

III Circuits électriques en régime variable sinusoïdal

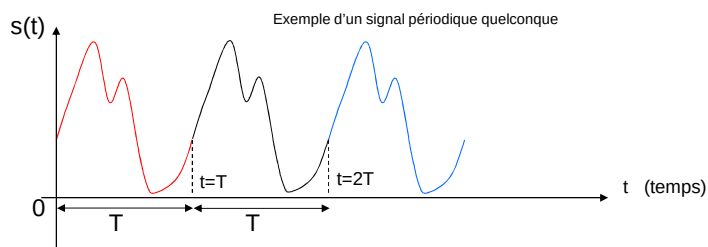
1. Définitions, généralités
2. Dipôles en régime permanent sinusoïdal
3. Analyse de circuits en régime sinusoïdal

1. Définitions, généralités

1.1 Grandeurs périodiques $s(t)$

Une grandeur physique est dite périodique, si elle prend les mêmes valeurs à intervalles de temps réguliers : $s(t+T) = s(t)$ ou T est l'intervalle de temps appelé **période (unité : seconde)**.

On définit la **fréquence $f = 1/T$** qui indique le nombre de cycles par unité de temps. La fréquence a pour unité s^{-1} ou Hz (Hertz).



Exemple: $f=50\text{Hz}$ correspond à 50 cycles par seconde pour une grandeur de période $T=0,02\text{ s}$

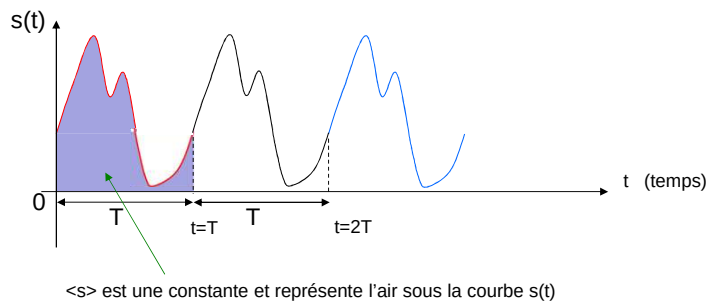
La grandeur physique $s(t)$ est dite monodirectionnelle si $s(t) > 0$ (ou $s(t) < 0$) $\forall t$

La grandeur physique $s(t)$ est dite bidirectionnelle si $s(t)$ **change de signe** pour $t \in [0, T]$

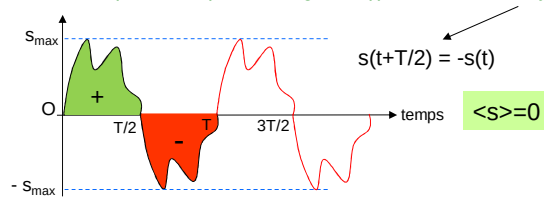
- Question : Comment mesurer la valeur de $s(t)$ sachant que celle-ci change tout le temps ?

□ On définit la **valeur moyenne** notée $\langle s \rangle$ d'une grandeur périodique de période T par :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$



- Question : Que se passe-t-il pour un signal $s(t)$ bidirectionnel symétrique ?



$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} s(t) dt + \int_{T/2}^T s(t) dt \right] = S_+ + S_- = 0$$

Conclusion : il faut définir une autre constante électrique permettant de contourner cette difficulté et qui apporte un complément d'information sur le signal $s(t)$ étudié.

□ On définit alors la **valeur efficace** notée S_{eff} d'une grandeur périodique de période T par :

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt$$

Dans ce cas, même si le signal $s(t)$ est bidirectionnel, l'intégrale ainsi défini, sera toujours positive et non nulle

1.2 Grandeurs sinusoïdales

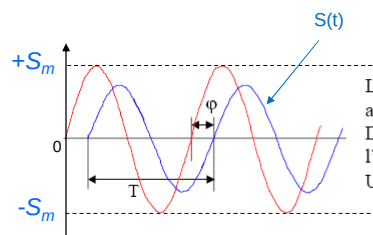
- Pourquoi privilégier les grandeurs sinusoïdales ?

On démontre que toute fonction $s(t)$ périodique satisfaisant à certaines conditions de continuité et de dérivabilité, peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales dite "série de Fourier".

Si $s(t)$ est une fonction sinusoïdale alors elle aura pour expression :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec}$$

- $s(t)$ la valeur instantanée
- S_m la valeur maximum ou valeur crête ou encore amplitude de $s(t)$
- ω la pulsation, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (radian $\cdot s^{-1}$) avec T la période et f la fréquence de $s(t)$
- φ la phase à l'origine (c'est-à-dire au temps $t=0$) de $s(t)$ définie par rapport à une référence.



La phase est définie par rapport à une référence arbitraire.
Dans le cas de plusieurs signaux de même fréquence, l'un d'eux est utilisé comme origine pour les phases.
Une période entière correspond à un déphasage de 2π .

Constantes caractéristiques

La valeur moyenne $\langle s \rangle$ pour une grandeur sinusoïdale est toujours nulle

La valeur efficace S_{eff} pour une grandeur sinusoïdale est égale à $\frac{S_m}{\sqrt{2}}$

démonstration

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$\text{Rappel: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{S_m^2}{T} \left[\int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt \right]$$

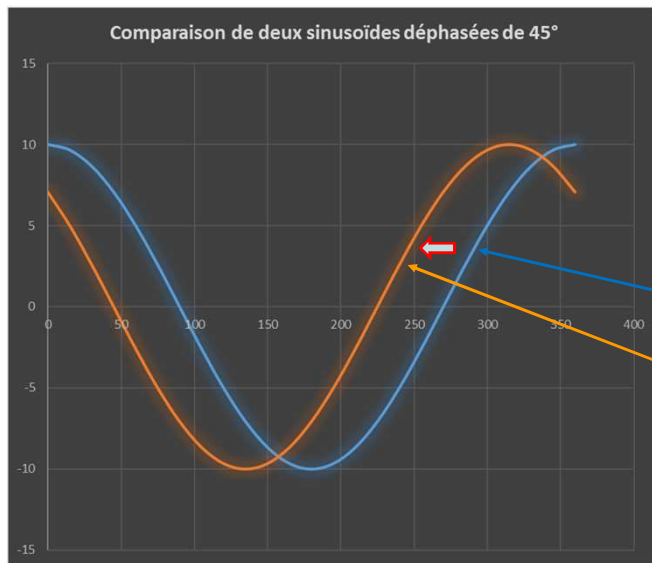
$$\Leftrightarrow S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{T} \left[\left[\frac{t}{2} \right]_0^T + \left[\frac{\sin 2(\omega t + \varphi)}{2 \cdot 2\omega} \right]_0^T \right] = \frac{S_m^2}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega} (\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi) \right]$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{2} \quad \text{la deuxième intégrale est nulle puisque } \omega T = 2\pi \text{ et } \sin(4\pi + 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

$$\text{finalement} \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad \text{ou bien} \quad S_m = S_{\text{eff}} \sqrt{2}$$

Remarque importante : pour faire apparaître la constante caractéristique S_{eff} dans $s(t)$ on écrira dorénavant :

$$s(t) = S_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

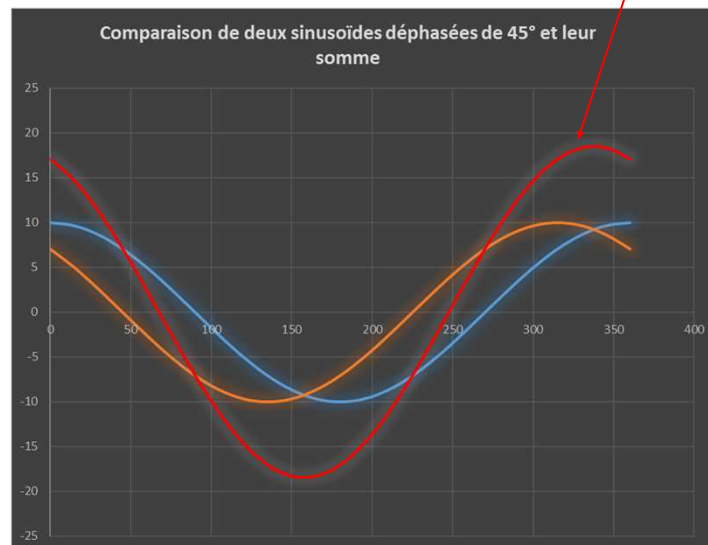


$$s(t) = 10 \cos \omega t$$

$$s(t) = 10 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$s(t)$ est en avance de $+\frac{\pi}{4}$ par rapport à $s(t)$

La somme de deux ou plusieurs sinusoïdes est encore **une sinusoïde**



1.3 Représentations pratiques de grandeurs sinusoïdales

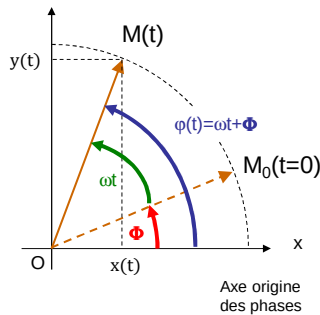
Soit le vecteur $\vec{OM}$ de module constant et M un point de coordonnées polaires $(\rho(t), \varphi(t))$ animé d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'origine O à la vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (rad.s⁻¹).

