_0 = 2\pi \times 1$  Hz; on trouve une atténuation  $|\tilde{H}| \sim 10^{10}$  à 10 Hz, ce qui donne un bruit sismique résiduel

$$\tilde{h}_{sism}(\nu) \sim \frac{7 \times 10^{-10}}{\nu^{12}} / \sqrt{\text{Hz}}, \quad (47)$$

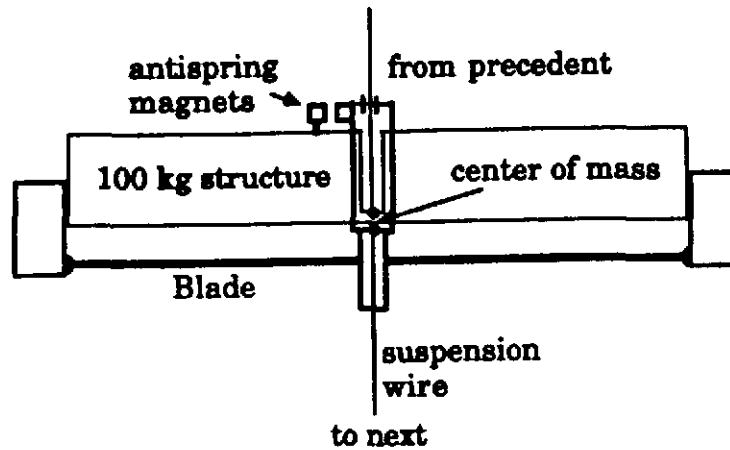


Figure 11: Schéma d'un atténuateur sismique.

soit  $\hat{h}_{sism} \sim 7 \times 10^{-22} / \sqrt{\text{Hz}}$  à 10 Hz. Le "superatténuateur" développé pour VIRGO suit ce principe. Il s'agit d'une chaîne de 5 éléments en forme de boîte de camembert, chacun supportant plusieurs ressorts à lame auquel est attaché le point de suspension du câble reliant un étage au précédent (voir figures 11 et 12).

#### 4.5 Les bruits thermiques

Chaque partie sensible du détecteur interférométrique rassemble une collection de résonateurs mécaniques perpétuellement excités par l'agitation thermique: le miroir lui-même, les fils de suspension et le pendule formé par le miroir suspendu au bout de la chaîne de suspension. Chaque mode est caractérisé principalement par sa ou ses fréquences de résonance et par le facteur de qualité de chacune de ces résonances, relié aux pertes mécaniques (frottement généralisé). Les facteurs de qualité de ces résonateurs ont été mesurés dans différents laboratoires et on estime raisonnables les valeurs  $Q \sim 10^6$  (et même plus si on

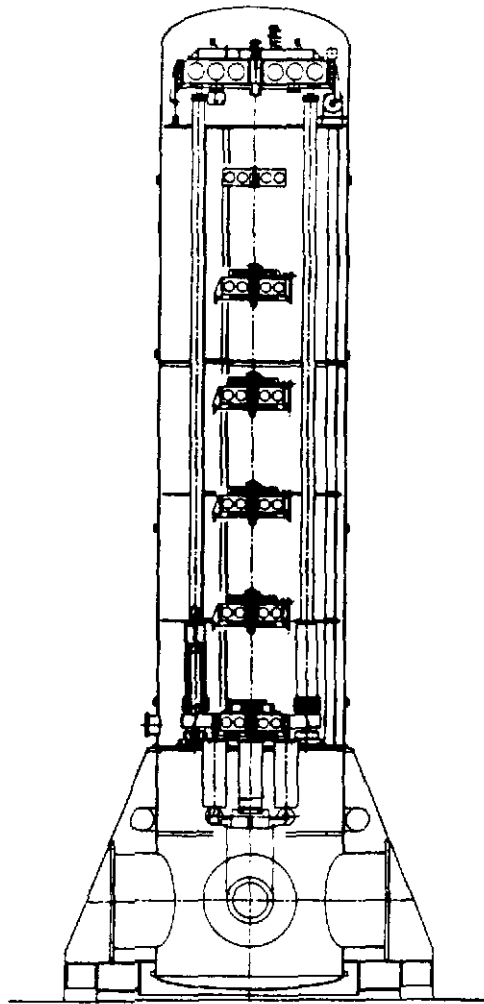


Figure 12: Une tour abritant l'un des miroirs de VIRGO. On remarque la chaîne du Super-Atténuateur à laquelle est suspendu le miroir.

est optimiste) pour les substrats de Silice des miroirs,  $Q \sim 10^4 - 10^5$  pour les différents modes des fils de suspension et  $Q \sim 10^6 - 10^7$  pour le mode pendule (difficile à mesurer). De plus, de façon générale (voit Appendice I), le comportement du bruit thermique vis à vis de la fréquence  $\nu$  est en  $1\nu^{1/2}$  en deçà de la fréquence de résonance et en  $1\nu^{5/2}$  au delà. Ainsi le bruit thermique associé aux pendules est estimé dans VIRGO à

$$\bar{h}_{pend}(\nu) \sim \frac{2 \times 10^{-18}}{\nu^{5/2}} / \sqrt{\text{Hz}}, \quad (48)$$

avec un facteur de qualité  $Q = 10^6$ , et une fréquence de résonance ( $\propto \sqrt{g/l_{eq}}$ ) de l'ordre de 0.6 Hz. Cette expression est donc valable si  $\nu \gg 0.6$  Hz, c'est à dire en pratique au delà de quelques Hz. Le bruit thermique pendulaire est donc un bruit important: c'est lui qui domine à basse fréquence (jusqu'à  $\sim 30$  Hz) dans VIRGO. Heureusement, il diminue très vite en fonction de la fréquence.

En ce qui concerne le bruit thermique des miroirs, il faut sommer les contributions des

différents modes de vibrations et aussi prendre en compte le couplage avec le faisceau lumineux. Par exemple les modes de vibration de valeur moyenne nulle ne vont pas contribuer au bruit total. Pour VIRGO, ce bruit est estimé à <sup>19)</sup> :

$$\tilde{h}_{\text{mir}}(\nu) \sim \frac{6 \times 10^{-22}}{\nu^{1/2}} / \sqrt{\text{Hz}}, \quad (49)$$

valable pour les fréquences  $\nu$  inférieures aux fréquences fondamentales des miroirs (4.5 kHz).

Enfin, le bruit thermique associé aux modes "violon" des fils de suspension se traduit par l'apparition de résonances aigues dans le spectre de sensibilité (les queues des résonances sont largement en dessous des contributions précédentes). Ce bruit a un impact moins important que les deux précédents car ces résonances aigues ("lignes") peuvent être éliminées par un filtrage adéquat.

#### 4.6 Les bruits du laser

Certains bruits inhérents au laser source peuvent induire un bruit de détection supplémentaire via les asymétries de l'interféromètre. Le bruit du laser le plus ennuyeux a priori est le bruit de fréquence. En effet les fluctuations de fréquence du laser  $\delta\tilde{\nu}$  induisent les fluctuations de phase en sortie du Michelson :

$$\delta\tilde{\varphi}(\nu) = \frac{2\pi d}{c} \delta\tilde{\nu}(\nu), \quad (50)$$

où  $d$  est la différence de marche. Si  $d = 0$ , le bruit de phase est toujours nul quelque soient les fluctuations du laser. Par contre, dès qu'on s'écarte de la différence de marche nulle, un bruit de phase apparaît. Une différence de marche non nulle peut être due à une asymétrie de longueur ou de finesse des bras de l'interféromètre; en effet, on peut écrire succinctement  $d = \Delta\mathcal{F}L = L\Delta\mathcal{F} + \mathcal{F}\Delta L$ , à un facteur près. En terme de sensibilité à une OG, et rappelant qu'une OG d'amplitude  $h$  provoque un déphasage  $\delta\varphi \sim \frac{4\pi L\nu}{c} \frac{\mathcal{F}}{\pi} h$ , on voit que le couplage entre des fluctuations de fréquence du laser  $\delta\tilde{\nu}$  et l'asymétrie du Michelson  $\Delta L/L + \Delta\mathcal{F}/\mathcal{F}$  se traduit par le bruit :

$$\tilde{h}(\nu) \sim \left( \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \right) \frac{\delta\tilde{\nu}(\nu)}{\nu}. \quad (51)$$

Si on demande que ce bruit soit plus petit que le bruit de photons ( $\sim 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ ) et sachant que l'asymétrie sur la finesse peut être, selon les fabricants de miroir, au mieux de  $\Delta\mathcal{F}/\mathcal{F} \sim 10^{-3}$ , on déduit la contrainte sur les fluctuations de fréquence du laser :  $\delta\tilde{\nu} < 10^{-5} \text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Un tel niveau de stabilité naturelle n'existe pas dans les lasers actuels. Pour l'atteindre on utilise une technique de stabilisation active grâce à une cavité rigide de grande finesse ( $\mathcal{F} \sim 30000$ ) fabriquée en ULE, matériau très peu dilatable. Cette cavité résonnante fournit ainsi un étalon de longueur ce qui équivaut à un étalon de fréquence. Le faisceau laser est asservi sur cette cavité et reproduit les fluctuations de cette dernière à la

place de ses fluctuations propres. Le laser stabilisé à Orsay <sup>20)</sup> selon ces principes constitue le standard de fréquence le plus stable à court terme du monde (à court terme car on a besoin de stabilité uniquement dans la gamme de fréquences allant de quelques Hz à 10 kHz).

