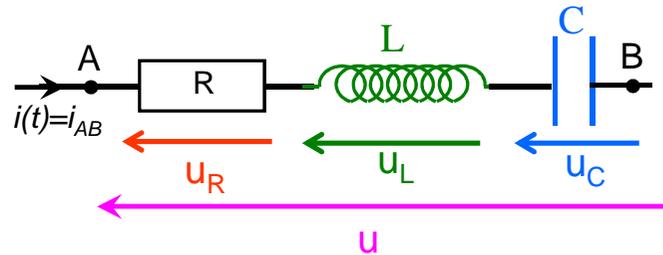


2.3.1.3 Circuit résonant série (R,L,C)

Soit un circuit série (RLC) traversé par un courant variable alternatif $i(t)$



on suppose que le courant $i(t)$ à pour expression :
 $i(t) = I \sqrt{2} \cos \omega t$

Par application de la 2^e loi de Kirshhoff aux dipôles R, L et C en série on a : $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

Toutes ces tensions sont sinusoïdales et auront pour expression :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_U) \quad u_R(t) = U_R\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_R) \quad u_L(t) = U_L\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_L) \quad u_C(t) = U_C\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_C)$$

En représentation complexe :

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U} = U e^{j\varphi_U} \quad (\text{AEC composé de la valeur efficace } U \text{ et de la phase } \varphi_U)$$

$$\underline{u}_R(t) = \underline{U}_R \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_R = U_R e^{j\varphi_R} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U_R \text{ et de la phase } \varphi_R)$$

$$\underline{u}_L(t) = \underline{U}_L \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_L = U_L e^{j\varphi_L} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U_L \text{ et de la phase } \varphi_L)$$

$$\underline{u}_C(t) = \underline{U}_C \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_C = U_C e^{j\varphi_C} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U_C \text{ et de la phase } \varphi_C)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_R(t) + \underline{u}_L(t) + \underline{u}_C(t) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} = \underline{U}_R \sqrt{2} e^{j\omega t} + \underline{U}_L \sqrt{2} e^{j\omega t} + \underline{U}_C \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} = (\underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C) \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

Pour le courant électrique en représentation complexe on a :

$$\underline{i}(t) = \underline{I}\sqrt{2} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I} = I e^{j0} \text{ (AEC composée de la valeur efficace } I \text{ et de la phase à l'origine } \varphi_I = 0)$$

On a vu d'autre part qu'en représentation complexe, le rapport tension/courant définissait la notion d'impédance Z

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}_R}{\underline{i}} = \frac{U_R \sqrt{2} e^{j\omega t}}{\underline{I}\sqrt{2} e^{j\omega t}} = \frac{U_R}{\underline{I}} \quad \text{Il en sera de même pour : } \underline{Z}_L = \frac{U_L}{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{U_C}{\underline{I}}$$

En remplaçant dans l'équation précédente :

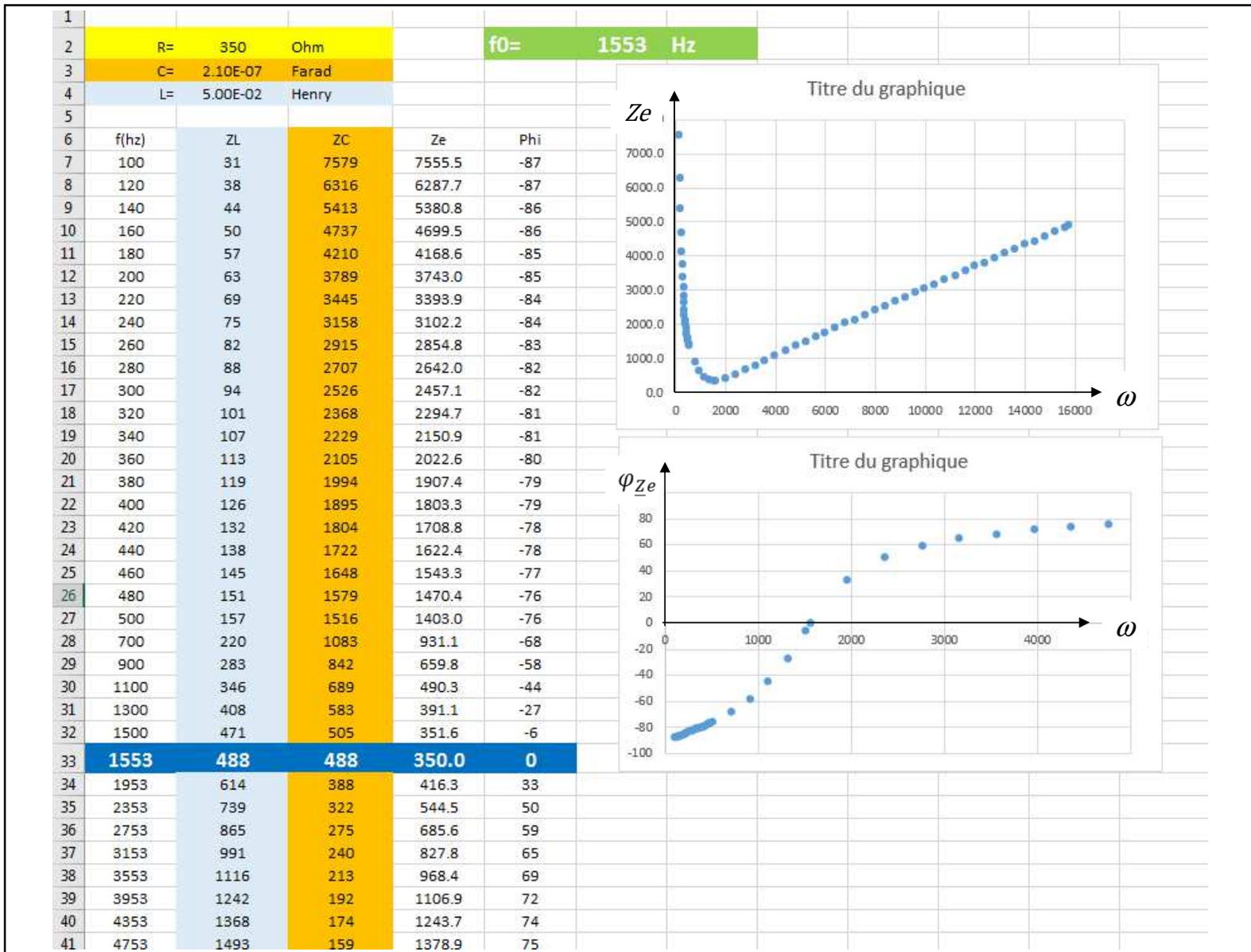
$$\underline{U} = \underline{Z}_R \underline{I} + \underline{Z}_L \underline{I} + \underline{Z}_C \underline{I} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) \underline{I} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \underline{Z}_e \quad \text{où } \underline{Z}_e \text{ est l'impédance équivalente}$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_e = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\text{module } |\underline{Z}_e| = Z_e = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z}_e = \varphi_{\underline{Z}_e} = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \text{ pour la phase}$$