On suppose que le point M se trouve à M_0 à l'instant $t=0$ ($\vec{OM}(t=0) = \vec{OM}_0$) et fait un angle Φ avec l'axe Horizontale ($\varphi(t=0) = \Phi$). Les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ en polaires sont données par :

$$\vec{OM} = \rho \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\varphi) \vec{e}_y \text{ or ici } \rho = \|\vec{OM}\| \text{ et } d\varphi = \omega dt \Leftrightarrow \varphi(t) = \int \omega dt = \omega t +$$

$$d'où \vec{OM} = \|\vec{OM}\| \cos(\omega t +) \vec{e}_x + \|\vec{OM}\| \sin(\omega t +) \vec{e}_y$$

En coord cartésiennes on écrira: $\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y$ ce qui conduit aux équations :



$$\begin{cases} x(t) = \|\vec{OM}\| \cos(\omega t +) \\ y(t) = \|\vec{OM}\| \sin(\omega t +) \end{cases} \quad \begin{cases} s(t) = S_m \cos(\omega t +) \\ s(t) = S_m \sin(\omega t +) \end{cases}$$

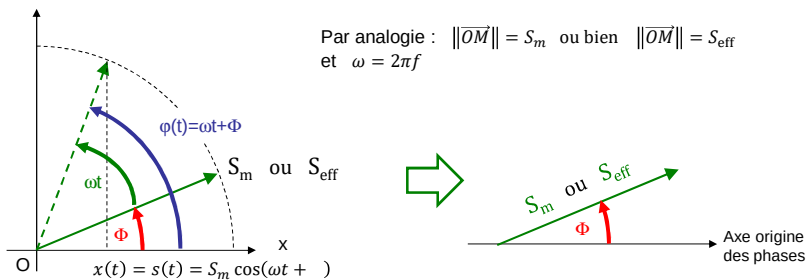
Conclusion

L'abscisse $x(t)$ ou l'ordonnée $y(t)$ d'un vecteur tournant $\vec{OM}$ à vitesse angulaire constante ω sont des fonctions sinusoïdales, d'amplitude la longueur $\|\vec{OM}\|$ et de phase à l'origine Φ à $t=0$.

Vecteur de Fresnel tournant

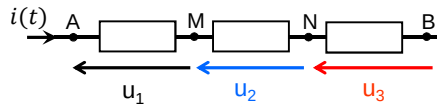
Partant de ce constat, **A.J Fresnel** propose de représenter toute fonction sinusoïdale par un vecteur tournant. La **représentation de Fresnel** ou **diagramme de Fresnel** est un outil graphique permettant d'ajouter, de soustraire, de dériver et d'intégrer des fonctions sinusoïdales de même fréquence.

En physique, de nombreuses grandeurs peuvent être des fonctions sinusoïdales du temps (ou de l'espace) : courants $i(t)$, tensions $u(t)$, puissance $p(t)$.



- si $s(t)$ représente une tension sinusoïdale on écrira alors $u(t) = U_m \cos(\omega t +) = U_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t +)$
- si $s(t)$ représente un courant sinusoïdal on écrira alors $i(t) = I_m \cos(\omega t +) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t +)$

Exemple pour montrer l'utilité de la représentation de Fresnel



		Val. eff	Phase
$u_1(t) = 5\sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow u_1(t)$	$U_1 = 5V$	$\varphi_1 = 90^\circ$	
$u_2(t) = 3\sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow u_2(t)$	$U_2 = 3V$	$\varphi_2 = -45^\circ$	
$u_3(t) = \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow u_3(t)$	$U_3 = 1V$	$\varphi_3 = -30^\circ$	

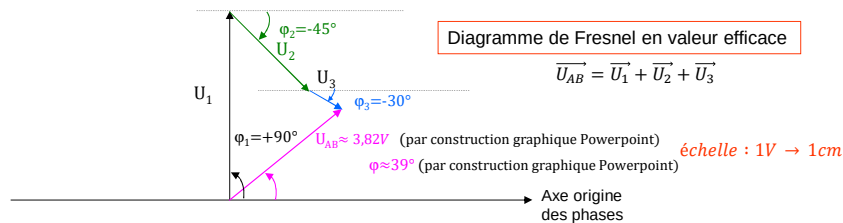
La loi d'Ohm et la 2^e loi de Kirshhoff portant sur l'additivité des tensions, sont toutes les deux vérifiées pour des tensions variables.

$$u_{AB}(t) = u_{AM}(t) + u_{MN}(t) + u_{NB}(t)$$

$$u_{AB}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

On sait que la somme de deux ou plusieurs sinusoides est **encore une sinusoïde** : $u_{AB}(t) = U_{AB} \sqrt{2} \cos(3t + \varphi)$

□ En représentation de Fresnel chaque tension est représentée par un vecteur tournant du même nom. La tension entre A et B s'écrit vectoriellement : $\vec{u}_{AB} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$



❖ Si on devait passer par un calcul analytique ...

$$U_{AB} \sqrt{2} \cos(3t + \varphi) = 5\sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow U_{AB} \cdot \sqrt{2} [\cos 3t \cdot \cos \varphi - \sin 3t \cdot \sin \varphi] = 5\sqrt{2} \left[\cos 3t \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin 3t \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right] + 3\sqrt{2} \left[\cos 3t \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin 3t \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] + \sqrt{2} \left[\cos 3t \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin 3t \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow U_{AB} \cdot [\cos 3t \cdot \cos \varphi - \sin 3t \cdot \sin \varphi] = 5[-\sin 3t] + 3 \left[\cos 3t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 3t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \left[\cos 3t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 3t \cdot \frac{1}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t \cdot \cos \varphi \cdot U_{AB} - \sin 3t \cdot \sin \varphi \cdot U_{AB} = \cos 3t \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sin 3t \left(-5 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot U_{AB} = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2} \\ -\sin \varphi \cdot U_{AB} = \frac{(3\sqrt{2} - 9)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \varphi \cdot U_{AB}^2 = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{4} \\ (-\sin \varphi)^2 \cdot U_{AB}^2 = \frac{(3\sqrt{2} - 9)^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} U_{AB}^2 &= \frac{1}{4} [(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2} - 9)^2] \\ U_{AB}^2 &= \frac{1}{4} [120 + 6\sqrt{6} - 54\sqrt{2}] \end{aligned}$$

Pour la phase :

$$\cos \varphi \cdot U_{AB} = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}}{3,818} = 0,782 \Rightarrow \varphi = \arccos 0,782 = 38,51^\circ$$

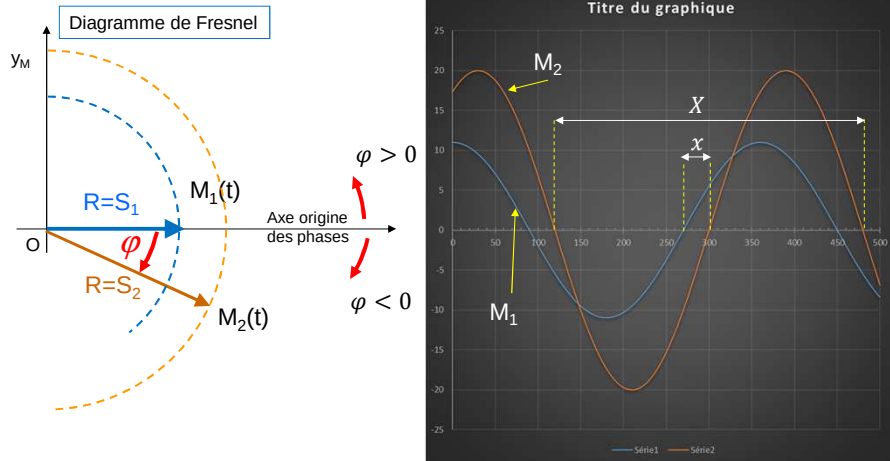
Conclusion

Après un calcul long et fastidieux on arrive, certes à des résultats certainement plus précis que l'extraction graphique de Fresnel mais l'écart n'est que de $0,5^\circ$ par rapport au calcul et la valeur efficace est quasiment identique à $0,002V$ près.