Les fluctuations de puissance du laser induisent aussi un bruit de phase mais celui est bien moins critique que le précédent. En ce qui concerne les fluctuations de géométrie (pointé, taille et position du waist), ces dernières peuvent se coupler aux asymétries d'alignement des bras de l'interféromètre pour donner un bruit de nature similaire au précédent <sup>21)</sup>. Pour atténuer cet effet, on dispose en entrée de l'interféromètre, une cavité en anneau de finesse de l'ordre du millier appelée "mode-cleaner" <sup>22)</sup> et dont l'objet est d'éliminer les fluctuations de géométrie du laser incident (tout ce qui n'est pas dans le bon mode). Une cavité Fabry-Perot est en effet aussi un filtre spatial (voir Appendice 2). Un avantage annexe est que ses capacités de filtrage fréquentiel permettent d'assouplir un peu la contrainte sur les fluctuations de fréquence.

#### 4.7 Autres bruits

Parmi toutes les autres sources de bruit, la plupart sont négligeables devant les précédentes, et seules certaines demandent des contraintes supplémentaires sur le design de l'interféromètre. Ainsi, la présence de gaz résiduel dans les bras peut induire des fluctuations d'indice et donc simuler un signal d'OG. Pour s'affranchir de ce bruit, il faut maintenir un vide poussé, pression résiduelle  $< 10^{-7}$  mbar. Ceci implique une batterie de stations de pompes (une dizaine par bras), et, en amont, un étuvage spécial des tubes et des bas de tour pour forcer le dégazage avant assemblage. Remarquons que le volume de vide dans VIRGO est d'environ  $7000 \text{ m}^3$  (2 bras de 3 km de long et de 1.2 m de diamètre) ce qui en fait la plus grande enceinte à vide jamais construite! Le système de vide défini pour VIRGO (tubes + pompes) est la partie la plus coûteuse de l'expérience (environ 1/3 du coût total).

Un autre bruit qui peut être très embêtant est le bruit de lumière diffusée. Les miroirs n'étant pas parfaits, ils possèdent une certaine rugosité responsable de pertes par diffusion. Les photons diffusés sous un grand angle vont rencontrer les parois du tube à vide, s'y réfléchir un certain nombre de fois avant d'éventuellement se recombiner avec le faisceau principal. Le problème vient du fait que les tubes ne sont pas isolés sismiquement et qu'à chaque réflexion, les photons diffusés acquièrent une phase aléatoire. Le bruit de phase résultant est, si l'on ne fait rien, du même ordre de grandeur que le bruit de photon ( $\sim 10^{-11} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour 1 kW dans la cavité de recyclage). Le remède consiste à utiliser des "pièges à lumière" dans les tubes. Ce sont des diaphragmes en forme de cônes tronqués (voir fig.13); un revêtement absorbant est déposé sur les parties externes de façon à ce qu'un photon incident sur le piège, astreint à de multiples réflexions, ait une probabilité  $\sim 1$  d'être absorbé. Dans VIRGO, il y aura 80 de ces pièges dans chacun des bras, à des emplacements optimisés pour réduire le plus possible le bruit de lumière diffusée.

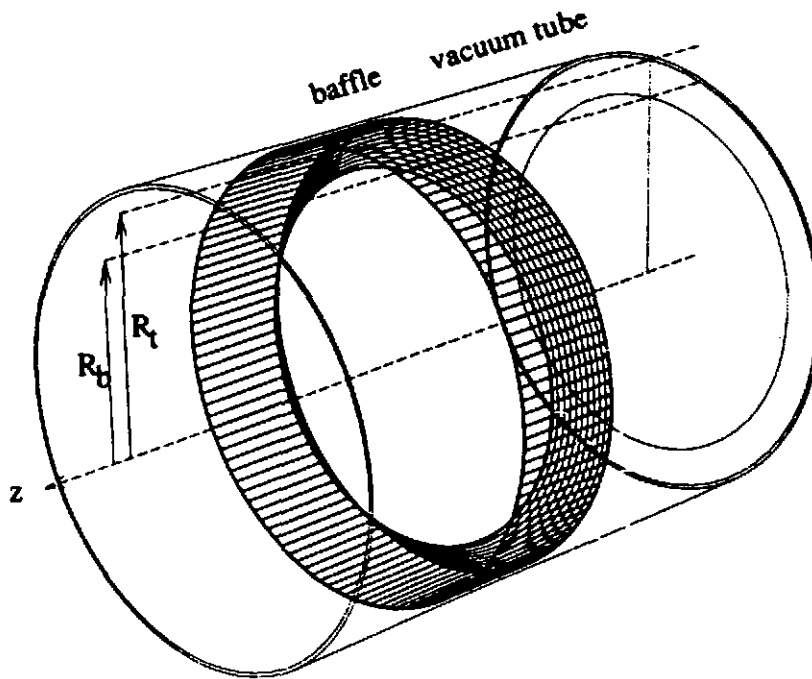


Figure 13: Un piège à lumière conçu dans VIRGO.

#### 4.8 Limite quantique

Le bruit de photon calculé plus haut est en fait un aspect du bruit quantique. La limite quantique à la détection interférométrique résulte du fait que plus on veut réduire le bruit de photons, c'est à dire augmenter les puissances circulantes, plus les miroirs vont être sujets aux fluctuations de pression de radiation<sup>23)</sup>. Lors de la mesure de la position d'un miroir, si  $N$  photons sont détectés pendant  $\delta t$ , l'incertitude sur la position est

$$\delta x_{bp} \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{P\delta t}}, \quad (52)$$

où l'on a considéré un photo-détecteur parfait. Les fluctuations d'impulsion des photons, c'est à dire (comme  $p = N\hbar\omega/c$ )  $\delta p = \sqrt{N}\hbar\omega/c$ , induisent les fluctuations d'impulsion du miroir  $\delta p_{mir} = 2\delta p = \sqrt{N}\hbar\omega/c$  via la pression de radiation (vrai si la réflectivité du miroir est proche de 1). L'incertitude correspondante sur la mesure de la position du miroir est

alors :

$$\delta x_{pr} \sim \frac{\delta p_{mir}}{m} \delta t = \sqrt{N} \frac{2\hbar\omega}{mc} \delta t. \quad (53)$$

Au total, bruit de photon et fluctuations de pression de radiation induisent l'incertitude sur la mesure de position :

$$\delta x^2 = \delta x_{bp}^2 + \delta x_{pr}^2 = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{N} + \left(\frac{2\hbar\omega}{mc} \delta t\right)^2 N. \quad (54)$$

L'incertitude  $\delta x$  est minimale pour  $N_0 = \frac{\lambda mc}{8\pi\hbar\omega\delta t}$  et alors  $\delta x_{bp} = \delta x_{pr}$  (les deux bruits contribuent pour la même part à la limite quantique). Dans ce cas , on a finalement :

$$\delta x = \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} \delta t, \quad (55)$$

qui ne dépend que de la masse  $m$  du miroir. Du point de vue sensibilité aux ondes gravitationnelles d'un interféromètre possédant 2 miroirs par bras, on a finalement :

$$\tilde{h}_{quant}(\nu) \simeq \frac{2}{L} \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} \frac{1}{2\pi\nu}. \quad (56)$$

Avec  $L = 3$  km et  $m = 30$  kg, on trouve :

$$\tilde{h}_{quant}(\nu) \simeq \frac{3 \times 10^{-22}}{\nu} / \sqrt{\text{Hz}}. \quad (57)$$

Contrairement aux barres de Weber, la sensibilité prévue des grands interféromètres tels que LIGO ou VIRGO est encore largement au dessus du bruit quantique qui vaut  $\tilde{h} \sim 3 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}$  à 10 Hz et  $\tilde{h} \sim 3 \times 10^{-25} / \sqrt{\text{Hz}}$  à 1 kHz. Malgré tout, certains groupes d'optique quantique réfléchissent, depuis une quinzaine d'années, aux moyens de battre la limite quantique<sup>24</sup>). En théorie, cela peut sembler facile : il suffit de diminuer l'incertitude sur le bruit de phase (n'oublions pas qu'un Michelson effectue une mesure de phase) au détriment du bruit d'amplitude. En pratique, on peut préparer la lumière dans un état de phase comprimée ("phase squeezing") mais les performances sont encore très faible (typiquement un gain de 3 dB soit un facteur 2).

## 4.9 La collaboration VIRGO

La collaboration VIRGO regroupe plusieurs équipes françaises (du LAL à Orsay, du LAPP à Annecy, de l'IPN de Lyon et de l'ESPCI à Paris) et italiennes (sections INFN de Pise, de Naples, Rome+Frascati et Perugia). Le site de l'expérience est situé à Cascina près de Pise, et les dimensions des bras de l'interféromètre ont été fixées à 3 km. Le schéma de principe de l'interféromètre est reproduit sur la fig.14.