En faisant varier la fréquence f du générateur de tension donc de ω , le module de l'impédance Z_e devient une fonction de ω

Traçons avec EXCEL l'évolution du module de \underline{Z}_e et de la phase $\varphi_{\underline{Z}_e}$ en fonction de la fréquence f (ou ω) du générateur alimentant le circuit



module $|\underline{Z}_e| = Z_e = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ et $\arg \underline{Z}_e = \varphi_{\underline{Z}_e} = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$ pour la phase

il existe donc une fréquence f_0 ou bien une pulsation ω_0 pour laquelle on a :

$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ c'est à dire $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ ou bien $LC\omega_0^2 = 1$

• Résonance

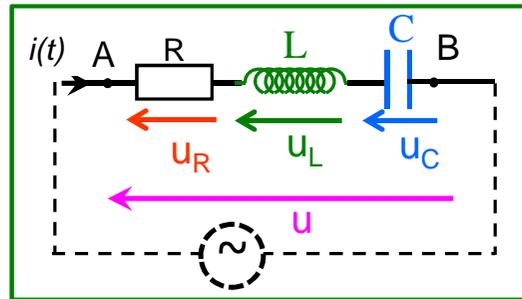
$LC\omega_0^2 = 1$ Z_e est minimum : $Z_e = R$

$\underline{U} = Z_e \underline{I}$ et Z_e est minimum \rightarrow \underline{I} est maximum

$U = RI$

$U_L = L\omega_0 I$

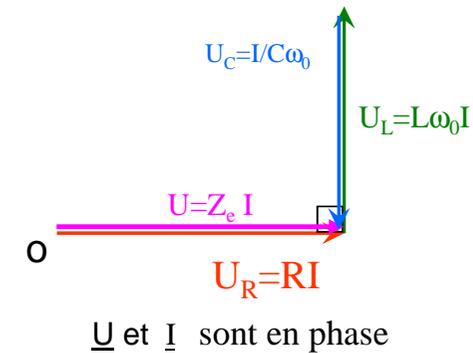
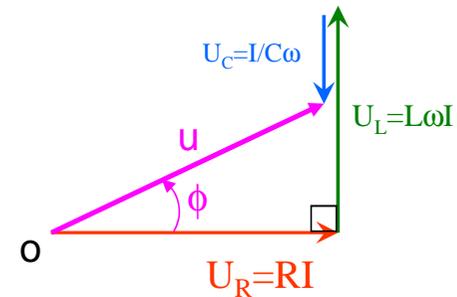
$U_C = \frac{I}{C\omega_0}$



$U_L = U_C \rightarrow$ Il y a surtension au borne de L et C

$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

Q est le coefficient de surtention

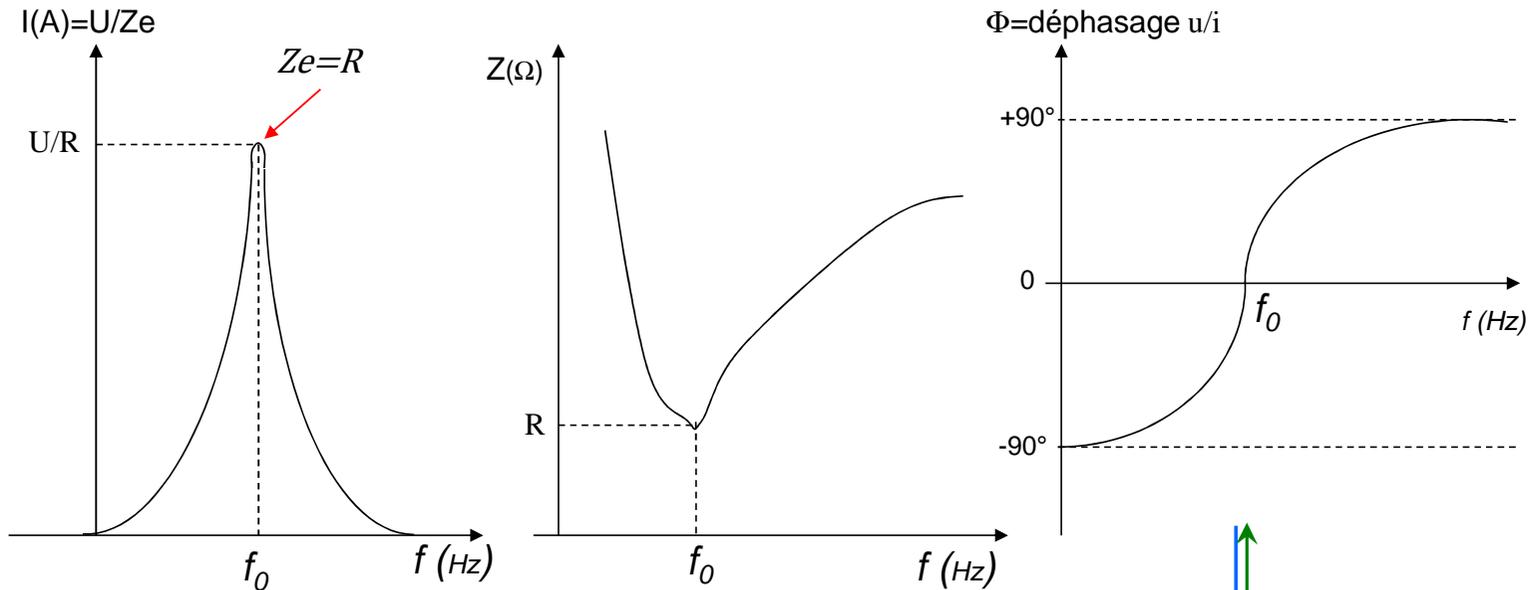


\underline{U} et \underline{I} sont en phase

- Etude de la résonance par variation de la fréquence f ($\omega=2\pi f$)