1.4 Mesures à l'oscilloscope du déphasage entre 2 grandeurs sinusoïdales de même périodes

$$s_1(t) = S_{1\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t = S_1 \sqrt{2} \cos \omega t \quad \text{avec } (S_1 = S_{1\text{eff}})$$

$$s_2(t) = S_{2\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = S_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } (S_2 = S_{2\text{eff}})$$

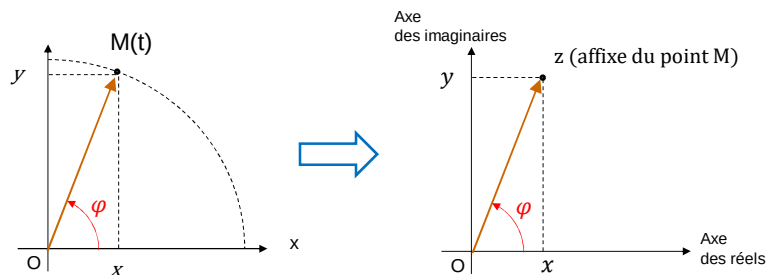


A l'aide d'un oscilloscope, le déphasage du point M_2 par rapport à M_1 s'écrit :

$$\varphi = 2\pi \frac{x}{X} \text{ (radian) ou bien } \varphi = 360^\circ \frac{x}{X} ; \text{ on peut déterminer le signe de } \varphi$$

1.5 Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

□ Comment revenir à un calcul analytique avec des fonctions sinusoïdales ?



- si z est l'affixe du point $M(x, y)$ dans le plan complexe on écrira : $z = x + i y$ avec $i^2 = -1$ imaginaire pure
- on écrira aussi : $z = OM \cos \varphi + i OM \sin \varphi$ avec OM la longueur du vecteur $\vec{OM}$
- Le vecteur de Fresnel $\vec{OM}$ précédent, représenté dans l'espace complexe, est l'image du nombre complexe :

$$z = OM \cos \varphi + i OM \sin \varphi = OM [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] \quad \text{avec } \varphi = \omega t + \varphi_0$$
- Si $OM = S_m$ alors $z = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$ et donc $s(t) = \text{Re}(z) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$

Notation en électricité

- ✓ pour éviter la confusion avec le courant i , on remplace le nombre imaginaire i par j avec $j^2 = -1$
- ✓ on remplace le nombre complexe z par $\underline{s}(t)$ avec une barre en dessous pour éviter la confusion avec $s(t)$

En résumé

$$\underline{s}(t) = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)] \text{ partie réelle de } \underline{s}(t) \longrightarrow \text{Re}[\underline{s}(t)] = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$S_m = |\underline{s}(t)| \text{ module de } \underline{s}(t) \longrightarrow |\underline{s}(t)| = \sqrt{S_m^2 [\cos(\omega t + \varphi)^2 + \sin(\omega t + \varphi)^2]} = S_m$$

$$\varphi = \arg(\underline{s}) = \text{argument de } \underline{s} \longrightarrow \tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{s})}{\text{Re}(\underline{s})} \text{ et } \varphi = \arctan \left[\frac{\text{Im}(\underline{s})}{\text{Re}(\underline{s})} \right]$$

Voir la définition de $\underline{s}$ plus bas

- D'autre part, on sait aussi que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\underline{s}(t) = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{s}(t) = [S_m e^{j\varphi}] \cdot e^{j\omega t} = [S_{\text{eff}} e^{j\varphi}] \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

- On définit deux nouvelles caractéristiques de $s(t)$: S_m et $\underline{s}$

➤ $S_m = S_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe et on écrira : $\underline{s}(t) = S_m e^{j\omega t}$

➤ $\underline{s} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi}$ l'amplitude efficace complexe et on écrira : $\underline{s}(t) = \underline{s} \sqrt{2} e^{j\omega t}$

□ En pratique on utilisera plutôt les Amplitudes Efficaces Complexes (AEC) associées

$\underline{s} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi}$ et on écrira également : $\underline{s} = S_{\text{eff}} \angle \varphi$ en notation phaseur

Conventions d'écriture adoptées pour la suite

Écriture temporelle (valeur instantanée)	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) = S_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude ou valeur maximale	S_m
Valeur efficace	S_{eff}
Amplitude efficace complexe	$\underline{s} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi}$
Notation phaseur	$\underline{s} = S_{\text{eff}} \angle \varphi$
Amplitude efficace complexe conjuguée	$\overline{\underline{s}} = S_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$
Vecteur de Fresnel associé	$\vec{S}_m$ ou $\vec{S}_{\text{eff}}$

Exemples

$$u(t) = 100 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V} = 70,71 \sqrt{2} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Cette tension a pour amplitude maximale 100V, une valeur efficace de 70,71V et une phase de 90°

en représentation complexe on écrira : $\underline{u}(t) = 70,71 \sqrt{2} e^{j(5t + \frac{\pi}{2})}$

Elle a pour AEC : $\underline{U} = 70,71 e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ V}$ ou $\underline{U} = 70,71 \text{ V} + \frac{\pi}{2}$ en notation phaseur

1.6 . Additivité des tensions et des courants

Toutes les lois vues dans le cadre des circuits en courant continu sont applicables au régime variable.

- Additivité des d.d.p (mailles)
- Additivité des courants (Lois aux noeuds)
- Méthodes d'analyse de circuit : Théorème de superposition, Théorème de Thévenin et Norton ...

Les opérations sur les valeurs instantanées des grandeurs électriques sont remplacées par des opérations soit vectorielles en représentation de Fresnel soit algébriques en représentation complexe.

❖ Additivité des d.d.p

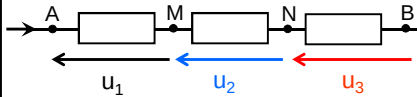
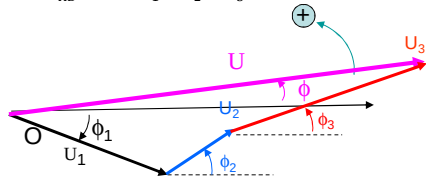


Diagramme de Fresnel en valeur efficace

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3$$



Cas : $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$ et $\phi_3 > 0$

$$u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$u_2(t) = U_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$u_3(t) = U_3 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_3)$$

$$u_{AB}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$$

En représentation complexe des AEC

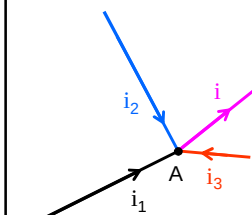
$$\underline{u}_{AB}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \underline{u}_3(t) = U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 \quad \text{notation AEC}$$

$$U e^{j\phi} = U_1 e^{j\phi_1} + U_2 e^{j\phi_2} + U_3 e^{j\phi_3} \quad \text{notation AEC}$$

$$U \angle \phi = U_1 \angle \phi_1 + U_2 \angle \phi_2 + U_3 \angle \phi_3$$

❖ Additivité des courants



$$i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2(t) = I_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$i_3(t) = I_3 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_3)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$$

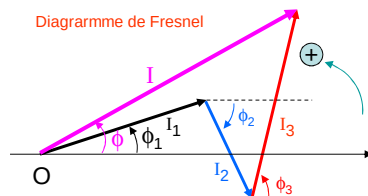
$$\text{Au nœud A: } \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \quad (\text{Fresnel})$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad (\text{AEC})$$

$$\text{soit : } I e^{j\phi} = I_1 e^{j\phi_1} + I_2 e^{j\phi_2} + I_3 e^{j\phi_3}$$

$$\text{ou : } I \angle \phi = I_1 \angle \phi_1 + I_2 \angle \phi_2 + I_3 \angle \phi_3$$

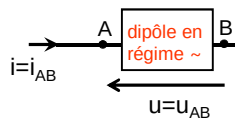
Diagramme de Fresnel



Cas : $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$ et $\phi_3 > 0$

2. Dipôles en régime permanent sinusoïdal

2.1 Loi d'Ohm – impédance - admittance



Le dipôle est soumis à la ddp : $u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega t \Rightarrow \underline{U} = Ue^{j0} = U$
 il est alors parcouru par un courant i en retard de ϕ (algébrique) sur u :
 $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) \Rightarrow \underline{I} = I e^{-j\phi}$

Par analogie avec la loi d'Ohm, on définit l'impédance complexe $\underline{Z}$, d'un dipôle comme étant le quotient de $\underline{U}$ par $\underline{I}$.