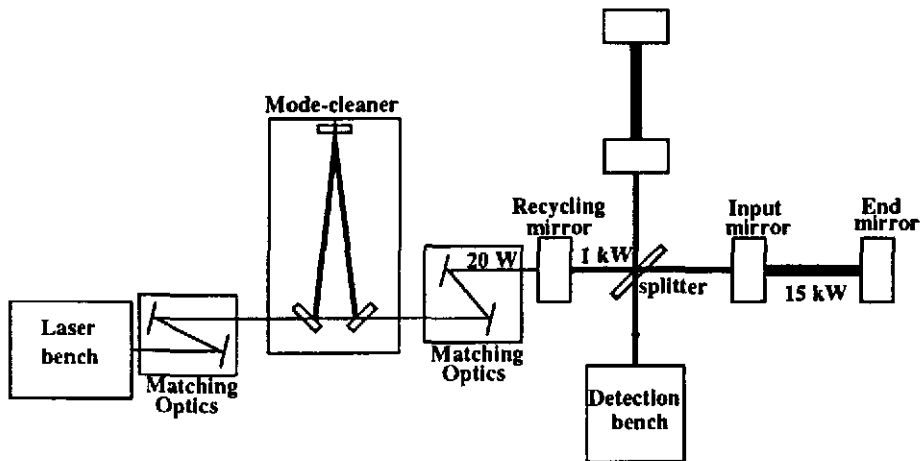


Figure 14: Schéma optique simplifié de VIRGO.

La partie centrale (banc d'entrée+mode-cleaner+cavité de recyclage+banc de détection) devrait être terminée puis testée courant 1999. L'interféromètre complet devrait être terminé en 2001, et la prise de données pourra enfin commencer. La sensibilité visée est telle que  $\tilde{h} \sim 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 10 Hz et  $\tilde{h} \sim 3 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 1 kHz. La courbe de sensibilité "officielle" est montrée sur la figure 15; notons que certaines estimations de bruit sont "conservatrices" et que cette courbe de sensibilité doit être considérée comme un minimum. Il est clair aussi qu'une amélioration de la sensibilité passe par une diminution des bruits thermiques, peut-être par l'utilisation d'autres matériaux (miroirs en Saphir à la place de la Silice par exemple).

Finalement, le coût de l'expérience est précisément 81.7 MEcus ( $\sim 500$  MF), répartis pour 55% pour l'Italie (qui possède le site) et 45% pour la France.

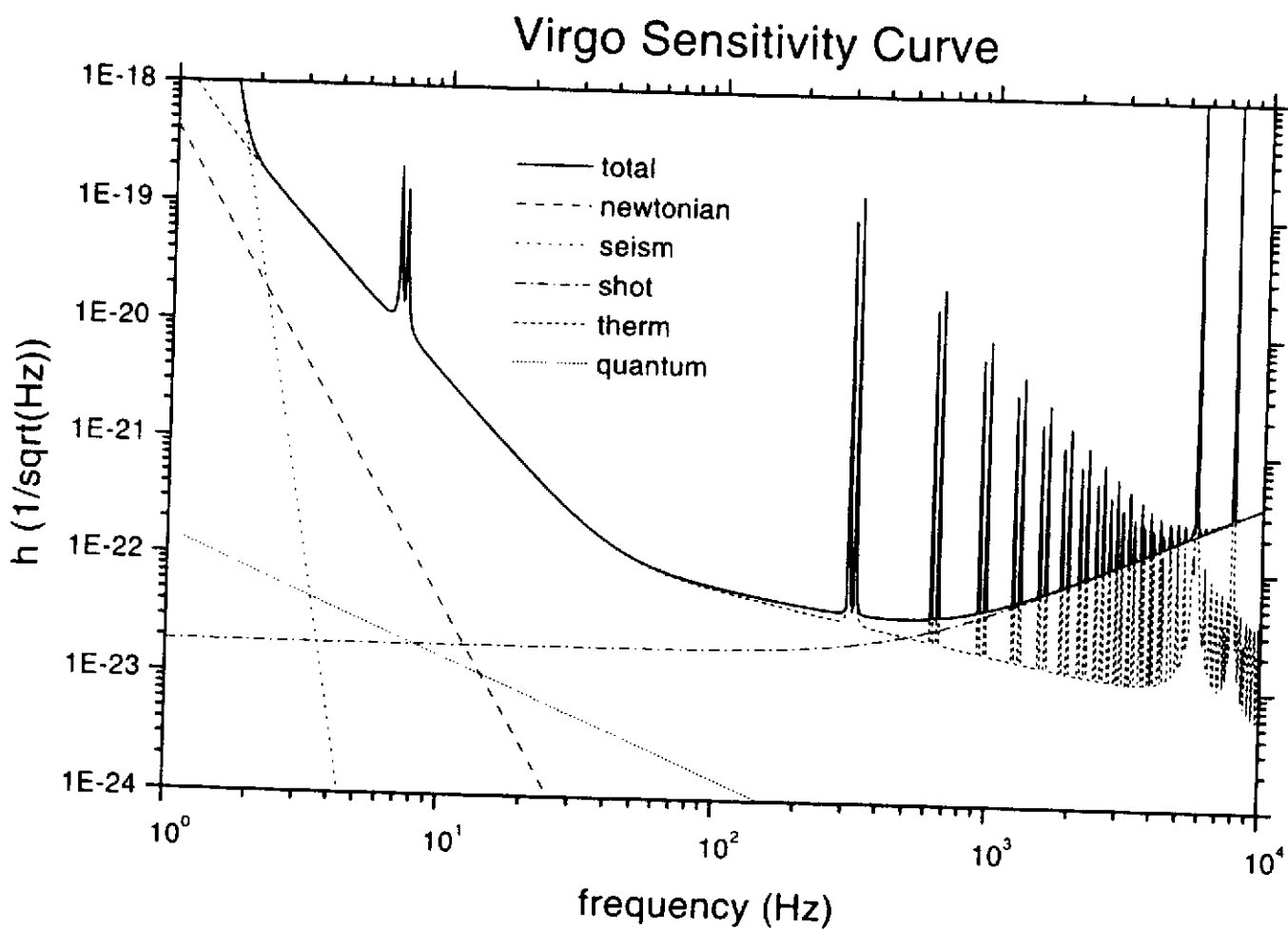


Figure 15: Sensibilité prévue pour VIRGO. On note que les bruits thermiques dominent la sensibilité jusqu'à quelques centaines de Hz et qu'au delà c'est le bruit de photons ('shot') qui domine.

## 5 Perspectives pour l'Astronomie Gravitationnelle

Il est vraisemblable de voir trois détecteurs interférométriques à base kilométrique en service à l'aube du troisième millénaire : VIRGO et les deux interféromètres de 4 km construits par la collaboration américaine LIGO. C'est le minimum pour reconstruire l'intégralité d'un signal gravitationnel (amplitude, polarisation et direction). Il faut donc voir VIRGO et LIGO non pas comme des concurrents mais plutôt comme des détecteurs faisant partie d'un vaste réseau mondial (même si la course -amicale- s'engagera sans doute pour la première détection...). A ce réseau, il faut ajouter les barres de Weber de troisième génération, dont la sensibilité commence à être intéressante, et les "petits" interféromètres GEO-600 (de 600 m), construit en Allemagne et TAMA-300 (300 m) construit au Japon.

A côté des détecteurs d'OG, des coïncidences avec d'autres types de détecteurs sont prévues : télescopes optiques, détecteurs  $\gamma$  et X embarqués ou même détecteurs de neutrinos avec le détecteur Superkamiokande au Japon. Le bénéfice de telles coïncidences est bien sûr d'augmenter la signification statistique des détections d'OG, mais aussi de produire des tests sur les caractéristiques des OG, et donc sur la Relativité Générale. Par exemple, l'observation d'une supernova dans le domaine optique et dans le domaine gravitationnel permettrait de comparer la célérité des OG  $c_{OG}$  à celle de la lumière  $c$ ; pour une supernova dans l'amas de la Vierge (à 10 Mpc), et un retard entre la réception du signal OG et du signal lumineux de 10 jours (les photons peuvent être piégés aussi longtemps dans les couches supérieures de la supernova avant de pouvoir s'échapper), on trouve  $(c_{OG} - c)/c \sim 5 \times 10^{-10}$ .

Mais, finalement, ce n'est pas la confirmation d'une prédiction de la Relativité Générale qui peut sembler le plus important, mais plutôt la naissance d'une nouvelle branche de l'astronomie, dans un domaine radicalement différent du domaine électro-magnétique (seule source d'informations sur ce que nous savons de notre univers aujourd'hui). On se souvient qu'à chaque fois que les astronomes ont ouvert une nouvelle fenêtre (télescopes, radio-télescopes, satellites X,  $\gamma$  ou infra-rouge ....) sur l'Univers, la vision qu'ils en avaient a été au moins modifiée, sinon bouleversée. Avec l'ouverture de la nouvelle fenêtre gravitationnelle, il faut s'attendre à tout ...