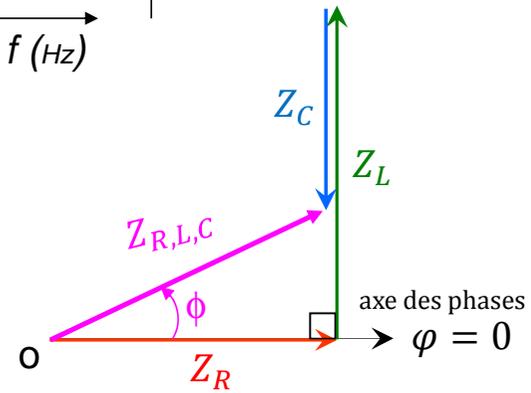
En résumé

Résonance pour f_0 : $LC\omega^2 = 4\pi^2LCf_0 = 1$



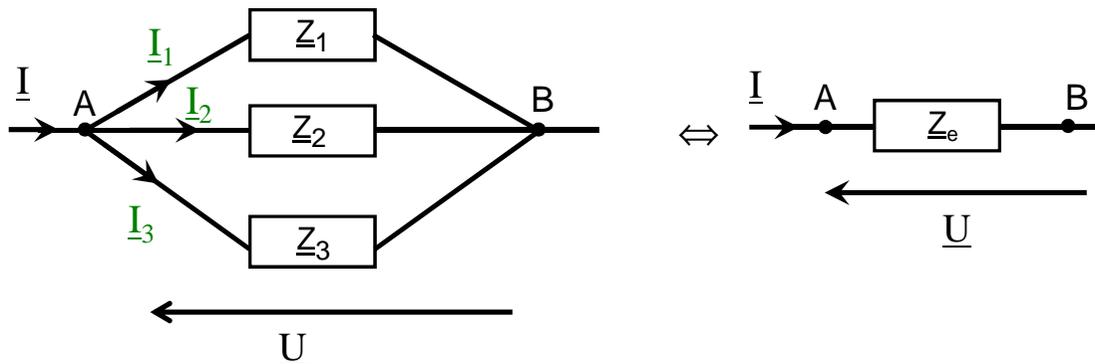
Exemple: $R=10\Omega$; $L=1H$; $C=10\mu F$. Calculer ω_0 , f_0 et Q ?

$LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 316,22$ et $f_0 = 50,33Hz$
 $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{R^2C}} = 31,62$



2.3.2 Association d'impédances en parallèle

2.3.2.1 Admittances complexes équivalentes



Application de la 1^{ère} loi de Kirshhoff

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad \text{et} \quad \underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = \underline{Z}_e \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \underline{Y}_e \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{I}_1 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1 \underline{U} \quad \underline{I}_2 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2 \underline{U} \quad \underline{I}_3 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3 \underline{U}$$

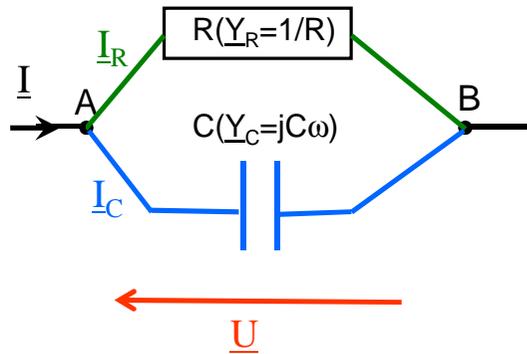
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right) \underline{U} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \underline{U} = \underline{Y}_e \underline{U}$$

avec

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

l'admittance équivalente au montage en dérivation

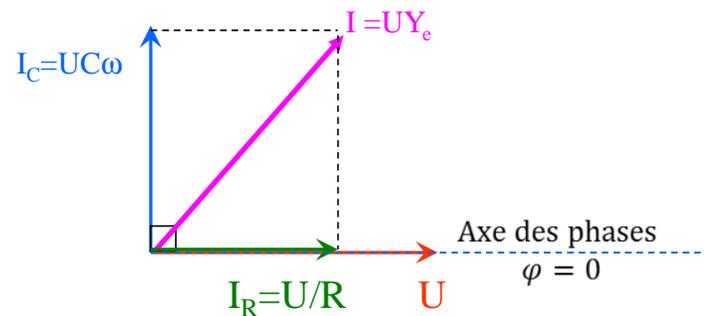
Exemple circuit (RC) parallèle



$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega$$
$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U} = j\underline{U}C\omega \quad \text{et} \quad \underline{I}_R = \underline{Y}_R \underline{U} = \frac{\underline{U}}{R}$$

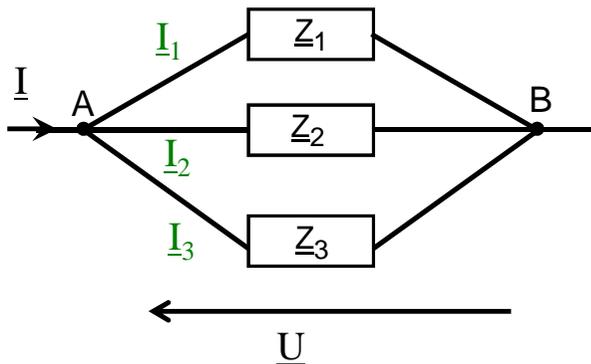
Remarque importante:

D'une manière générale, pour des dipôles montés en dérivation, on choisit presque toujours la tension (qui est commune) comme vecteur de référence (aligné avec l'axe $\varphi=0$) dans la représentation de Fresnel, pour déterminer les phases associées aux courants qui traversent ces dipôles.



2.3.2.2 diviseur de courant

Cas de 3 impédances Z_1, Z_2, Z_3 en parallèle



$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{U} = \underline{I} \left(\frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \right)$$

Exemple : Donner l'expression de I_C dans le cas du circuit (R//C) ci-contre si celui-ci est parcouru par le courant $i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$.

En appliquant le diviseur de tension avec les admittances:

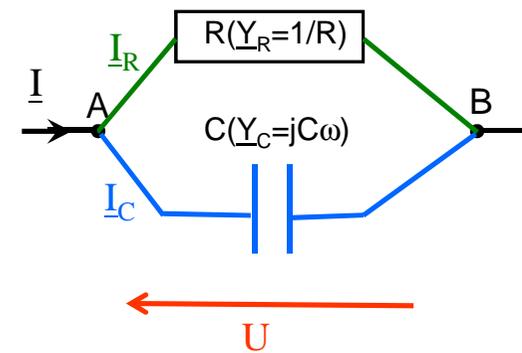
$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_C + \underline{Y}_R}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R}} = \underline{I} \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1} = \underline{I} \frac{(1 - jRC\omega) jRC\omega}{(RC\omega)^2 + 1}$$

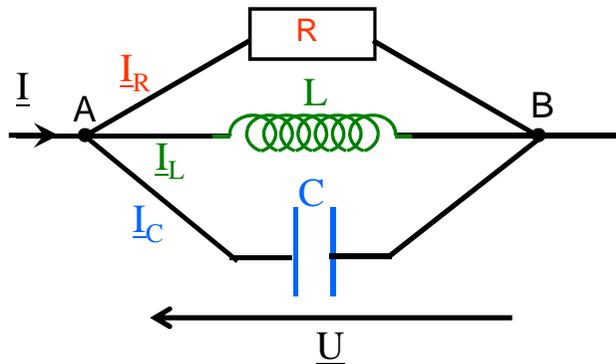
$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{RC\omega}{(RC\omega)^2 + 1} (RC\omega + j)$$

valeur efficace : $I_C = |I_C| = |I| \frac{RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \sqrt{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{I RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$

phase : $\varphi_C = \arctan \left(\frac{1}{RC\omega} \right)$



2.3.2.3 Circuit résonant parallèle (R,L,C)



$$u(t) = u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_e = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\text{module } |\underline{Y}_e| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \quad \text{et } \arg \underline{Y}_e = \phi = \arctan R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

