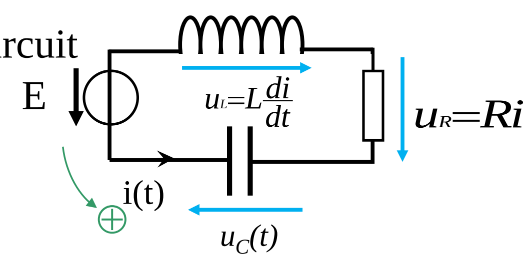
II.3- Régime transitoire dans des circuits du 2e ordre. Le dipôle RLC

Analyse du circuit



Equation de la maille : $\boxed{E - u_c - u_R - u_L = 0}$

Déterminons par exemple l'évolution de la tension $u_c(t)$ durant le régime transitoire

$$E - u_C(t) - R\, i(t) - L\frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E - u_C(t) - RC\frac{du_C}{dt} - \mathrm{L}\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right) = 0$$

En remplaçant i(t) dans l'équation de la maille : $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$

d'où $$E - u_C(t) - RC\frac{du_C}{dt} - \mathrm{LC}\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{E}{LC}$$

On pose : $\dfrac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad et \quad \dfrac{R}{L} = 2\lambda$ $$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E$$

La solution générale de cette équation différentielle du second ordre avec second membre, s'obtient par la résolution de l'équation homogène (sans second membre) à laquelle il faut ajouter une solution particulière.

$u_C(t) = u_{C_{SSM}} + u_{C_{particulière}}$

décrit le régime transitoire

décrit le régime permanent

- Régime transitoire (équation homogène) :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$ « Forme canonique »

- solution particulière de l'équation homogène $u_C(t) = e^{rt}$ avec r un réel
- En remplaçant dans l'équation : $(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2)\, e^{rt} = 0$

e^{rt} ne s'annule jamais d'où la seule solution est que : $(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) = 0$

$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

Equation caractéristique de l'équ. différentielle

$\Delta > 0$ régime apériodique

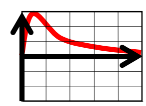
$\Delta = 0$ régime critique

$\Delta < 0$ régime pseudo-périodique = oscillations amorties

❑ $\Delta > 0$ Régime apériodique

$$r_1 = \frac{-2\lambda - \sqrt{4(\lambda^2 - \omega_0^2)}}{2} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad et \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

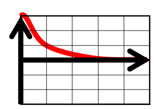
$$\boxed{u_{C_{SSM}}(t) = e^{-\lambda t}\left(A\ e^{-\left(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} + B\ e^{\left(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}\right)}$$

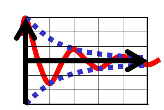


❑ $\Delta = 0$ Régime critique

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

$$\boxed{u_{C_{SSM}}(t) = e^{-\lambda t}(At + B\ )}$$





❑ $\Delta < 0$ Régime pseudo-périodique

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = -4(\omega_0^2 - \lambda^2) = 4i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$$

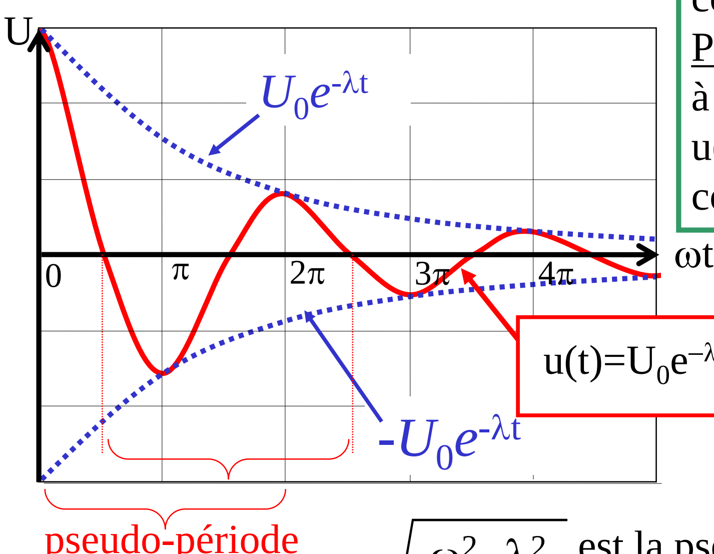
$$r_1 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad et \quad r_2 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\boxed{u_{C_{SSM}}(t) = e^{-\lambda t}\left(A\ e^{-i\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t} + B\ e^{i\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t}\right) = Ce^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\ t + \varphi\right)}$$

3

Le dipôle RLC: Oscillations amorties

$$u = e^{-\lambda t}\ C\ \cos[(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})t + \varphi\ ]$$



<u>Les conditions initiales</u> permettent de déterminer les constantes C et φ.
<u>Par exemple</u>:
à l'instant t=0, C est chargé $u(0) = U_0$. on ferme k et le courant commence à passer.

Donc $C=U_0$ et $\varphi=0$

$$\boxed{u(t)=U_0 e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\ \ t\right)}$$

$\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ est la pseudo-pulsation.

λ est le coefficient d'amortissement.

4