## Appendice 1 : notion de bruit thermique

Commençons par rappeler que le mouvement brownien d'une particule de masse  $m$ , subissant une force de frottement visqueux ( $= -\alpha v$ ) est décrit par l'équation de Langevin<sup>(25)</sup> :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} = F_{th},$$

où  $F_{th}$  est une force stochastique, appelée force de Langevin, moteur de l'agitation thermique. Dans le cas du mouvement brownien, la densité spectrale  $\tilde{F}_{th}$  de la force de Langevin est reliée au coefficient de frottement  $\alpha$  par  $\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kT\alpha$ , où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température, et est donc indépendante de la fréquence.

De manière générale, la force de Langevin s'exerçant sur un système (le mode pendule des miroirs suspendus de VIRGO par exemple) est reliée aux termes de pertes de ce système, en vertu du théorème "fluctuation-dissipation"<sup>(26)</sup> :

$$\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kTR(\omega),$$

où  $R(\omega)$  est la partie réelle de l'impédance mécanique du système :

$$R(\omega) = \Re(\tilde{Z}(\omega)) = \Re(\tilde{F}/\tilde{v}),$$

avec  $F$ =force extérieure s'exerçant sur le système (force de rappel du pendule formé par un miroir de VIRGO par exemple) et  $v$ =vitesse.

Si le système obéit à une équation d'oscillateur harmonique amorti :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + Kx = F_{th},$$

on obtient, d'après le théorème "fluctuation-dissipation",  $R(\omega) = \alpha$  d'où  $\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kT\alpha$  sans surprise, comme dans le cas du mouvement brownien. En prenant la transformée de Fourier de l'équation de l'oscillateur harmonique, on obtient la fonction de transfert entre les fluctuations  $\tilde{F}_{th}(\omega)$  et les fluctuations de position  $\tilde{x}(\omega)$  :

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{4kT\omega_0}{mQ} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2\omega^2/Q^2},$$

où  $\omega_0^2 = K/m$  et le facteur de qualité  $Q$  est défini par  $Q = m\omega_0/\alpha$ .

Un terme d'amortissement par frottement visqueux convient bien à un système freiné par l'air par exemple. Dans le cas d'un miroir suspendu dans le vide, les mécanismes de dissipation interne l'emportent largement sur le précédent, alors qu'ils sont le plus souvent négligeables à l'air libre. Une manière de considérer les mécanismes de dissipation interne consiste à incorporer un terme imaginaire dans la constante de raideur de l'oscillateur<sup>(27)</sup> :  $K$

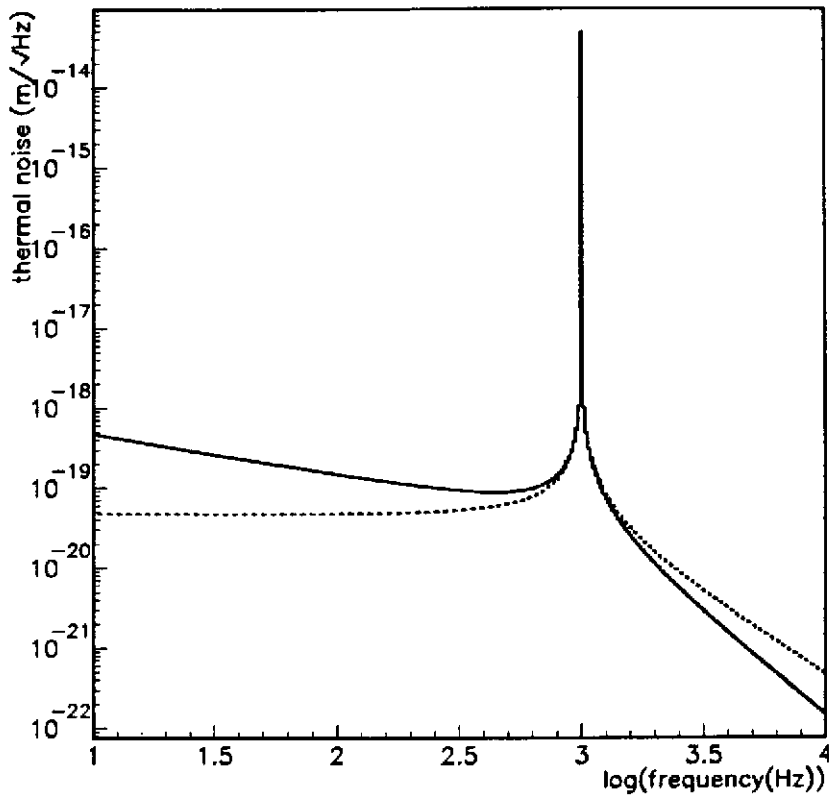


Figure 16: Densité spectrale d'amplitude de bruit thermique pour les deux mécanismes de dissipation. Trait uni: amortissement interne, trait pointillé: amortissement visqueux. Dans les deux cas on a pris  $m = 30 \text{ kg}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ ,  $\omega_0 = 2\pi \times 1 \text{ kHz}$  et  $Q = 10^6$ .

devient  $K(1+i\phi(\omega))$ , où  $\phi$  peut être assimilé à un angle de pertes. L'équation de l'oscillateur harmonique avec dissipation interne s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + K(1 + \phi) x = F_{th}.$$

Dans ce cas, on a  $R(\omega) = K\phi(\omega)/\omega$  et la densité spectrale de la force de Langevin s'exprime comme :

$$\tilde{F}_{th}^2(\omega) = 4kT \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{m\omega},$$

et dépend donc maintenant de la fréquence. La densité spectrale des fluctuations de position dues aux bruit thermique est finalement :

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{4kT\omega_0}{mQ} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^4/Q^2},$$

où on a choisi  $\phi(\omega) = 1/Q = \text{constante}$ .

L'allure de la densité spectrale en amplitude  $|\tilde{x}(\omega)|$  est représentée sur la fig.16. On note tout d'abord que les deux cas coïncident au voisinage de la résonance. Ceci explique pourquoi on s'est contenté du modèle d'oscillateur harmonique amorti pour une barre de Weber, pourtant sous vide, car c'est un détecteur à bande étroite centrée sur sa fréquence de résonance, et peu importe le détail fin du bruit thermique hors résonance. En ce qui concerne le comportement hors résonance : si  $\omega \ll \omega_0$  le spectre de bruit thermique est plat dans le cas de l'amortissement visqueux, alors qu'il se comporte en  $1/\omega^{1/2}$  dans le cas de l'amortissement interne (ce qui donne un modèle moins favorable pour le bruit des modes de vibration des miroirs de VIRGO), et si  $\omega \gg \omega_0$ , on a  $|\tilde{x}(\omega)| \propto 1/\omega^2$  pour l'amortissement visqueux, alors que  $|\tilde{x}(\omega)| \propto 1/\omega^{5/2}$  pour l'amortissement interne (ce qui donne un modèle plus favorable pour le mode pendule des miroirs de VIRGO)

## Appendice 2: les cavités Fabry-Perot

Nous allons distinguer les deux aspects des cavités: aspect longitudinal ou couplage entre la longueur d'onde de la lumière et longueur de la cavité et aspect transversal ou couplage entre la géométrie du faisceau et géométrie de la cavité.

### Aspect longitudinal

Considérons une cavité comme celle représentée sur la figure 17, éclairée par une onde d'amplitude  $\psi_{in}$

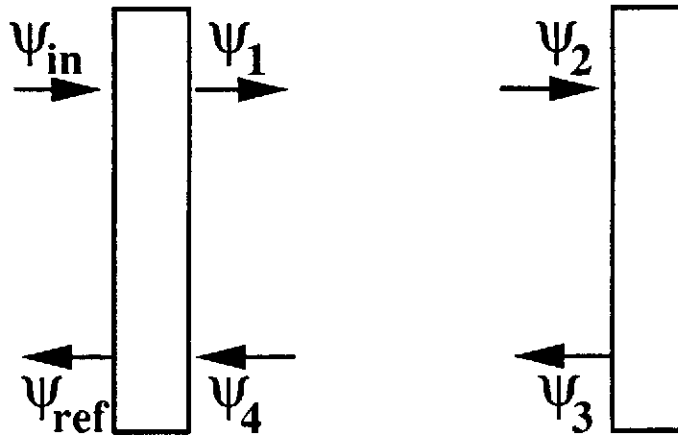


Figure 17: Schéma d'une cavité. Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du miroir d'entrée sont  $r_1$  et  $t_1$  et ceux du miroir de fond sont  $r_2$  et  $t_2$ .