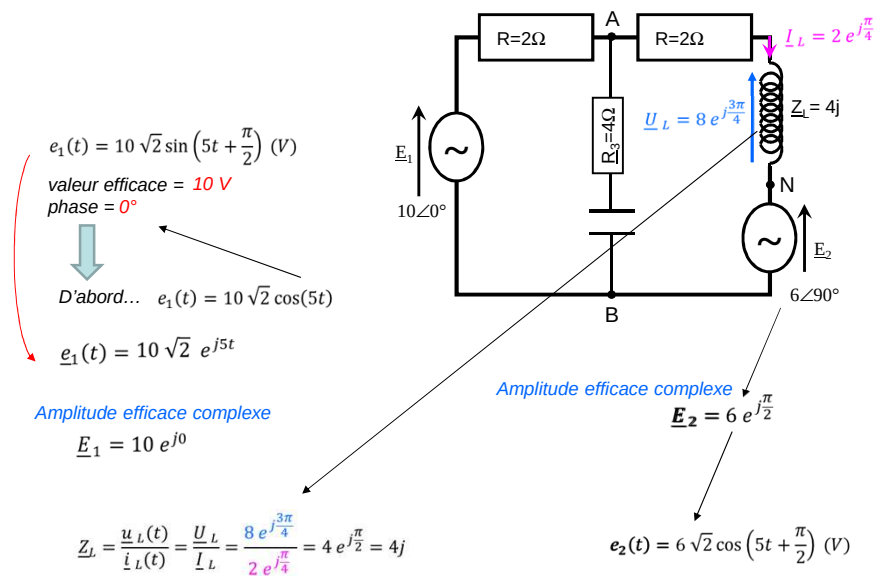
L' **impédance complexe** $\underline{Z}$ du dipôle : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I e^{-j\phi}} = \frac{U}{I} e^{j\phi} = Z e^{j\phi}$

$$\text{module: } |\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U}{I} = Z \text{ (}\Omega\text{)} \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} = +\phi$$

L' **admittance complexe** $\underline{Y}$ du dipôle : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{-j\phi}}{U} = \frac{I}{U} e^{-j\phi} = Y e^{-j\phi}$

$$\text{module: } |\underline{Y}| = \frac{|\underline{I}|}{|\underline{U}|} = \frac{I}{U} = Y \text{ (S)} \quad \text{et} \quad \arg \underline{Y} = \arg \underline{I} - \arg \underline{U} = -\phi$$

Exemple de circuit



$$\underline{Z} = Z e^{j\phi} = Z \cos \phi + j Z \sin \phi = R + j X$$

Impédance
complexe
résistance
réactance

module: $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ (}\Omega\text{)}$ et $\arg \underline{Z} = \arctg\left(\frac{X}{R}\right)$

$$\underline{Y} = Y e^{-j\phi} = Y \cos \phi - j Y \sin \phi = G + j B$$

admittance
complexe
conductance
susceptance

module: $|\underline{Y}| = Y = \sqrt{G^2 + B^2} \text{ (S)}$ et $\arg \underline{Y} = \arctg\left(\frac{B}{G}\right)$

2.2 Impédance élémentaire

2.2.1 Résistance linéaire R

La résistance R est parcourue par un courant alternatif d'expression :

$$i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t) \Rightarrow u_R(t) = R i(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = R I \sqrt{2} \cos(\omega t) = U_R \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad U_R = R I$$

$\Rightarrow$ $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase

• Diagramme de Fresnel

$0 \xrightarrow{\text{red } I}$

$\xrightarrow{\text{blue } U_R=RI}$

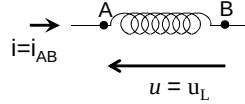
$\xrightarrow{\text{axe des phases } \varphi = 0}$

• impédance complexe

$\underline{Z}_R = R = R \angle 0^\circ \quad \text{module} : |\underline{Z}_R| = R \quad \text{et} \quad \arg = \phi = 0$

2.2.2 Bobine idéale ($r=0$) L

La bobine (self) L est parcourue par un courant alternatif d'expression :

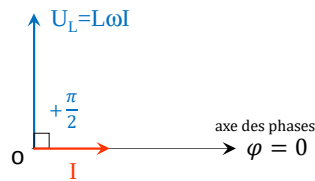


$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad \text{par définition} \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow u(t) = -L\omega I\sqrt{2} \sin(\omega t) = U_L\sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{avec} \quad U_L = L\omega I$$

$\Rightarrow u(t)$ est en quadrature avance sur $i(t)$

- Diagramme de Fresnel

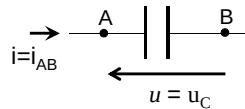


- impédance complexe

$$\underline{Z}_L = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = jL\omega = L\omega \angle +\frac{\pi}{2} \quad \text{module} : |\underline{Z}_L| = L\omega \quad \text{et} \quad \arg = \phi = +\frac{\pi}{2}$$

2.2.3 condensateur idéal C

Le condensateur C est parcourue par un courant alternatif d'expression :



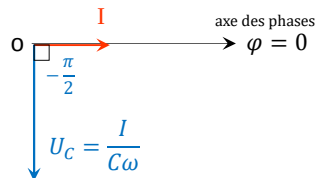
$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t) \quad \text{par définition} \quad i(t) = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int I\sqrt{2} \cos(\omega t) dt = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad \text{avec} \quad U_C = \frac{I}{C\omega}$$

$$\Rightarrow u(t) \text{ est en quadrature retard sur } i(t)$$

- Diagramme de Fresnel



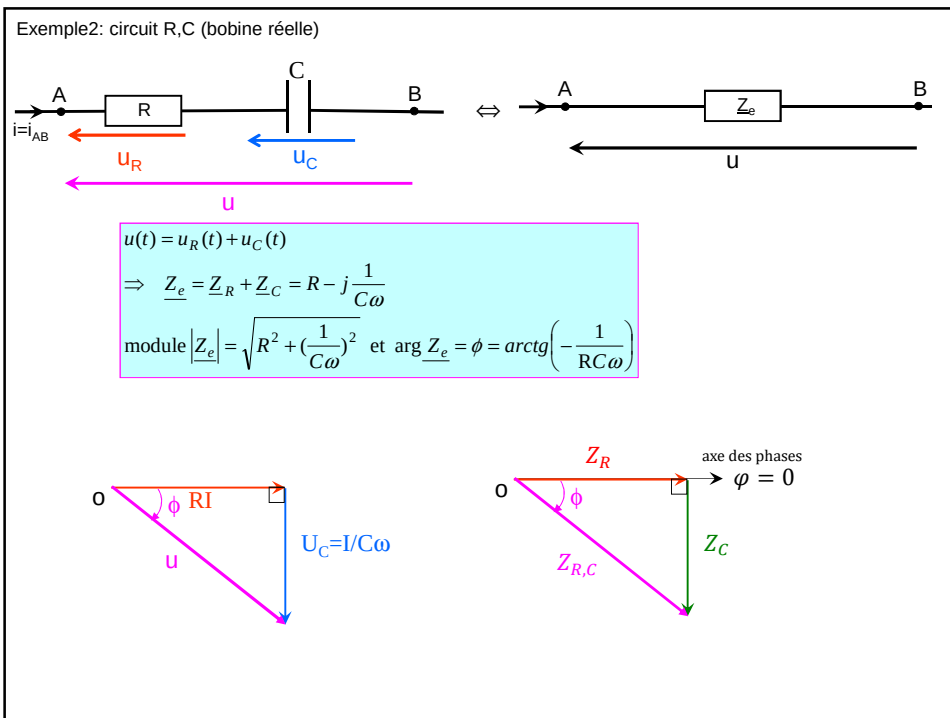
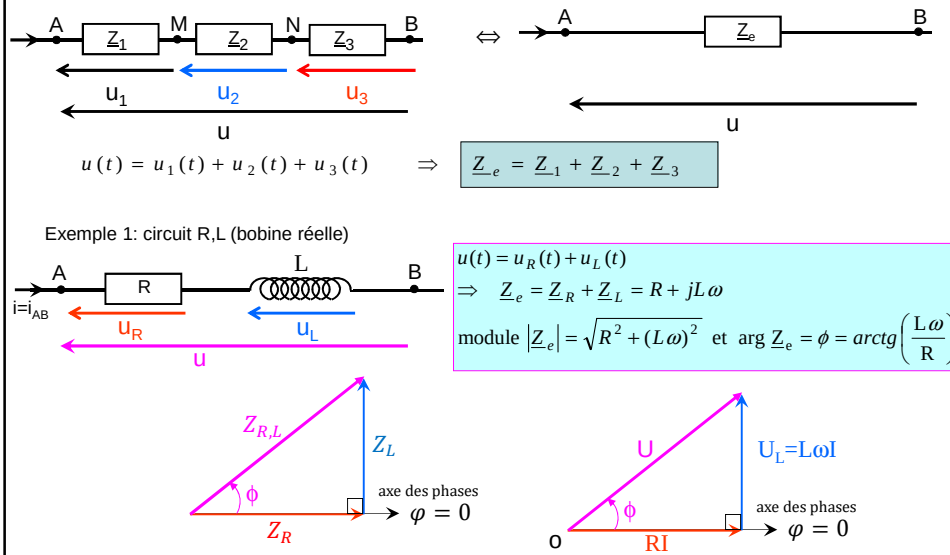
- impédance complexe