• Résonance $LC\omega_0^2 = 1$

Y_e est minimum : $Y_e = 1/R$

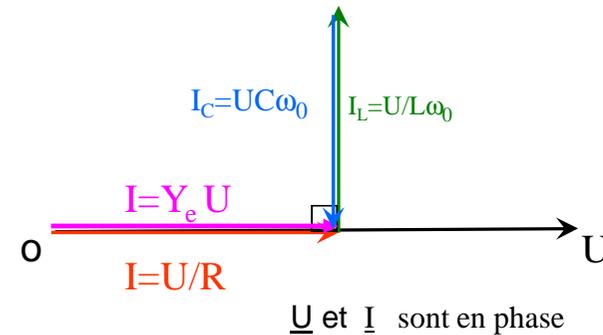
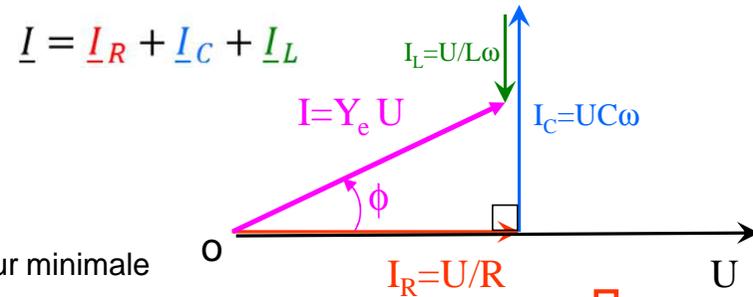
$\underline{I} = \underline{Y}_e \underline{U}$ et $|\underline{Y}_e|$ est minimum \rightarrow $|\underline{I}|$ prend une valeur minimale

$$I = I_R = \frac{U}{R} \quad I_L = \frac{U}{L\omega_0} \quad I_C = UC\omega_0$$

$I_L = I_C \rightarrow$ il y a **surintensité** aux bornes de L et C

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} \Rightarrow Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0$$

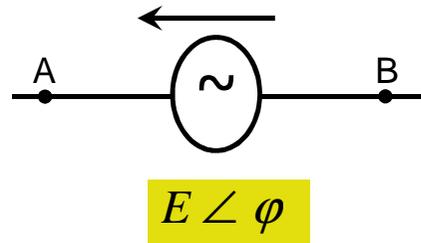
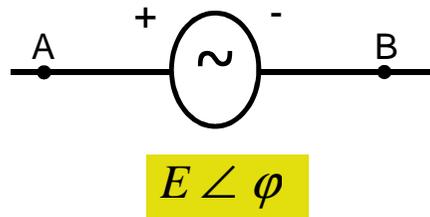
Q est le coefficient de surintensité



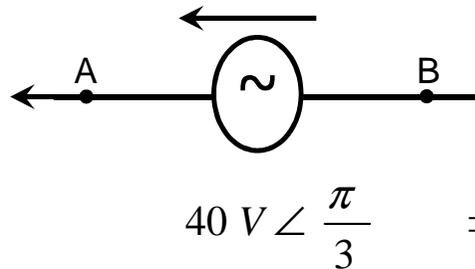
2.4 Générateurs sinusoïdaux

2.4.1 générateurs de tension

- Générateur de tension idéal (impédance interne nulle)



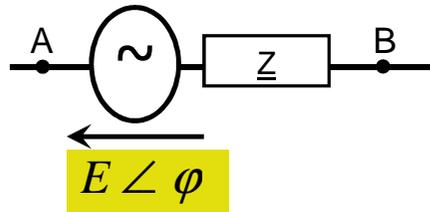
Exemple



Impose dans la branche entre A et B une tension :

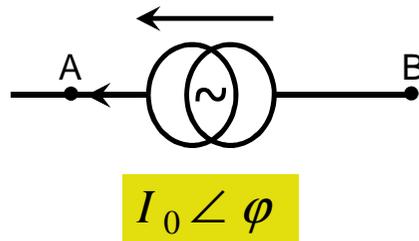
$$\Rightarrow e(t) = e_{AB}(t) = 40 \sqrt{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ V}$$

- Générateur de tension réel (impédance interne non nulle)

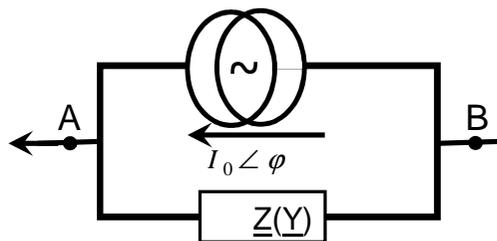


2.4.2 générateurs de COURANT

- Générateur de courant idéal (impédance interne nulle)



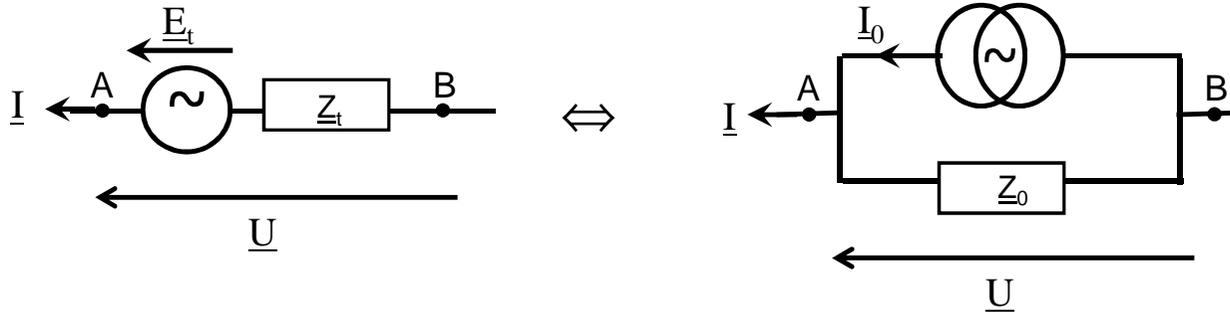
- Générateur de courant réel (impédance interne non nulle)



Impose dans la branche un courant :

$$i(t) = i_{BA}(t) = I_0 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi) \text{ A}$$