Les différentes amplitudes des champs circulant dans la cavité obéissent aux équations de raccordement :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= t_1\psi_{in} + ir_1\psi_4 \\ \psi_2 &= \exp\left(\frac{2i\pi\nu L}{c}\right)\psi_1 \\ \psi_3 &= ir_2\psi_2 \\ \psi_4 &= \exp\left(\frac{2i\pi\nu L}{c}\right)\psi_3 \\ \psi_{ref} &= t_1\psi_4 + ir_1\psi_{in} \\ \psi_{tr} &= t_2\psi_2\end{aligned}$$

où  $L$  est la longueur de la cavité. La solution stationnaire pour les champs stocké ( $\psi_1$  par

exemple), réfléchi  $\psi_{ref}$  et transmis  $\psi_{tr}$  est :

$$\psi_1 = \frac{t_1}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\phi)} \psi_{in}$$

$$\psi_{ref} = i \frac{r_1 + (1 - p_1) r_2 \exp(2i\phi)}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\phi)} \psi_{in}$$

$$\psi_{tr} = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\phi)} \psi_{in}$$

où  $\phi = 2\pi\nu L/c$  et  $p_1 = 1 - r_1^2 - t_1^2$  représente les pertes du miroir d'entrée. A résonance, c'est à dire quand la longueur d'onde de la cavité est accordée sur la longueur d'onde de la lumière selon  $2\phi = \pi$ , on trouve qu'il y a un gain de puissance dans la cavité ( $|\psi_1|^2$  est maximale)  $G = \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2}$ , que la transmission de la cavité est maximale et que la réflexion est minimale. La première de ces propriétés est directement exploitée dans la technique de recyclage de puissance dans VIRGO et LIGO; la deuxième est bien connue en optique et sert de principe au filtre interférentiel (première utilisation historique du Fabry-Perot) : un Fabry-Perot est un discriminateur de fréquence (filtre passe bas). Un cas particulier est obtenu lorsque le gain  $G$  compense exactement les pertes  $p_1$  et  $p_2$  des miroirs, par un choix judicieux de  $r_1$  par exemple; on assiste alors à un optimum : le gain obtenu est le maximum possible pour une cavité de pertes données, et la réflectivité globale de la cavité est nulle.

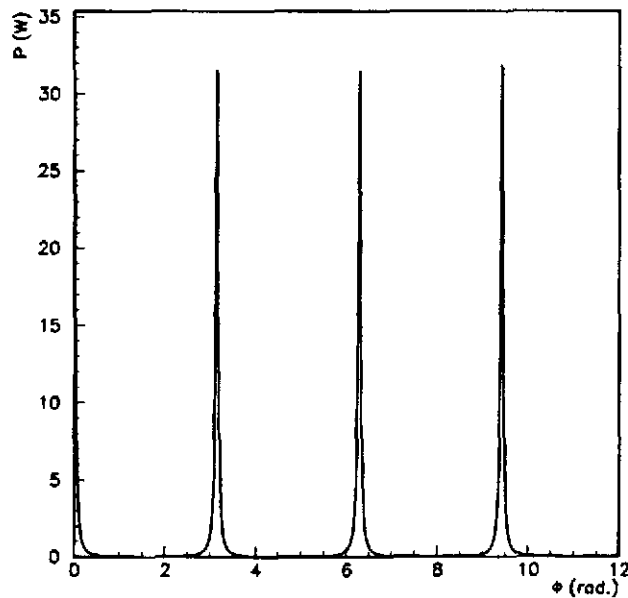


Figure 18: Fonction d'Airy représentant la puissance dans une cavité en fonction de l'accord de phase  $\phi$ .



La figure 18 montre la puissance stockée en fonction de  $\phi$  pour une cavité de finesse 50. L'écart entre deux résonances successives s'appelle l'intervalle spectral libre et le rapport entre celui-ci et la largeur à mi-hauteur d'un pic de résonance redonne la finesse; la finesse peut aussi s'écrire en fonction des réflectivités des miroirs comme :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}.$$

### Aspect transversal, rudiments d'optique gaussienne

La cavité de géométrie plan-plan étudiée juste auparavant n'est pas une cavité stable au sens où ses modes propres (géométrie de faisceau accordée à la géométrie de la cavité) sont des ondes planes. Une cavité stable, telle que celle utilisée dans chacun des bras de VIRGO possède une géométrie différente pour laquelle au moins l'un des deux miroirs est courbe. Les modes propres d'une telle cavité, obtenus par résolution de l'équation d'Helmholtz, sont des modes gaussiens  $\text{TEM}_{mn}$  qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\psi_{mn}(x, y, z) = A \frac{w_0}{w(z)} H_m(X) H_n(Y) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{R(z)} + i\varphi_{mn} - ikz\right),$$

où  $w(z)$  est l'extension transverse du faisceau, qui passe par un minimum à  $z=0$  et vaut  $w_0$  (appelé col ou waist du faisceau),  $X = \sqrt{2}x/w(z)$ ,  $Y = \sqrt{2}y/w(z)$ ,  $H_p$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $p$ ,  $R(z)$  est le rayon de courbure du faisceau et  $\varphi_{mn}$  est la phase de Guoy du mode  $\text{TEM}_{mn}$  (déphasage propre). Cette dernière montre que différents faisceaux gaussiens  $\text{TEM}_{mn}$  se propageant dans une cavité vont subir des déphasages de propagation différents, ce qui implique qu'il y a différentes conditions de résonance pour les modes  $\text{TEM}_{mn}$  : une cavité stable est donc aussi un sélecteur de modes. C'est cette propriété qui est utilisée dans la cavité mode-cleaner placée en amont de l'interféromètre VIRGO, et qui est chargée de nettoyer le faisceau laser de tout ce qui n'est pas dans le bon mode (et qui ne se pourra pas se coupler aux cavités des bras). En ce qui concerne les cavités des bras, ce sont donc des cavités de longueur  $L = 3$  km, dont le miroir d'entrée est plan et le miroir de fond courbe. Pour une telle géométrie, le col des modes propres se trouve localisé sur le miroir d'entrée et ses dimensions sont données par  $w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{(R-L)L}$ , où  $R \simeq 3.5$  km est le rayon de courbure du miroir de fond. Numériquement pour VIRGO on trouve  $w_0 \simeq 2$  cm, ce qui fait un gros faisceau laser. Bien entendu le laser source délivre un faisceau de col beaucoup plus petit, et des optiques d'adaptation sont nécessaires pour l'accorder à la géométrie du mode-cleaner puis à celle de l'interféromètre.

Le lecteur intéressé pourra trouver un approfondissement à toutes ces questions de physique des cavités dans le très pédagogique "Fundamentals of photonics" par B.E.A Saleh et M.C. Teich (Wiley Interscience, 1991).

## Références

- 1) J. Weber cité par D. Blair dans "The detection of gravitational waves", Ed. D. Blair (Cambridge Univ. Press, 1991).
- 2) R. Mönchmeyer, G. Schäfer, E. Müllet and R.E. Kates, *Astron. Astrophys.* **246**, 417 (1991). S. Bonazzola and J.-A. Marck, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **45**, 655 (1994).
- 3) J.M. Cordes, R.W. Romani and S.C. Lundgren, *Nature* **362**, 133 (1993).
- 4) R.F. Stark and T. Piran, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 891 (1985).
- 5) K.S. Thorne in "300 years of Gravitation" (Cambridge Univ. Press, 1987).
- 6) R. Narayan, T. Piran and A. Shemi, *Ap.J.* **379**, L17 (1991). E.S. Phinney, *Ap.J.* **380**, L17 (1991). A.V. Tutukov and L.R. Yungelson, *MNRAS* **260**, 675 (1993). S.J. Curran and D.R. Lorimer, *MNRAS* **276**, 347 (1995).
- 7) D. Blair et al., in "Gravitational Wave experiments", Eds. E. Coccia, G. Pizzella et F. Ronga (World Scientific, Singapore, 1995) p. 144.
- 8) G.V. Pallatino and G. Pizzella, in "The detection of gravitational waves", Ed. D. Blair (Cambridge Univ. Press, 1991).
- 9) P.F. Michelson and R.C. Taber, *Phys. Rev. D* **29**, 2149 (1984).
- 10) P. Astone et al., in "Gravitational astronomy: instrument design and astrophysical prospects", Eds. D. McClelland and H. Bachor (World Scientific, Singapore, 1991).
- 11) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, "Mecanique Quantique" (Hermann, Paris, 1973) p.502.
- 12) W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **19**, 2888 (1979). V.B. Braginsky, Y.I. Vorontsov and K.S. Thorne, *Science* **209**, 547 (1980).
- 13) S.M Merkwowitz and W.W. Johnson, *Phys. Rev. D* **51**, 2546 (1995).
- 14) M.E. Gertsenshtein and V.I. Pustovoit, *Sov. Phys. JETP* **16**, 433 (1963).
- 15) R. Weiss, *Quart. Prog. Rep. Lab. Electron. MIT* **105**, 54 (1972).
- 16) G.E. Moss, L.R. Miller and R.L. Forward, *Appl. Opt.* **10**, 2495 (1971).
- 17) J.-Y. Vinet, B.J. Meers, C.N. Man and A. Brilliet, *Phys. Rev. D* **38**, 433 (1988).
- 18) R.W.P. Drever, in "Gravitational Radiation", Eds N. Deruelle and T. Piran (North Holland, Amsterdam, 1983).
- 19) F. Bondu and J.-Y. Vinet, *Phys. Lett. A* **198**, 74 (1995).
- 20) F. Bondu, P. Fritschel, C.N. Man and A. Brilliet, *Opt. Lett.* **14**, 582 (1996).
- 21) F. Barone, E. Calloni, L. DiFiore, A. Grado, P. Hello, L. Milano and G. Russo, *Phys. Lett. A* **217**, 93 (1996).
- 22) A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, H. Billing and K. Maischberger,

Opt. Acta **28**, 641 (1981).