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} \angle -\frac{\pi}{2} \quad \text{module} : |\underline{Z}_C| = \frac{1}{C\omega} \quad \text{et} \quad \arg = \phi = -\frac{\pi}{2}$$

2.3 Association d'impédances complexes

2.3.1 Association d'impédances en série

2.3.1.1 impédance complexe équivalente

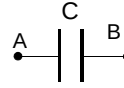


Exercices d'applications

$$f = 150 \text{ Hz} \quad C = 530,5 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\text{module : } |Z_C| = Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{530,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 150} = 1,99999 \approx 2 \text{ } \Omega$$

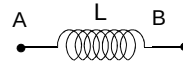
$$Z_C = -\frac{j}{C\omega} = -2j$$



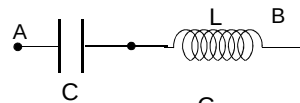
$$f = 150 \text{ Hz} \quad L = 23,34 \text{ mH}$$

$$\text{module : } |Z_L| = Z_L = L\omega = 23,34 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 150 = 21,997 \approx 22 \text{ } \Omega$$

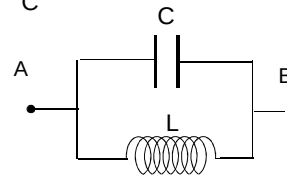
$$Z_L = jL\omega = 22j$$



$$Z_{AB} = Z_C + Z_L = -2j + 22j = 20j$$

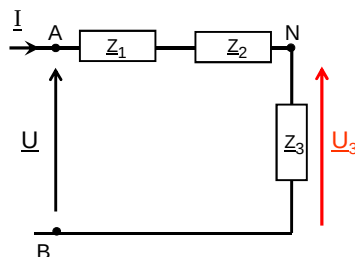


$$Z_{AB} = \frac{Z_C \cdot Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{-2j \cdot 22j}{20j} = -2,2j$$



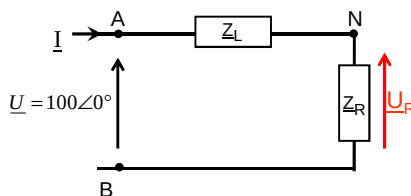
2.3.1.2 Diviseur de tension, utilisation des "phaseurs"

Cas de 3 impédances Z_1, Z_2, Z_3 en série



$$\underline{U}_3 = Z_3 \underline{I} = \underline{U} \left(\frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \right)$$

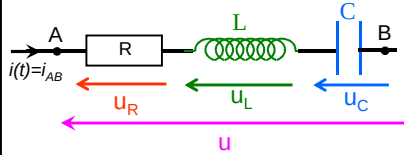
Exemple Calculer $\underline{U}_R$ dans le cas du circuit (R,L)



$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= Z_R \underline{I} = \underline{U} \left(\frac{Z_R}{Z_R + Z_L} \right) = \underline{U} \left(\frac{R}{R + jL\omega} \right) \\ \underline{U}_R &= \underline{U} \left(\frac{R(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} \right) = \underline{U} \left(\frac{R^2 - jL\omega R}{R^2 + L^2\omega^2} \right) \\ |\underline{U}_R| &= |\underline{U}| \frac{R\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{R^2 + L^2\omega^2} = |\underline{U}| \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \arg = \arctan\left(-\frac{L\omega}{R}\right) \\ R &= 30\Omega, \quad L\omega = 40\Omega \\ |\underline{U}_R| &= 100 \frac{30}{\sqrt{2500}} = 60 \quad \text{et} \quad \arg = \arctan\left(-\frac{40}{30}\right) \Rightarrow \phi = -59^\circ \\ \underline{U}_R &= 60V \angle -59^\circ \end{aligned}$$

2.3.1.3 Circuit résonant série (R,L,C)

Soit un circuit série (RLC) traversé par un courant variable alternatif $i(t)$



on suppose que le courant $i(t)$ à pour expression :
 $i(t) = I \sqrt{2} \cos \omega t$

Par application de la 2^e loi de Kirchhoff aux dipôles R, L et C en série on a : $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

Toutes ces tensions sont sinusoïdales et auront pour expression :

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_U) \quad u_R(t) = U_R\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_R) \quad u_L(t) = U_L\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_L) \quad u_C(t) = U_C\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_C)$$

En représentation complexe :

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U} = U e^{j\varphi_U} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U \text{ et de la phase } \varphi_U)$$

$$u_R(t) = \underline{U}_R \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_R = U_R e^{j\varphi_R} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U_R \text{ et de la phase } \varphi_R)$$

$$u_L(t) = \underline{U}_L \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_L = U_L e^{j\varphi_L} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U_L \text{ et de la phase } \varphi_L)$$

$$u_C(t) = \underline{U}_C \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_C = U_C e^{j\varphi_C} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } U_C \text{ et de la phase } \varphi_C)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_R(t) + \underline{u}_L(t) + \underline{u}_C(t) \Leftrightarrow \underline{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} = \underline{U}_R \sqrt{2} e^{j\omega t} + \underline{U}_L \sqrt{2} e^{j\omega t} + \underline{U}_C \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} = (\underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C) \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

Pour le courant électrique en représentation complexe on a :

$$i(t) = I \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad I = I e^{j0} \quad (\text{AEC composée de la valeur efficace } I \text{ et de la phase à l'origine } \varphi_I = 0)$$

On a vu d'autre part qu'en représentation complexe, le rapport tension/courant définissait la notion d'impédance Z

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}_R}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}_R \sqrt{2} e^{j\omega t}}{I \sqrt{2} e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U}_R}{I} \quad \text{Il en sera de même pour : } \underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{I} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{I}$$

En remplaçant dans l'équation précédente :

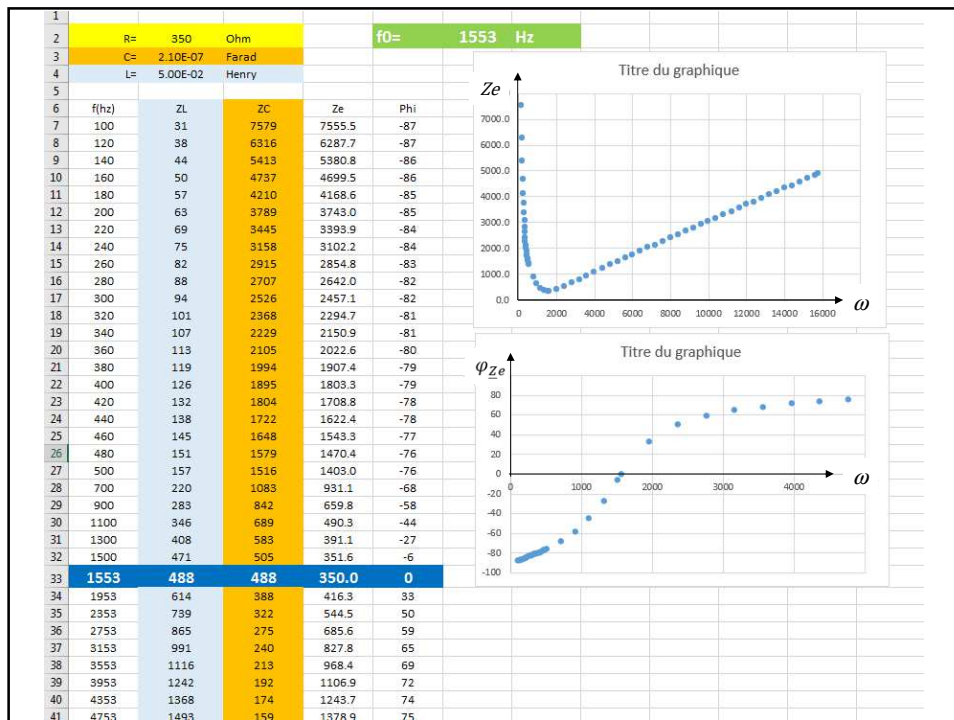
$$\underline{U} = \underline{Z}_R I + \underline{Z}_L I + \underline{Z}_C I = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) I \Leftrightarrow \frac{\underline{U}}{I} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \underline{Z}_e \quad \text{où } \underline{Z}_e \text{ est l'impédance équivalente}$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \Rightarrow \underline{Z}_e = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$\text{module} \quad |\underline{Z}_e| = Z_e = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad \text{et} \quad \arg \underline{Z}_e = \varphi_{Z_e} = \arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right) \quad \text{pour la phase}$$

En faisant varier la fréquence f du générateur de tension donc de ω , le module de l'impédance Z_e devient une fonction de ω