2.4.3 Dualité gén. de tension \Leftrightarrow gén. de courant



$$g.t. \rightarrow g.c. \begin{cases} I_0 = \frac{E_t}{Z_t} \\ Z_0 = Z_t \end{cases}$$

$$g.c. \rightarrow g.t. \begin{cases} E_t = Z_0 \cdot I_0 \\ Z_t = Z_0 \end{cases}$$

2.5 Association dipôle actif et dipôle passif

2.5.1 puissance instantanée

Prenons $u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t)$ et $i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi)$

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = u(t).i(t)$$

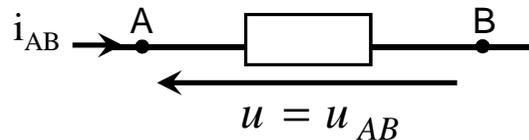
$$P(t) = 2.U.I.\cos(\omega t).\cos(\omega t - \phi) = 2.U.I.\cos(\omega t).\left[\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t.\sin \phi\right]$$

$$P(t) = U.I.\left[2.\cos^2 \omega t \cos \phi + 2.\cos \omega t.\sin \omega t.\sin \phi\right] = U.I.\left[(\cos 2\omega t + 1)\cos \phi + \sin 2\omega t.\sin \phi\right]$$

$$P(t) = U.I.\left[\cos 2\omega t.\cos \phi + \sin 2\omega t.\sin \phi + \cos \phi\right] = U.I.\left[\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi\right]$$

$$P(t) = \underbrace{U.I.\cos \phi}_{\text{Puissance active}} + \underbrace{U.I.\cos(2\omega t - \phi)}_{\text{Puissance fluctuante}}$$

2.5.2 puissance moyenne



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t).dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t).i(t)dt = U.I.\cos \phi$$

Facteur de puissance : $\cos \phi$

Puissance active : $P = UI \cos \phi$ (W)

Puissance apparente : $P_a = UI$ (V.A)

Si le facteur de puissance est > 0 le **dipôle est passif**

Si le facteur de puissance est < 0 le **dipôle est actif**

Exemple:

$$\text{Prenons } u(t) = 230 \sqrt{2} \cos(\omega t) \text{ et } i(t) = 18 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{10}\right)$$

$$U = 230 \text{ V} \quad I = 18 \text{ A} \quad \cos \phi = 0,8 \quad \Rightarrow P(t) = U \cdot I \cdot \cos \phi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \phi)$$

$$P(t) \text{ max} : U \cdot I \cdot \cos \phi + U \cdot I = 7,45 \text{ kW}$$

$$P(t) \text{ min} : U \cdot I \cdot \cos \phi - U \cdot I = -0,82 \text{ kW}$$

$$\text{Avec une puissance moyenne} = 3,3 \text{ kW} = U \cdot I \cdot \cos \phi$$

2.5.3 puissance complexe

Prenons

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{U} = Ue^{j\varphi} \text{ et } i(t) = I\sqrt{2} \cos\omega t \Rightarrow \underline{I} = Ie^{j0} = I$$

$$\underline{P} = \underline{U} \cdot \bar{\underline{I}} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot \cos\varphi + j U \cdot I \cdot \sin\varphi = P + jQ$$

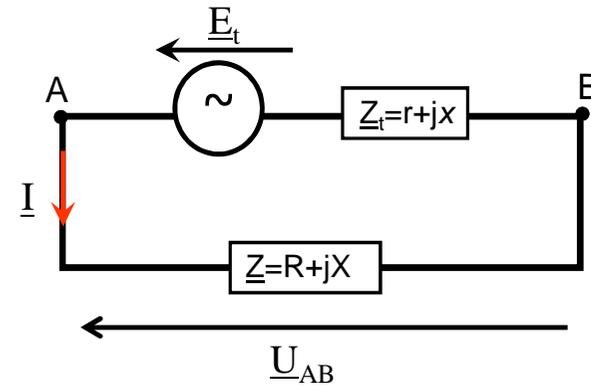
$$S = U \cdot I \quad \text{puissance apparente} \quad (\text{VA} : \text{Volt} - \text{Ampère})$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \quad \text{puissance active} \quad (\text{W} : \text{Watt})$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi \quad \text{puissance réactive} \quad (\text{VAR} : \text{Volt Ampère Réactif})$$

2.5.4 adaptation d'impédance

Puissance mise en jeu dans le dipôle AB d'impédance \underline{Z}



$$\underline{P} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_{AB}^*$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_t} \underline{E}_t \quad \text{et} \quad \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{Z} + \underline{Z}_t}$$

$$\underline{P} = \left[\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_t} \underline{E}_t \right] \cdot \left[\frac{\underline{E}_t^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_t^*} \right] = \frac{\underline{Z}}{(\underline{Z} + \underline{Z}_t)^2} \underline{E}_t^2$$

$$P_{active} = \text{Re}(P)$$

$$\text{On montre que : } P_a = E_t^2 \left[\frac{R}{(R + r)^2 + (X + x)^2} \right]$$

$$P_a \text{ max pour : } X \rightarrow x \text{ et } R \rightarrow r \text{ c'est à dire } \underline{Z} \rightarrow \underline{Z}_t$$

3. Analyse de circuits en régime sinusoïdal

3.1. Généralités

Toutes les méthodes d'analyse vues dans le cas des circuits en courant continu sont transposables avec les notations complexes.

Le retour aux "significations physiques" se fait par :

modules \Rightarrow valeurs efficaces
arguments \Rightarrow déphasages relatifs

3.2. Méthode des mailles – méthode des noeuds

3.2.1 Méthode des mailles $b-n+1 = 2$ équations $\rightarrow 2$ mailles

$$m(1): \underline{E}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{E}_1 - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_C) \underline{I}_1 + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_C) \underline{I}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10 - (6 - 2j) \underline{I}_1 + (4 - 2j) \underline{I}_2 = 0$$

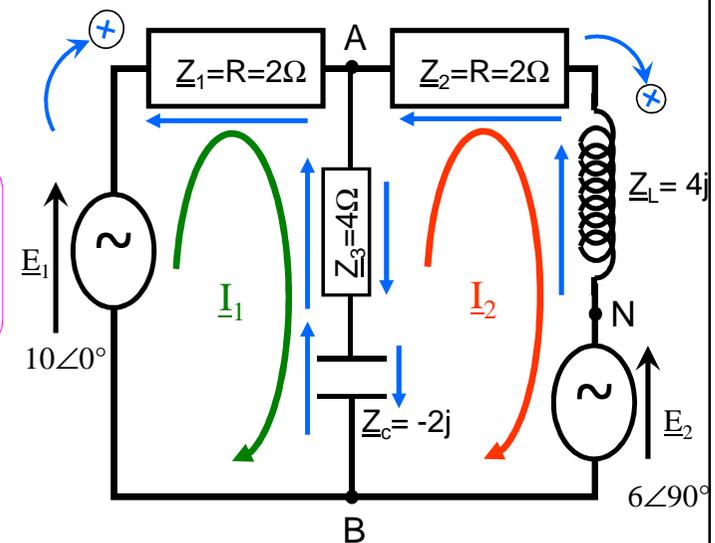
$$m(2): -\underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2 - \underline{E}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \underline{Z}_3) \underline{I}_2 - \underline{E}_2 + (\underline{Z}_C + \underline{Z}_3) \underline{I}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(6 + 2j) \underline{I}_2 - 6j + (4 - 2j) \underline{I}_1 = 0$$

$$\begin{cases} (6 - 2j) \underline{I}_1 - (4 - 2j) \underline{I}_2 = 10 \\ (4 - 2j) \underline{I}_1 - (6 + 2j) \underline{I}_2 = 6j \end{cases}$$