23) C.M. Caves, Phys. Rev. Lett. **45**, 75 (1980).

24) M.-T. Jaekel and S. Reynaud, EuroPhys. Lett. **13**, 301 (1990).

25) R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsime, "Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics" (Springer Verlag, Berlin, 1985).

26) H.B. Callen and T.A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).

27) P.R. Saulson, Phys. Rev. D**42**, 2437 (1990).

### **Bibliographie d'approfondissement**

"The detection of gravitational waves", Ed. D. Blair (Cambridge Univ. Press, 1991).

K.S. Thorne in "300 years of Gravitation" (Cambridge Univ. Press, 1987).

P.R. Saulson, "Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors" (World Scientific, Singapore, 1994).

"Gravitational Wave Experiments", Eds. E. Coccia, G. Pizzella et F. Ronga (World Scientific, Singapore, 1995)

## SEMINAIRES JEUNES

### Un système de détection pour le spectromètre BBS du cyclotron AGOR (Pays-Bas)

*Elke PLANKL - IPN Orsay*

Le système de détection qui a été construit à l'IPN d'Orsay pour le plan focal du spectromètre BBS comprend deux Cathode Strip Chambers pour la localisation des particules. Des plastiques scintillants mesurent la perte d'énergie et le temps de vol des ions légers, tandis que pour la détection des ions lourds ces tâches sont assumées respectivement par une chambre d'ionisation et un PPA.

### Interaction des neutrons lents avec $^{178}\text{Hf}^{2m}$

*Laurence PANGAULT - SPhN Bruyères-le-Châtel*

Un état isomérique, tel  $^{178}\text{Hf}^{2m}$  de spin  $16^+$  et de 31 ans de durée de vie, représente un réservoir potentiel d'énergie. Sa grande durée de vie provient de la conservation du nombre quantique K. Pour désexciter un tel isomère et ainsi récupérer l'énergie stockée, l'utilisation des neutrons lents est une voie explorée. Afin d'étudier la désexcitation des états  $31/2^+$  et  $33/2^+$  du noyau composé  $^{179}\text{Hf}^*$ , deux types d'expériences ont été menées : d'une part, la capture radiative d'un neutron thermique par  $^{178}\text{Hf}^{2m}$  et d'autre part, l'étude des résonances de  $^{179}\text{Hf}$  qui nous informera sur la densité des états  $31/2^+$  et  $33/2^+$ .

### Inversion de déphasages nucléon-nucléon par transformations supersymétriques

*Jean-Marc SPARENBERG - UL Bruxelles*

Une méthode d'inversion est présentée [1] : partant d'un déphasage  $\delta$  pour une onde partielle donnée, un potentiel d'interaction local et indépendant de l'énergie est construit. La matrice de collision  $e^{2i\delta}$  est approchée par le produit de la matrice de collision d'un potentiel de référence et d'une fonction rationnelle du nombre d'onde. Les pôles de cette fonction rationnelle sont ensuite associés à des transformations de supersymétrie que l'on applique successivement au potentiel de référence. Le potentiel obtenu ne possède pas d'état lié ; il présente une singularité en  $r^{-2}$  à l'origine lorsque le déphasage à énergie infinie est inférieur au déphasage à énergie nulle, en accord avec une généralisation du théorème de Levinson. La méthode est appliquée à la construction de potentiels d'interaction nucléon-nucléon dans le singulet S.

[1] J.-M. Sparenberg et D. Baye - Phys. Rev. C 55 (1997) 2175-2184

### Equation of State and hollow nuclei

*Denis LACROIX - GANIL Caen*

A simple breathing mode picture is often assumed for the expansion of highly excited nuclei. This had led to the possibility of defining an Equation Of State (EOS) for finite systems. However, it is shown that hollow density profiles are created in Time Dependent Hartree-Fock simulations due to the presence of beating between different collective motions. A generalised EOS which includes more collective degrees of freedom, is defined and possible consequences on heavy ion collision are discussed.

### Etude des diffusions élastiques de $^{10,11}\text{Be}$ et $^6\text{He}$ sur des cibles de $^{12}\text{C}$ , protons et $^{208}\text{Pb}$ à basse énergie au GANIL

*Valérie LAPOUX - SPhN - CEA Saclay*

Les noyaux exotiques légers sont un laboratoire pour sonder la matière nucléaire loin de la stabilité, et des structures particulières comme le halo. Les distributions angulaires de sections efficaces de diffusion élastique des faisceaux radioactifs  $^{10,11}\text{Be}$  ou  $^6\text{He}$  sur des cibles de noyaux bien connus tels que  $^{12}\text{C}$ , p et  $^{208}\text{Pb}$  ont été mesurées. La comparaison des données avec des calculs réalisés avec différents modèles nous fournit des informations sur les densités de matière, et sur la validité de l'interaction effective Nucléon-Nucléon.

## **Etude des vibrations octupolaires dans les noyaux superdéformés A=190**

*Héloïse DANCER - IPN Lyon*

Des calculs statiques de type HF + BCS tenant compte de l'appariement ont montré la mollesse octupolaire dans le puits superdéformé (SD). Une étude dynamique par la méthode de la coordonnée génératrice a permis de calculer les énergies d'excitation selon les degrés de liberté octupolaire  $q_{30}$  ou  $q_{32}$  pour huit isotopes de plomb et de mercure. Ces calculs ont été comparés aux résultats expérimentaux dans le  $^{190}\text{Hg}$  et le  $^{196}\text{Pb}$ .

Des calculs de probabilité de transition dipolaire électrique ont permis de caractériser la décroissance des différentes bandes octupolaires vers la bande SD yrast.

## **Potentiel Spin-Orbite et Isospin**

*Frédéric SARAZIN - GANIL Caen*

Certains effets de structure loin de la stabilité peuvent être interprétés comme une altération du potentiel spin-orbite. Pour étudier son évolution en fonction de l'isospin, nous allons mesurer des masses de noyaux exotiques autour des fermetures de couche N=20 et N=28 et, pour mesurer directement ce potentiel, nous étudions la possibilité de réaliser une cible polarisée en collaboration avec l'IPN d'Orsay, le DAPNIA et l'INFN de Rome.

## **SPARTE**

*Cécile TOCCOLI - SPhN - CEA Bruyères-le-Châtel*

Dans le cadre des études menées sur les systèmes spallateurs (transmutation des déchets nucléaires, source de neutrons, production d'isotopes), la chaîne de code SPARTE est en cours de développement au CEA pour simuler tous les processus physiques intervenant dans ces systèmes. L'interaction (spallation) et le transport à haute énergie est réalisé par le code HETC. Afin de tester les différents modèles de ce code, des comparaisons avec des données expérimentales sont en cours. Celles-ci portent principalement sur les résiduels de spallation et sur les particules légères émises. Une analyse critique des modèles sera réalisée en vue de leur amélioration si nécessaire.

## **Décroissance de la bande hautement déformée de $^{136}\text{Nd}$ : intensité expérimentale de l'appariement dans le second puits**

*Stéphane PERRIES - IPN Lyon*

Nous avons réalisé, au mois de juin 97, une expérience avec le multidétecteur  $\gamma$  EUROBALL afin de mettre en évidence la décroissance de la bande hautement déformée (HD) fondamentale de  $^{136}\text{Nd}$ . Les résultats de l'analyse nous permettront d'extraire l'intensité expérimentale de l'appariement dans le second puits, les énergies d'excitation absolue des bandes HD des noyaux voisins étant connues. Les premiers résultats indiquent une réduction de moitié de l'intensité de l'appariement dans le puits HD par rapport à l'état fondamental.

## **Experimental study of neutron rich nickel isotopes**

*Serge FRANCHOO - Université de Leuven*

Isobaric contamination and short half-lives are the major problems when studying exotic nuclei. The Iglis Ion Guide Laser Ion Source tries to overcome these by combining the efficiency and element selectivity of resonant laser ionisation with the fast evacuation time of the ion guide system. During this experiment, spectroscopic information on the decay of  $^{68}\text{Ni}$  up to  $^{74}\text{Ni}$  was obtained as well as half-lives to a level of 5 to 10% accuracy.

## **Production and identification of extremely neutron-rich «isotopes»**

*Michaël HOURY - SPhN - CEA Saclay*

In-flight fission of relativistic  $^{238}\text{Uranium}$  ions is a new and powerful method to produce extremely neutron-rich isotopes. In the region from Cr to Tc more than 50 isotopes were identified for the first time, including the double-magic nucleus  $^{78}\text{Ni}$ . All these exotic nuclei are now accessible for further investigation e.g. half-life or mass measurements.

## **Etude de la multifragmentation avec le multidétecteur INDRA**

*Nicolas Le NIENDRE - LPC Caen*

Le multidétecteur  $4\pi$  INDRA nous a permis d'isoler des événements, de la réaction  $XE + Sn$  à 50 MeV/u, où une source de matière excitée et comprimée est formée et multifragmentée.

La confrontation des caractéristiques des fragments et des particules légères avec les résultats de modèles nous permet de préciser le scénario du processus de multifragmentation.