Traçons avec EXCEL l'évolution du module de $\underline{Z}_e$ et de la phase φ_{Z_e} en fonction de la fréquence f (ou ω) du générateur alimentant le circuit



module $|Z_e| = Z_e = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ et $\arg Z_e = \varphi_{Ze} = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$ pour la phase

il existe donc une fréquence f_0 ou bien une pulsation ω_0 pour laquelle on a :

$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ c'est à dire $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ ou bien $LC\omega_0^2 = 1$

• Résonance

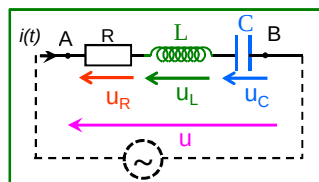
$LC\omega_0^2 = 1$ Z_e est minimum : $Z_e = R$

$U = Z_e I$ et Z_e est minimum $\rightarrow I$ est maximum

$U = RI$

$U_L = L\omega_0 I$

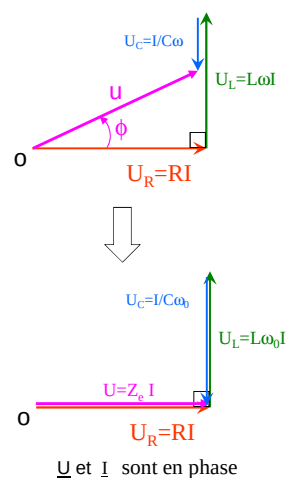
$U_C = \frac{I}{C\omega_0}$



$U_L = U_C \rightarrow$ Il y a **surtension** au borne de L et C

$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

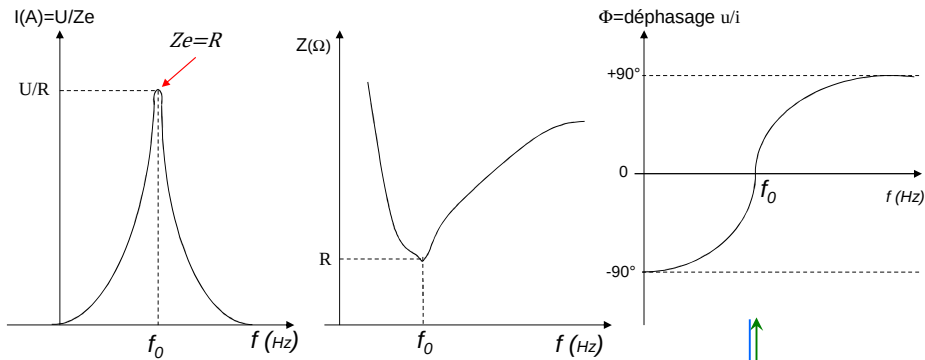
Q est le coefficient de surtention



- Etude de la résonance par variation de la fréquence f ($\omega=2\pi f$)

En résumé

Résonance pour f_0 : $LC\omega^2 = 4\pi^2 LC f_0^2 = 1$



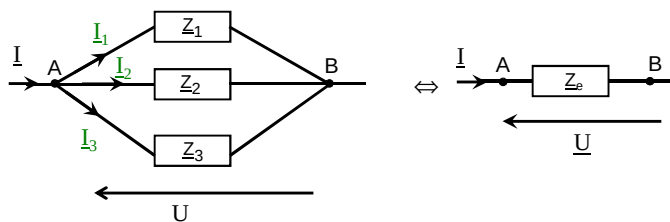
Exemple: $R=10\Omega$; $L=1H$; $C=10\mu F$. Calculer ω_0 , f_0 et Q ?

$$LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 316,22 \text{ et } f_0 = 50,33 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} = 31,62$$

2.3.2 Association d'impédances en parallèle

2.3.2.1 Admittances complexes équivalentes



Application de la 1^{ère} loi de Kirchhoff

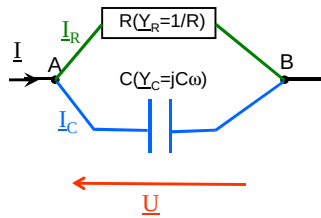
$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{et} \quad U = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = Z_3 I_3 = Z_e I$$

$$I = \frac{U}{Z_e} = Y_e U \quad \text{et} \quad I_1 \frac{U}{Z_1} = Y_1 U \quad I_2 \frac{U}{Z_2} = Y_2 U \quad I_3 \frac{U}{Z_3} = Y_3 U$$

$$I = \frac{U}{Z_e} = \frac{U}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} + \frac{U}{Z_3} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) U = (Y_1 + Y_2 + Y_3) U = Y_e U$$

avec $Y_e = Y_1 + Y_2 + Y_3$ l'admittance équivalente au montage en dérivation

Exemple circuit (RC) parallèle

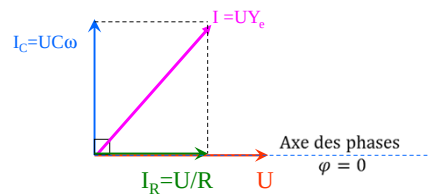


$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega$$

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{U} = j\underline{U}C\omega \text{ et } \underline{I}_R = \underline{Y}_R \underline{U} = \frac{\underline{U}}{R}$$

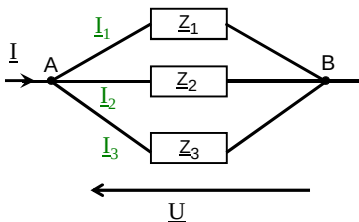
Remarque importante:

D'une manière générale, pour des dipôles montés en dérivation, on choisit presque toujours la tension (qui est commune) comme vecteur de référence (aligné avec l'axe $\varphi=0$) dans la représentation de Fresnel, pour déterminer les phases associées aux courants qui traversent ces dipôles.



2.3.2.2 diviseur de courant

Cas de 3 impédances Z_1, Z_2, Z_3 en parallèle



$$I_3 = Y_3 \underline{U} = I \left(\frac{Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \right)$$

Exemple : Donner l'expression de I_C dans le cas du circuit (R//C) ci-contre si celui-ci est parcouru par le courant $i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$.

En appliquant le diviseur de tension avec les admittances:

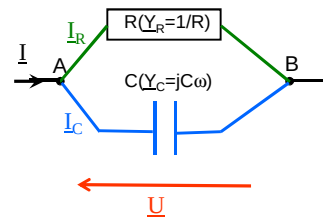
$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_C + \underline{Y}_R}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R}} = \underline{I} \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1} = \underline{I} \frac{(1 - jRC\omega) jRC\omega}{(RC\omega)^2 + 1}$$

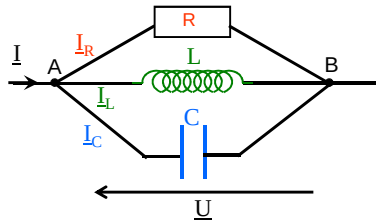
$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{RC\omega}{(RC\omega)^2 + 1} (RC\omega + j)$$

valeur efficace : $I_C = |\underline{I}_C| = |\underline{I}| \frac{RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \sqrt{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{I RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$

phase : $\varphi_C = \arctan \left(\frac{1}{RC\omega} \right)$



2.3.2.3 Circuit résonant parallèle (R,L,C)



$$u(t) = u_R(t) = u_L(t) = u_C(t)$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_e = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\text{module } |\underline{Y}_e| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \text{ et } \arg \underline{Y}_e = \phi = \arctan R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

• Résonance $LC\omega_0^2 = 1$

Y_e est minimum : $Y_e = 1/R$

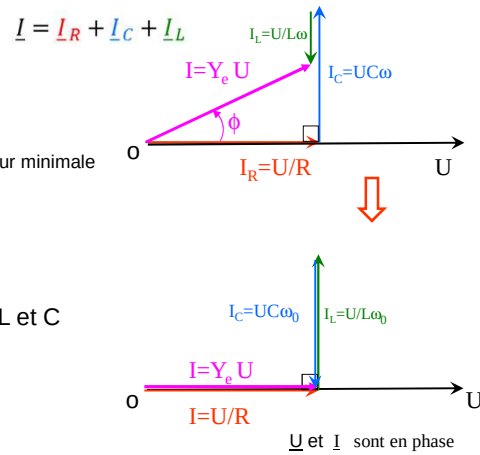
$I = Y_e U$ et $|Y_e|$ est minimum $\Rightarrow |I|$ prend une valeur minimale

$$I = I_R = \frac{U}{R} \quad I_L = \frac{U}{L\omega_0} \quad I_C = UC\omega_0$$

$I_L = I_C \Rightarrow$ il y a surintensité aux bornes de L et C

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} \Rightarrow Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0$$

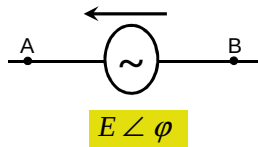
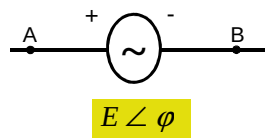
Q est le coefficient de surintensité