Exemple de circuit



Résolution du système d'équations par la méthode de combinaison (préférable à la substitution car plus de calculs)

$$\begin{cases} (6 - 2j) \underline{I}_1 - (4 - 2j) \underline{I}_2 = 10 & \times (6 + 2j) \\ (4 - 2j) \underline{I}_1 - (6 + 2j) \underline{I}_2 = 6j & \times - (4 - 2j) \end{cases}$$

On multiplie les 2 équations pour éliminer \underline{I}_2

Il vient en faisant la somme membre à membre :

$$(6 - 2j)(6 + 2j) \underline{I}_1 - (4 - 2j)(4 - 2j) \underline{I}_1 = 10(6 + 2j) - 6j(4 - 2j)$$

$$28 \underline{I}_1 + 16j \underline{I}_1 = 48 - 4j \Leftrightarrow (7 - 4j) \underline{I}_1 = 12 - 11j$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_1 = \frac{12 - j}{(7 + 4j)} = \frac{(12 - j)(7 - 4j)}{(7 + 4j)(7 - 4j)} = \frac{80 - 55j}{65} = \frac{16 - 11j}{13} \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{16 - 11j}{13}$$

Détermination de la valeur efficace I_1 et de la phase du courant \underline{I}_1

valeur efficace : $I_1 = |\underline{I}_1| = \frac{\sqrt{16^2 + 11^2}}{13} = 1,493 \text{ A}$

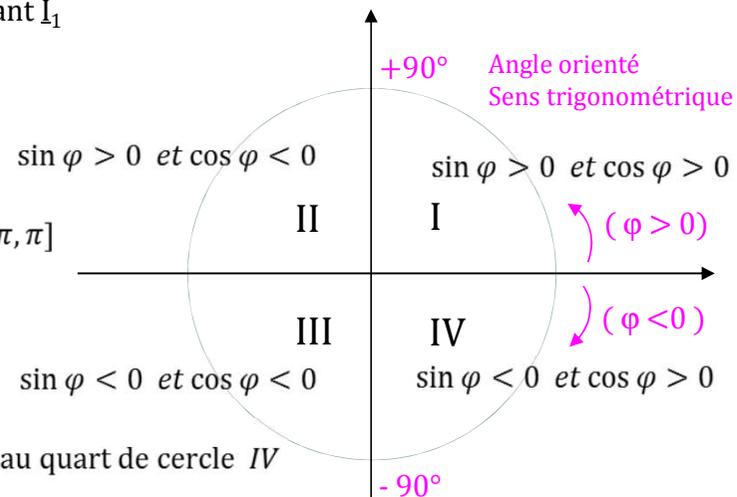
Pour la phase φ :

$$\underline{I}_1 = \frac{16}{13} - j \frac{11}{13} = I_1 e^{j\varphi} = I_1 (\cos \varphi + j \sin \varphi) \text{ avec } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$\Leftrightarrow (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{\frac{16}{13} - j \frac{11}{13}}{I_1} = \frac{16 - j11}{\sqrt{16^2 + 11^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{16^2 + 11^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{-11}{\sqrt{16^2 + 11^2}} \Rightarrow \varphi \in \text{au quart de cercle IV}$$

$$\text{et } \tan \varphi = \frac{-11}{16} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{11}{16}\right) = -34,51^\circ \text{ donc } \varphi \in \text{bien au quart de cercle IV}$$



on obtient finalement : $\underline{I}_1 = 1,493 A \angle -34,51^\circ$

Expression temporelle du courant I_1 : $i_1(t) = 1,493 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{34,51}{180} \pi\right)$

En remplaçant $\underline{I}_1 = \frac{16 - 11j}{13}$ dans le système d'équation, on obtient pour I_2

$$\underline{I}_2 = \frac{-7 - 126j}{65}$$

valeur efficace : $I_2 = |\underline{I}_2| = \frac{\sqrt{7^2 + 126^2}}{65} = 1,94 A$

Pour la phase φ :

$$\underline{I}_2 = \frac{-7}{65} - j \frac{126}{65} = I_2 e^{j\varphi} = I_2 (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\Leftrightarrow (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{-\frac{7}{65} - j \frac{126}{65}}{I_2} = \frac{-7 - j126}{\sqrt{7^2 + 126^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-7}{\sqrt{7^2 + 126^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{-126}{\sqrt{7^2 + 126^2}} \Rightarrow \varphi \in \text{au quart de cercle III}$$

et $\tan \varphi = \frac{-126}{-7} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{126}{7}\right) = 86,82^\circ$ donc $\varphi \in \text{au quart de cercle I}$ mais la fonction tangente admet deux solutions $86,82^\circ$ et $(86,82^\circ - 180^\circ)$ puisque $\tan \varphi = \tan(\pi - \varphi)$

La solution à retenir est donc $\varphi = -93,18^\circ$ ce qui vérifie bien $\varphi \in \text{au quartier III}$

on obtient finalement : $\underline{I}_2 = 1,94 A \angle -93,18^\circ$ $i_2(t) = 1,94 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{93,18}{180} \pi\right)$

Pour le courant dans la branche centrale

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \frac{16 - 11j}{13} - \frac{-7 - 126j}{65} = \frac{87 + j 71}{65}$$

valeur efficace : $I_{AB} = |\underline{I}_{AB}| = \frac{\sqrt{87^2 + 71^2}}{65} = 1,73 \text{ A}$

Pour la phase φ :