## **Caractérisation spatio-temporelle de la matière nucléaire dans les processus de multifragmentation**

*Ahn-Dung N'GUYEN - LPC Caen*

Les caractéristiques spatio-temporelles de la matière nucléaire excitée dans les collisions centrales  $Xe + Sn$  à 50 MeV/u sont recherchées en analysant les événements à fortes multiplicités détectés avec INDRA. La comparaison des données expérimentales avec les résultats d'un générateur d'événements (SIMON) permet d'extraire les profils de densité et de vitesse à l'instant de "freeze-out". Ces profils sont confrontés aux prédictions d'un modèle de transport microscopique (BNV) afin d'estimer un temps caractéristique associé au "freeze-out". Cette approche a pour but d'identifier les instabilités qui entrent en jeu dans la brisure des noyaux.

## **Etude des effets dynamiques dans les collisions périphériques et semi-périphériques de la réaction $Xe + Sn$ à 50 A-MeV étudiée avec INDRA.**

### **Comparaison des résultats expérimentaux avec le code QMD et le générateur d'événements SIMON**

*Olivier TIREL - GANIL Caen*

## **Mesures du facteur gyromagnétique des états isomériques de haut spin de $^{187, 189, 191}Au$**

*Nadia BENOUARET - USTHB Alger*

Les facteurs gyromagnétiques nucléaires  $g$  des états isomériques de haut spin de  $^{187}Au$  ( $I^\pi=31/2^-$ ,  $E_x=2670$  Kev),  $^{189}Au$  ( $I^\pi=31/2^+$ ,  $E_x=2515$  Kev) et  $^{191}Au$  ( $I^\pi=31/2^+$ ,  $E_x=2490$  Kev) ont été mesurés en utilisant la méthode de distribution angulaire Gamma en temps, perturbée par un champ magnétique statique (TDPAD).

Les états isomériques ont été peuplés à l'aide des réactions de fusion-évaporation  $^{172}Yb(^{19}F, 4n)^{187}Au$ ,  $^{181}Ta(^{12}C, 4n)^{189}Au$  et  $^{176}Yb(^{19}F, 4n)^{191}Au$  à des énergies de bombardement de 88 MeV, 70 MeV et 90 MeV respectivement délivrées par l'accélérateur du Tandem d'ORSAY.

Les valeurs expérimentales déduites, comparées aux valeurs données par le modèle à particules indépendantes nous ont permis d'identifier la nature de la paire de nucléons brisée et les orbitales correspondantes, celle-ci étant couplée au proton impair  $h_{11/2}$ .

Par ailleurs, de nouvelles valeurs de vies moyennes des états isomériques ont été proposées, le plus grand écart a été observé pour l'état  $31/2^+$  de  $^{189}Au$ .

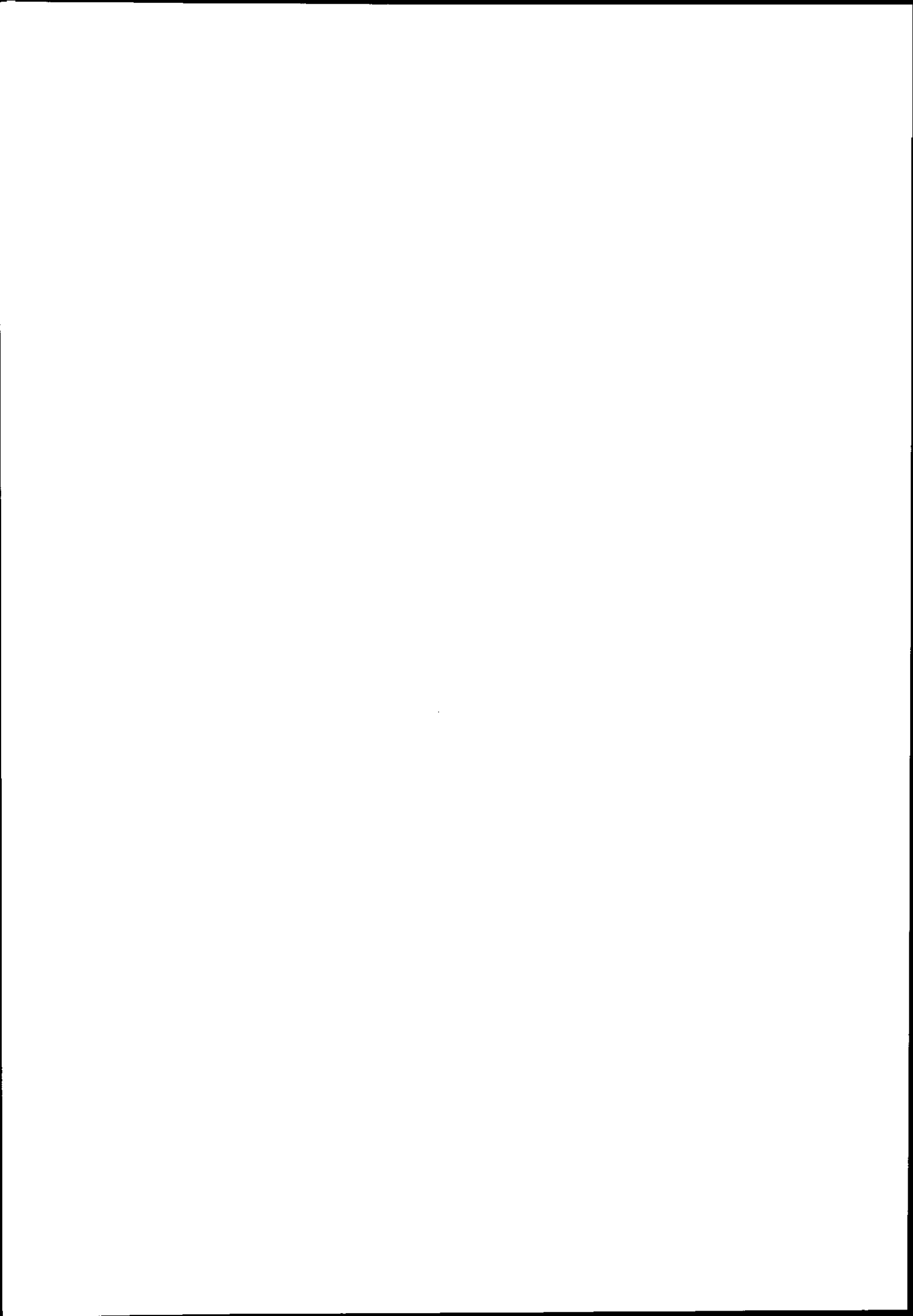
## **Processus d'émission de protons retardés**

*Christophe LONGOUR - IReS Strasbourg*

## **Mesure directe de section efficace de réaction proton-noyau exotique**

*Anne de VISMES - GANIL Caen*

Les sections efficaces de réaction proton-noyau exotique  $\sigma_R$  peuvent être déduites, via le modèle optique, des distributions angulaires de diffusion élastique. Mais différentes paramétrisations du potentiel optique, bien que reproduisant aussi bien les distributions angulaires, conduisent à des valeurs de  $\sigma_R$  différant jusqu'à 10% les unes des autres. Dans notre prochaine expérience, nous voulons mesurer ces  $\sigma_R$ , en utilisant la méthode d'atténuation du faisceau : cette mesure directe nous fournira une contrainte supplémentaire sur le potentiel optique.



## PARTICIPANTS ECOLE JOLIOT-CURIE 1997

### **ABGRALL Yvon**

CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *abgrall@cenbg.in2p3.fr*

### **AGUER Pierre**

CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *aguer@cenbg.in2p3.fr*

### **BADIMON Christine**

CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *badimon@cenbg.in2p3.fr*

### **BELLEGUIC Marjorie**

IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *bellegui@ipn0.in2p3.fr*

### **BENOUARET Nadia**

Laboratoire de Sciences Nucléaires - USTHB - BP 32 - Babezzouar - ALGER -

### **BLAIZOT Jean-Paul**

SPhT - CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *blaizot@spht.saclay.cea.fr*

### **BOIVIN David**

CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *boivin@cenbg.in2p3.fr*

### **BONCHE Paul**

SPhT - CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *paul@spht.saclay.cea.fr*

### **BOUNEAU Sandra**

IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *bouneau@ipn0.in2p3.fr*

### **CAILLON Jean-Christophe**

CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *caillon@cenbg.in2p3.fr*

### **CARREYRE Thierry**

CEN Bordeaux - BP 10 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *carreyre@cenbg.in2p3.fr*

### **CASTRO Aránzazu**

CSIC Instituto de Estructura de la Materia - C/Serrano, 123 - E-28006 Madrid - *arancha@fresno.csic.es*

### **CHOMAZ Philippe**

GANIL - BP 5027 - F-14021 CAEN Cedex - *chomaz@ganac4.in2p3.fr*

### **COC Alain**

CSNSM Orsay - Bâtiment 104-108 - F-91405 ORSAY Campus - *coc@csnsm.in2p3.fr*

### **DANCER Héloïse**

IPN Lyon - 43 Bld du 11 Novembre 1918 - Bât. 210 - F-69622 VILLEURBANNE Cedex - *dancer@lyohp0.in2p3.fr*