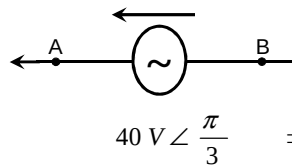
2.4 Générateurs sinusoïdaux

2.4.1 générateurs de tension

• Générateur de tension idéal (impédance interne nulle)



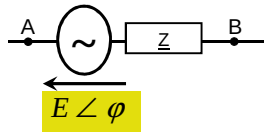
Exemple



Impose dans la branche entre A et B une tension :

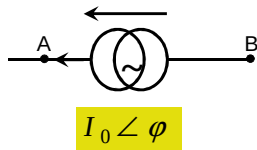
$$\Rightarrow e(t) = e_{AB}(t) = 40 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V}$$

- Générateur de tension réel (impédance interne non nulle)

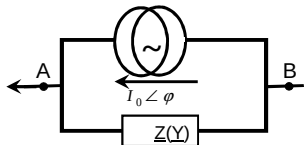


2.4.2 générateurs de COURANT

- Générateur de courant idéal (impédance interne nulle)



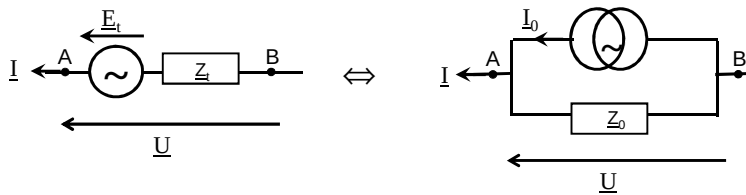
- Générateur de courant réel (impédance interne non nulle)



Impose dans la branche un courant :

$$i(t) = i_{BA}(t) = I_0 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi) \text{ A}$$

2.4.3 Dualité gén. de tension $\Leftrightarrow$ gén. de courant



$$g.t. \rightarrow g.c. \begin{cases} I_0 = \frac{E_t}{Z_t} \\ Z_0 = Z_t \end{cases}$$

$$g.c. \rightarrow g.t. \begin{cases} E_t = Z_0 \cdot I_0 \\ Z_t = Z_0 \end{cases}$$

2.5 Association dipôle actif et dipôle passif

2.5.1 puissance instantanée

Prenons $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi)$

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

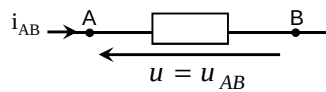
$$P(t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \phi) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) [\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi]$$

$$P(t) = U \cdot I \cdot [2 \cdot \cos^2 \omega t \cos \phi + 2 \cdot \cos \omega t \sin \omega t \sin \phi] = U \cdot I \cdot [(\cos 2\omega t + 1) \cos \phi + \sin 2\omega t \sin \phi]$$

$$P(t) = U \cdot I \cdot [\cos 2\omega t \cos \phi + \sin 2\omega t \sin \phi + \cos \phi] = U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi]$$

$$P(t) = \underbrace{U \cdot I \cdot \cos \phi}_{\text{Puissance active}} + \underbrace{U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \phi)}_{\text{Puissance fluctuante}}$$

2.5.2 puissance moyenne



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cdot i(t) dt = U \cdot I \cdot \cos \phi$$

Puissance active : $P = U I \cos \phi$ (W)
Puissance apparente : $P_a = U \cdot I$ (V.A)

Facteur de puissance : $\cos \phi$

Si le facteur de puissance est > 0 le dipôle est passif
Si le facteur de puissance est < 0 le dipôle est actif

Exemple:

Prenons $u(t) = 230\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et $i(t) = 18\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{10}\right)$
 $U = 230 \text{ V}$ $I = 18 \text{ A}$ $\cos \phi = 0,8 \Rightarrow P(t) = U \cdot I \cdot \cos \phi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \phi)$
 $P(t) \text{ max} : U \cdot I \cdot \cos \phi + U \cdot I = 7,45 \text{ kW}$
 $P(t) \text{ min} : U \cdot I \cdot \cos \phi - U \cdot I = -0,82 \text{ kW}$
 Avec une puissance moyenne $= 3,3 \text{ kW} = U \cdot I \cdot \cos \phi$

2.5.3 puissance complexe

Prenons

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{U} = Ue^{j\varphi} \text{ et } i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow \underline{I} = Ie^{j0} = I$$

$$\underline{P} = \underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot \cos\varphi + j U \cdot I \cdot \sin\varphi = P + jQ$$

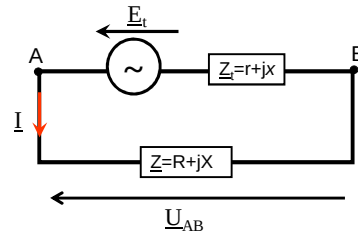
$S = U \cdot I$ puissance apparente (VA : Volt – Ampère)

$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ puissance active (W : Watt)

$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$ puissance réactive (VAR : Volt Ampère Réactif)

2.5.4 adaptation d'impédance

Puissance mise en jeu dans le dipôle AB d'impédance $\underline{Z}$



$$\underline{P} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_{AB}^*$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_t} \underline{E}_t \quad \text{et} \quad \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{Z} + \underline{Z}_t}$$

$$P = \left[\frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_t} \underline{E}_t \right] \cdot \left[\frac{\underline{E}_t^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_t^*} \right] = \frac{\underline{Z}}{(\underline{Z} + \underline{Z}_t)^2} E_t^2$$

$$P_{active} = \text{Re}(P)$$

$$\text{On montre que : } P_a = E_t^2 \left[\frac{R}{(R + r)^2 + (X + x)^2} \right]$$

$$P_a \text{ max pour : } X \rightarrow x \text{ et } R \rightarrow r \text{ c'est à dire } \underline{Z} \rightarrow \underline{Z}_t$$

3. Analyse de circuits en régime sinusoïdal

3.1. Généralités

Toutes les méthodes d'analyse vues dans le cas des circuits en courant continu sont transposables avec les notations complexes.

Le retour aux "significations physiques" se fait par :

modules $\Rightarrow$ valeurs efficaces
arguments $\Rightarrow$ déphasages relatifs

3.2. Méthode des mailles – méthode des noeuds

3.2.1 Méthode des mailles

b-n+1 = 2 équations $\rightarrow$ 2 mailles

$$m(1): \underline{E}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{E}_1 - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_C) \underline{I}_1 + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_C) \underline{I}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10 - (6 - 2j) \underline{I}_1 + (4 - 2j) \underline{I}_2 = 0$$

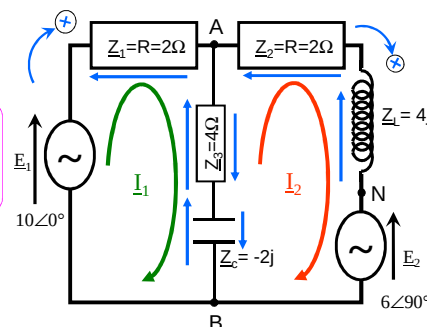
$$m(2): -\underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2 - \underline{E}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_1 - \underline{Z}_3 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \underline{Z}_3) \underline{I}_2 - \underline{E}_2 + (\underline{Z}_C + \underline{Z}_3) \underline{I}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(6 + 2j) \underline{I}_2 - 6j + (4 - 2j) \underline{I}_1 = 0$$

$$\begin{cases} (6 - 2j) \underline{I}_1 - (4 - 2j) \underline{I}_2 = 10 \\ (4 - 2j) \underline{I}_1 - (6 + 2j) \underline{I}_2 = 6j \end{cases}$$

Exemple de circuit



Résolution du système d'équations par la méthode de combinaison (préférable à la substitution car plus de calculs)

$$\begin{cases} (6-2j) I_1 - (4-2j) I_2 = 10 & \times (6+2j) \\ (4-2j) I_1 - (6+2j) I_2 = 6j & \times (4-2j) \end{cases} \quad \text{On multiplie les 2 équations pour éliminer } I_2$$

Il vient en faisant la somme membre à membre :

$$(6-2j)(6+2j)I_1 - (4-2j)(4-2j)I_1 = 10(6+2j) - 6j(4-2j)$$

$$28I_1 + 16jI_1 = 48 - 4j \Leftrightarrow (7-4j)I_1 = 12 - 11j$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{12-j}{(7+4j)} = \frac{(12-j)(7-4j)}{(7+4j)(7-4j)} = \frac{80-55j}{65} = \frac{16-11j}{13} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{16-11j}{13}}$$

Détermination de la valeur efficace I_1 et de la phase du courant I_1

valeur efficace : $I_1 = |I_1| = \frac{\sqrt{16^2 + 11^2}}{13} = 1,493 \text{ A}$