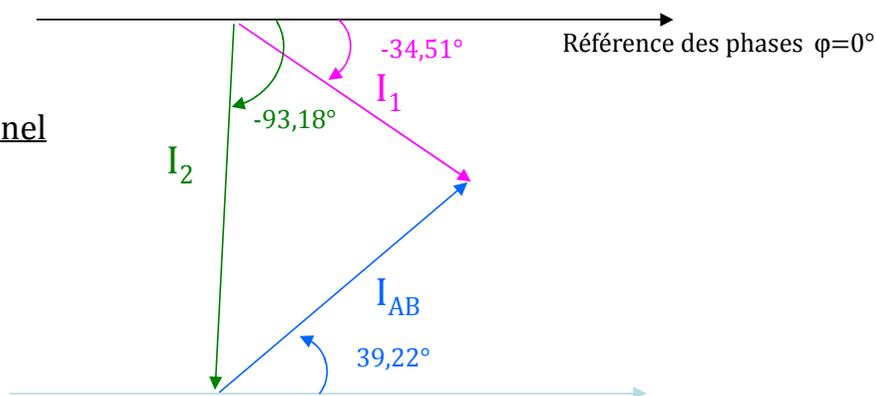
$$\underline{I}_{AB} = \frac{87}{65} + j \frac{71}{65} = I_{AB} e^{j\varphi} = I_{AB} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow \varphi \in \text{au quartier I}$$

et $\tan \varphi = \frac{71}{87} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{71}{87}\right) = 39,22^\circ$ donc $\varphi \in \text{au quartier I}$

on obtient finalement : $\underline{I}_{AB} = 1,73 \text{ A} \angle 39,22^\circ$

Expression temporelle du courant i_1 : $i_{AB}(t) = 1,73 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{39,22}{180} \pi\right)$

Diagramme de Fresnel



3.2.2 Méthode des noeuds

Au noeud A:

$$\frac{E_1 + V_B - V_A}{Z_1} + \frac{V_B - V_A}{Z_3 + Z_C} + \frac{E_2 + V_B - V_A}{Z_2 + Z_L} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 + \underline{U}_{BA}}{2} + \frac{\underline{U}_{BA}}{4 - 2j} + \frac{6j + \underline{U}_{BA}}{2 + 4j} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_{BA} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 - 2j} + \frac{1}{2 + 4j} \right) = -5 - \frac{6j}{2 + 4j}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_{BA} \left(1 + \frac{1}{2 - j} + \frac{1}{1 + 2j} \right) \frac{1}{2} = -5 - \left(\frac{6j}{1 + 2j} \right) \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_{BA} \left(1 + \frac{2 + j}{5} + \frac{1 - 2j}{5} \right) = -10 - \left(\frac{12 + 6j}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_{BA} (8 - j) = -(62 + 6j) \Rightarrow \underline{U}_{BA} = -\frac{2}{13} (49 + 11j)$$

$$\underline{U}_{BA} = 7,726 \text{ V } \angle -167,35^\circ$$

valeur efficace : $U_{BA} = |\underline{U}_{BA}| = \frac{2\sqrt{49^2 + 11^2}}{13} = 7,726 \text{ V}$

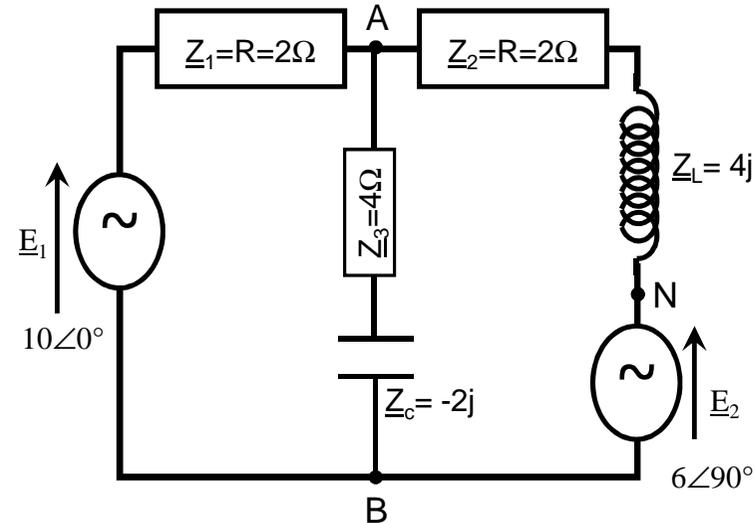
Pour la phase φ :

$$\underline{U}_{AB} = -\frac{98}{13} - j\frac{22}{13} = U_{BA} e^{j\varphi} = U_{BA} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow \varphi \in \text{au quart de cercle III}$$

et $\tan \varphi = \frac{-22}{-98} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{22}{98}\right) = 12,65^\circ$ donc $\varphi \in \text{au quart de cercle I}$ mais la fonction tangente admet deux solutions $12,65^\circ$ et $(12,65^\circ - 180^\circ)$ puisque $\tan \varphi = \tan(\pi - \varphi)$

La solution à retenir est donc $\varphi = -167,34^\circ$ ce qui vérifie bien $\varphi \in \text{au quart de cercle III}$

Exemple de circuit



En revenant à chaque courant de branche

$$I_1 = \frac{1}{2}[10 + \underline{U}_{BA}] = \frac{16 - j11}{13} \Rightarrow I_1 = |I_1| = 1,49A \text{ et } \arctan\left(-\frac{11}{16}\right) = -34,51^\circ$$

$$I_2 = \frac{1}{2 + 4j}[6j + \underline{U}_{BA}] = \frac{7 + j126}{65} \Rightarrow I_2 = 1,94A \text{ et } \arctan\left(\frac{126}{7}\right) = 86,82^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{1}{4 - 2j}[\underline{U}_{BA}] = -\frac{87 + j71}{65} \Rightarrow I = 1,73A \text{ et } \arctan\left(\frac{-71}{-87}\right) = -140,78^\circ$$

Remarque

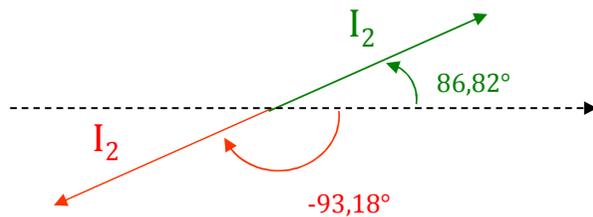
Le courant déterminé précédemment pour la branche du milieu et celle de droite va de A vers B or ici l'application de la méthode des nœuds exige, par convention, que tous les courants arrivent au nœud A d'où la présence du signe moins.