### **DAUGAS Jean-Michel**

GANIL - BP 5027 - F-14021 CAEN Cedex - *daugas@ganac4.in2p3.fr*

### **DELONCLE Isabelle**

CSNSM Orsay - Bâtiment 104-108 - F-91405 ORSAY Campus - *deloncle@csnsm.in2p3.fr*

### **DESSAGNE Philippe**

IReS Strasbourg - BP 28 - F-67037 STRASBOURG Cedex 02 - *philippe.dessagne@ires.in2p3.fr*

### **DE VISMES Anne**

GANIL - BP 5027 - F-14021 CAEN Cedex - *de-vismes@ganac4.in2p3.fr*

### **DONZAUD Corinne**

IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *donzaud@ipn0.in2p3.fr*

### **ESCUDEROS Alberto**

CSIC Instituto de Estructura de la Matiera - C/Serrano, 123 - E-28006 Madrid - *alberto@fresno.csic.es*

### **FRANCHOO Serge**

IKSF - Univ. of Leuven - Celestijnenlaan 200 D - B-3001 LEUVEN - *serge.franchoo@fys.kuleuven.ac.be*



**FRASCARIA Nimet**IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *nimet@ipno.in2p3.fr***FRASCARIA Robert**IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *frascari@ipno.in2p3.fr***GALL Benoît**IReS Strasbourg - BP 28 - F-67037 STRASBOURG Cedex 02 - *gall@crn.in2p3.fr***GENEVEY Janine**ISN Grenoble - 53 Av. des Martyrs - F-38026 GRENOBLE Cedex - *genevey@isnhp3.in2p3.fr***GIOVINAZZO Jérôme**IReS Strasbourg - BP 28 - F-67037 STRASBOURG Cedex 02 - *giovinaz@crn.in2p3.fr***GOUTTE Dominique**CEA Bruyères-le-Châtel - SPN - BP 12 - F-91680 BRUYERES-LE-CHÂTEL - *goutte@bruyeres.cea.fr***GUNSING Frank**SPhN/DPANIA/DSM/CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *gunsing@cea.fr***HAMMACHE Fairouz**CSNSM Orsay - Bâtiment 104 - F-91405 ORSAY Campus - *hammache@csnsm.in2p3.fr***HELLO Patrice**LAL - Université Paris XI - Bâtiment 200 - F-91405 ORSAY Cedex - *hello@lalcls.in2p3.fr***HEENEN Paul-Henri**PNTPM - UL Bruxelles - CP 229 - B-1050 BRUXELLES - *phheenen@ulb.ac.be***HOURY Michaël**SPhN/DPANIA/DSM/CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *houry@cea.fr***IBRAHIM Fadi**ISN Grenoble - 53 Av. des Martyrs - F-38026 GRENOBLE Cedex - *ibrahim@isnhp3.in2p3.fr***KHAN Elias**IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *khan@ipno.in2p3.fr***LABARSOUCHE Jean**CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *labars@cenbg.in2p3.fr***LACROIX Denis**GANIL - BP 5027 - F-14076 CAEN Cedex - *lacroix@ganil.fr***LAPOUX Valérie**SPhN/DPANIA/DSM/CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *lapoux@phnx7.saclay.cea.fr***LE BRUN Christian**ISMRA/LPC Caen - 6 Bld du Maréchal Juin - F-14050 CAEN -Cedex - *brunch@caelav.in2p3.fr***LEENHARDT Stéphane**IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *leenhardt@ipno.in2p3.fr***LE NEINDRE Nicolas**ISMRA/LPC Caen - 6 Bld du Maréchal Juin - F-14050 CAEN Cedex - *leneindr@caelav.in2p3.fr***LONGOUR Christophe**IReS Strasbourg - BP 28 - F-67037 STRASBOURG Cedex 02 - *longour@crn.in2p3.fr***LOPEZ Maria-José**GANIL - BP 5027 - F-14076 CAEN Cedex - *mjlopez@ganac0.in2p3.fr***LUCAS Renée**SPhN/DPANIA/DSM/CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *rlucas@cea.fr***LUMBROSO Albert**

CNRS-Paris

**MAMDOUH Abdallah**Institut d'Astronomie et d'Astrophysique - C.P. 226 - B-1050 BRUXELLES - *amamdouh@astro.ulb.ac.be*

**MARCOS Saturnino**

Facultad de Ciencias Fisica moderna - Av. Los Castros s/n - 39005 SANTANDER, Espagne - *marcoss@besaya.unican.es*

**MATHIOT Jean-François**

LPC Clermont - Université Clermont II - BP 45 - F-63177 AUBIERE Cedex - *mathiot@in2p3.fr*

**MEYER Jacques**

IPN Lyon - 43 Bld du 11 Novembre 1918 - F-69622 VILLEURBANNE Cedex - *jmeyer@ipnl.in2p3.fr*

**MEYER Michèle**

IPN Lyon - 43 Bld du 11 Novembre 1918 - F-69622 VILLEURBANNE Cedex - *m.meyer@ipnl.in2p3.fr*

**MIEHE Christiane**

IReS Strasbourg - BP 28 - F-67037 STRASBOURG Cedex 02 - *christiane.miehe@ires.in2p3.fr*

**MONSANGLANT Céline**

CSNSM Orsay - Bâtiment 108 - F-91405 ORSAY Campus -

**NALPAS Laurent**

SPHn/DPANIA/DSM/CEA Saclay - F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex - *lnalpas@cea.fr*

**NAULIN François**

IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *naulin@ipno.in2p3.fr*

**N'GUYEN Ahn-Dung**

ISMRA/LPC Caen - 6 Bld du Maréchal Juin - F-14050 CAEN Cedex - *nguyena@caelav.in2p3.fr*

**ORR Nigel**

ISMRA/LPC Caen - 6 Bld du Maréchal Juin - F-14050 CAEN Cedex - *orr@caelav.in2p3.fr*

**PANGAULT Laurence**

CEA Bruyères-le-Châtel - SPN - BP 12 - F-91680 BRUYERES-LE-CHÂTEL - *pangault@bruyeres.cea.fr*

**PERRIES Stéphane**

IPN Lyon - 43 Bld du 11 Novembre 1918 - F-69622 VILLEURBANNE Cedex - *perries@ipnl.in2p3.fr*

**PERU Sophie**

CEA Bruyères-le-Châtel - SPN - BP 12 - F-91680 BRUYERES-LE-CHÂTEL - *peru@bruyeres.cea.fr*

**PHILLIPS William**

Schuster Laboratory - Manchester University - Physics Departement - MANCHESTER M13 9PL - UK -

**PILLET Nathalie**

CEN Bordeaux - BP 120 - F-33175 GRADIGNAN Cedex - *pillet@cenbg.in2p3.fr*

**PIQUERAS Inmaculada**

CSIC Instituto de Estructura de la Materia - C/Serrano, 121 - E-28006 Madrid - *imtp142@fresno.csic.es*

**PLANKL Elke**

IPN Orsay - BP 1 - F-91406 ORSAY Cedex - *plankl@ipn0.in2p3.fr*

**PORQUET Marie-Geneviève**

CSNSM Orsay - Bâtiments 104-108 - F-91405 ORSAY Campus - *porquet@csnsm.in2p3.fr*

**POVES Alfredo**

Depart. De Fisica Teorica - Univ. Autonoma de Madrid - E-28006 Madrid - *poves@nucphys1.ft.uam.es*

**REDON Nadine**

IPN Lyon - 43 Bld du 11 Novembre 1918 - F-69622 VILLEURBANNE Cedex - *n.redon@ipnl.in2p3.fr*

**ROWLEY Neil**

IReS Strasbourg - BP 28 - F-67037 STRASBOURG Cedex 02 - *neil.rowley@ires.in2p3.fr*

**SARAZIN Frédéric**

GANIL - BP 5027 - F-14021 CAEN Cedex - *sarazin@ganil.fr*

**SILVESTRE BRAC Bernard**

ISN Grenoble - 53 Av. des Martyrs - F-38026 GRENOBLE Cedex - *silvestre@isnlp3.in2p3.fr*

**SPARENBERG Jean-Marc**

PNTPM - UL Bruxelles - Campus Plaine - CP 229 - B-1050 BRUXELLES - *jmspar@ulb.ac.be*

**THIBAUD Jean-Pierre**

CSNSM Orsay - Bâtiment 104-108 - F-91405 ORSAY Campus - *thibaud@csnsm.in2p3.fr*

**TIREL Olivier**

GANIL - BP 5027 - F-14076 CAEN Cedex 5 - *tirel@ganil.fr*

**TOCCOLI Cécile**

CEA Bruyères-le-Châtel - SPN - BP 12 - F-91680 BRUYERES-LE-CHÂTEL - *toccoli@bruyeres cea.fr*

**VAN DUPPEN Piet**

IKSF - Univ. Leuven - Celestijnenlaan 200 D - B-3001 LEUVEN - *piet.vanduppen@fys.kuleuven.ac.be*

**WAGEMANS Cyrille**

DSRP - Univ. Gent - Proeftuinstraat 86 - B-9000 GENT - *wagemans@irmm.jrc.be*