Pour le courant dans la branche de droite :

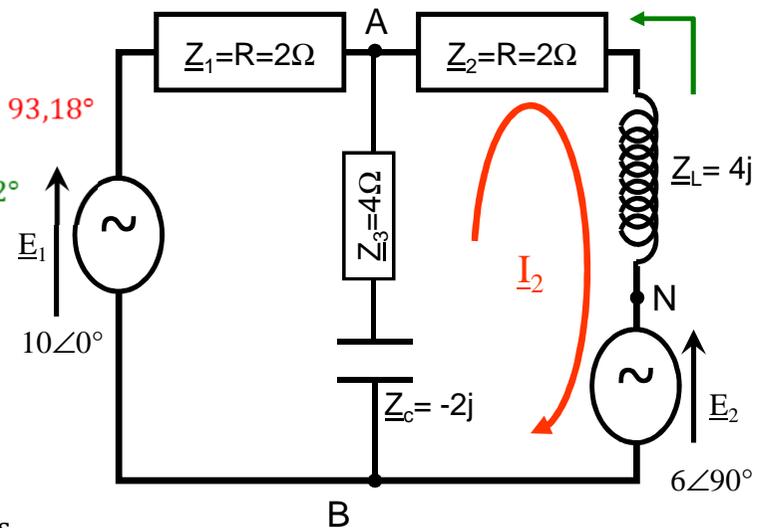
par la méthode des mailles : $\underline{I}_2 = -\frac{7 + 126j}{65} = 1,94 A \angle -93,18^\circ$

par la méthode des noeuds : $\underline{I}_2 = \frac{7 + j126}{65} = 1,94 A \angle 86,82^\circ$

La somme des deux angles en valeur absolue est égale à 180°



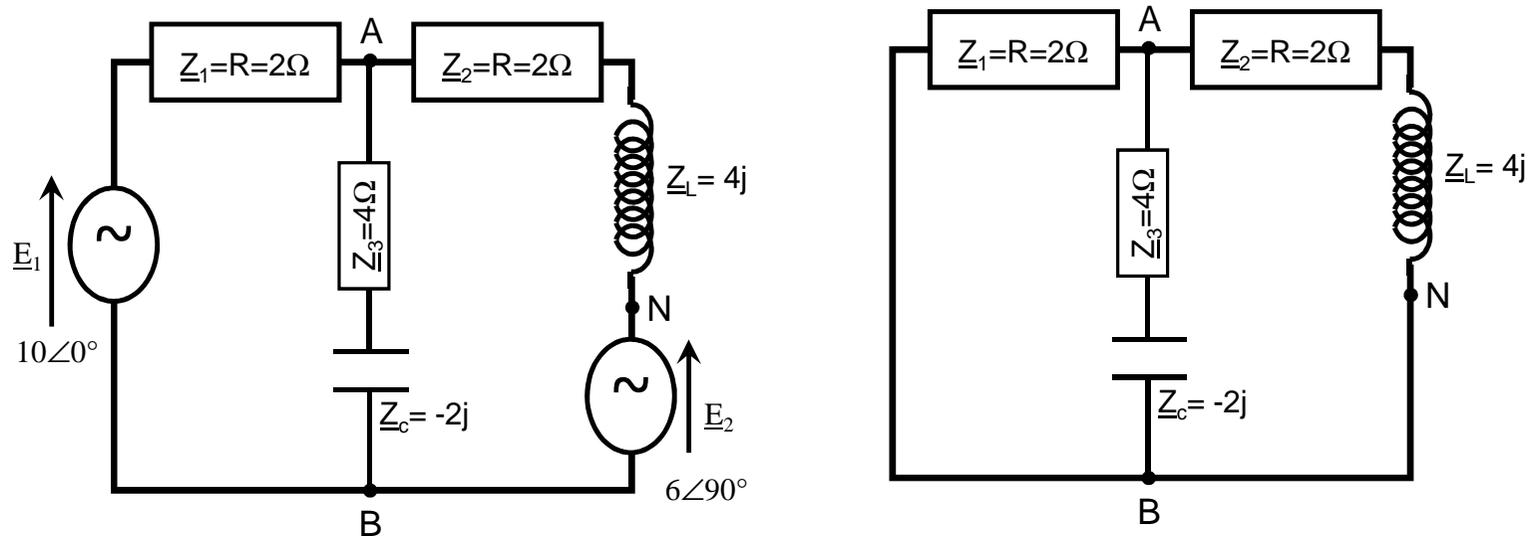
Cela correspond simplement à un changement de sens



3.3. Théorème de Thévenin et Norton

3.3.1 Théorème de Thévenin

Détermination du générateur de Thévenin équivalent entre A et B



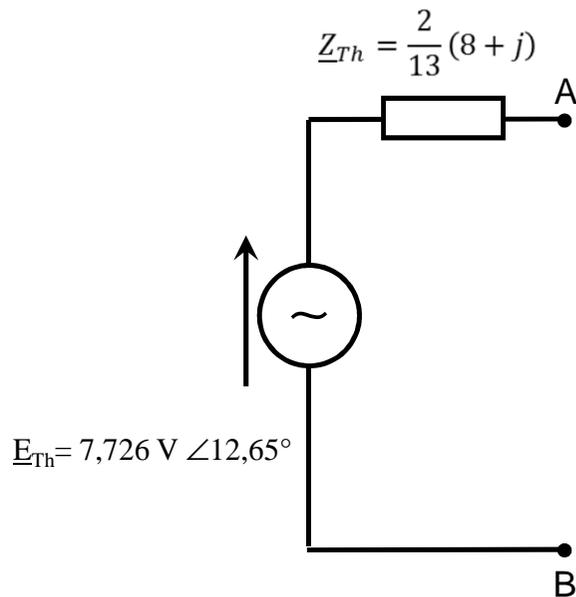
Calcul de \underline{E}_{TH}

$$\underline{E}_{TH} = \underline{V}_{AB} = 2 \left[\frac{49 + 11j}{13} \right] = 7,726V \angle 12^\circ, 65$$

$$\Rightarrow e_{TH}(t) = 7,726\sqrt{2} \cos(\omega t + 12^\circ, 65)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{TH}} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4 - 2j} + \frac{1}{2 + 4j} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{TH} = 2 \left[\frac{8 + j}{13} \right]$$



Générateur de Thévenin équivalent entre A et B.

Remarque

On aurait pu écrire l'impédance du générateur de Thévenin en polaire ou exponentielle, ou encore en notation phaseur à partir de sa forme cartésienne :

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{2}{13}(8 + j) = Z_{Th} e^{i\varphi_{Th}} \quad Z_{Th} = |\underline{Z}_{Th}| = \frac{2}{13}\sqrt{65} \quad \text{et} \quad \varphi_{Th} = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = 7,125^\circ$$

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{2}{13}\sqrt{65} e^{j\frac{7,125}{180}\pi}$$

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{2}{13}\sqrt{65} \angle 7,125^\circ$$

3.3.2 Théorème de Norton

impédance du générateur de Norton

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_{TH}$$

Calcul de \underline{I}_N courant de "court - circuit"

$$\text{Au nœud A: } \frac{10}{2} + \frac{6j}{2+4j} - \underline{I}_N = 0$$

$$\underline{I}_N = \frac{5 + 13j}{1 + 2j} = \frac{31 + 3j}{5} = 6,23 \text{ A } \angle 5,53^\circ$$

$$i_N(t) = 6,23 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{5,53\pi}{180}\right)$$