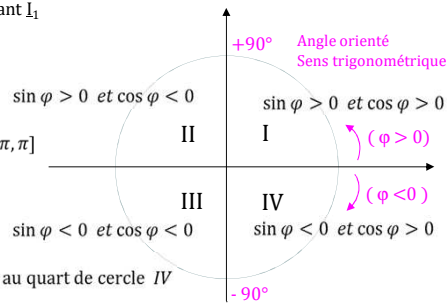
Pour la phase φ :

$$I_1 = \frac{16}{13} - j \frac{11}{13} = I_1 e^{j\varphi} = I_1 (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \text{avec } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$\Leftrightarrow (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{\frac{16}{13} - j \frac{11}{13}}{I_1} = \frac{16 - j11}{\sqrt{16^2 + 11^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{16}{\sqrt{16^2 + 11^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{-11}{\sqrt{16^2 + 11^2}} \Rightarrow \varphi \in \text{au quart de cercle IV}$$

et $\tan \varphi = \frac{-11}{16} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{11}{16}\right) = -34,51^\circ$ donc $\varphi \in$ bien au quart de cercle IV



on obtient finalement : $I_1 = 1,493 \text{ A} \angle -34,51^\circ$

Expression temporelle du courant I_1 : $i_1(t) = 1,493 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{34,51}{180} \pi\right)$

En remplaçant $I_1 = \frac{16-11j}{13}$ dans le système d'équation, on obtient pour I_2

$$I_2 = \frac{-7-126j}{65}$$

valeur efficace : $I_2 = |I_2| = \frac{\sqrt{7^2 + 126^2}}{65} = 1,94 \text{ A}$

Pour la phase φ :

$$I_2 = \frac{-7}{65} - j \frac{126}{65} = I_2 e^{j\varphi} = I_2 (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\Leftrightarrow (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{\frac{-7}{65} - j \frac{126}{65}}{I_2} = \frac{-7 - j126}{\sqrt{7^2 + 126^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-7}{\sqrt{7^2 + 126^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{-126}{\sqrt{7^2 + 126^2}} \Rightarrow \varphi \in \text{au quart de cercle III}$$

et $\tan \varphi = \frac{-126}{-7} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{126}{7}\right) = 86,82^\circ$ donc $\varphi \in$ au quart de cercle I mais la fonction tangente admet deux solutions $86,82^\circ$ et $(86,82^\circ - 180^\circ)$ puisque $\tan \varphi = \tan(\pi - \varphi)$

La solution à retenir est donc $\varphi = -93,18^\circ$ ce qui vérifie bien $\varphi \in$ au quartier III

on obtient finalement : $I_2 = 1,94 \text{ A} \angle -93,18^\circ$ $i_2(t) = 1,94 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{93,18}{180} \pi\right)$

Pour le courant dans la branche centrale

$$I_{AB} = I_1 - I_2 = \frac{16 - 11j}{13} - \frac{-7 - 126j}{65} = \frac{87 + j 71}{65}$$

valeur efficace : $I_{AB} = |I_{AB}| = \frac{\sqrt{87^2 + 71^2}}{65} = 1,73 \text{ A}$

Pour la phase φ :

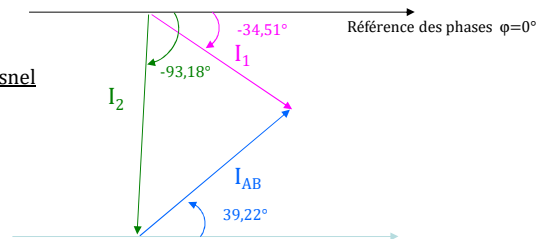
$$I_{AB} = \frac{87}{65} + j \frac{71}{65} = I_{AB} e^{j\varphi} = I_{AB} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow \varphi \in \text{au quartier I}$$

et $\tan \varphi = \frac{71}{87} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{71}{87}\right) = 39,22^\circ$ donc $\varphi \in \text{au quartier I}$

on obtient finalement : $I_{AB} = 1,73 \text{ A} \angle 39,22^\circ$

Expression temporelle du courant I_1 : $i_{AB}(t) = 1,73 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{39,22}{180} \pi\right)$

Diagramme de Fresnel



3.2.2 Méthode des noeuds

Au noeud A:

$$\frac{E_1 + V_B - V_A}{Z_1} + \frac{V_B - V_A}{Z_3 + Z_C} + \frac{E_2 + V_B - V_A}{Z_2 + Z_L} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 + \frac{U_{BA}}{2}}{2} + \frac{\frac{U_{BA}}{4} + \frac{U_{BA}}{2}}{4 - 2j} + \frac{6j + \frac{U_{BA}}{2}}{2 + 4j} = 0$$

$$\Leftrightarrow U_{BA} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 - 2j} + \frac{1}{2 + 4j} \right) = -5 - \frac{6j}{2 + 4j}$$

$$\Leftrightarrow U_{BA} \left(1 + \frac{1}{2 - j} + \frac{1}{1 + 2j} \right) \frac{1}{2} = -5 - \left(\frac{6j}{1 + 2j} \right) \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow U_{BA} \left(1 + \frac{2 + j}{5} + \frac{1 - 2j}{5} \right) = -10 - \left(\frac{12 + 6j}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow U_{BA} (8 - j) = -(62 + 6j) \Rightarrow \boxed{U_{BA} = -\frac{2}{13} (49 + 11j)}$$

$$U_{BA} = 7,726 \text{ V} \angle -167,35^\circ$$

valeur efficace : $U_{BA} = |U_{BA}| = \frac{2 \sqrt{49^2 + 11^2}}{13} = 7,726 \text{ V}$

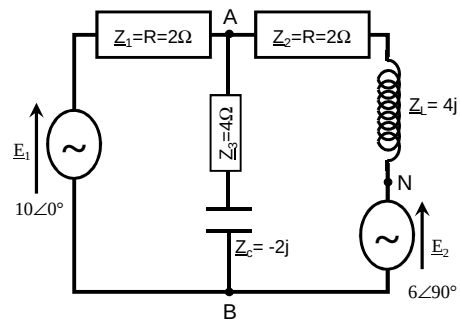
Pour la phase φ :

$$U_{BA} = -\frac{98}{13} - j \frac{22}{13} = U_{BA} e^{j\varphi} = U_{BA} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow \varphi \in \text{au quart de cercle III}$$

et $\tan \varphi = \frac{-22}{-98} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{22}{98}\right) = 12,65^\circ$ donc $\varphi \in \text{au quart de cercle I}$ mais la fonction tangente admet deux solutions $12,65^\circ$ et $(12,65^\circ - 180^\circ)$ puisque $\tan \varphi = \tan(\pi - \varphi)$

La solution à retenir est donc $\varphi = -167,34^\circ$ ce qui vérifie bien $\varphi \in \text{au quart de cercle III}$

Exemple de circuit



En revenant à chaque courant de branche

$$I_1 = \frac{1}{2} [10 + \underline{U}_{BA}] = \frac{16 - j11}{13} \Rightarrow I_1 = 1,49A \text{ et } \arctan\left(-\frac{11}{16}\right) = -34,51^\circ$$

$$I_2 = \frac{1}{2 + 4j} [6j + \underline{U}_{BA}] = \frac{7 + j126}{65} \Rightarrow I_2 = 1,94A \text{ et } \arctan\left(\frac{126}{7}\right) = 86,82^\circ$$

$$I = \frac{1}{4 - 2j} [\underline{U}_{BA}] = -\frac{87 + j71}{65} \Rightarrow I = 1,73A \text{ et } \arctan\left(\frac{-71}{-87}\right) = -140,78^\circ$$

Remarque

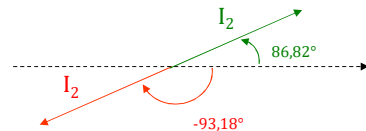
Le courant déterminé précédemment pour la branche du milieu et celle de droite va de A vers B or ici l'application de la méthode des nœuds exige, par convention, que tous les courants arrivent au nœud A d'où la présence du signe moins.

Pour le courant dans la branche de droite :

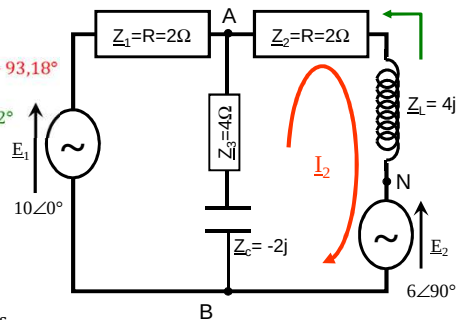
par la méthode des mailles : $I_2 = -\frac{7 + 126j}{65} = 1,94 A \angle -93,18^\circ$

par la méthode des nœuds : $I_2 = \frac{7 + j126}{65} = 1,94 A \angle 86,82^\circ$

La somme des deux angles en valeur absolue est égale à 180°



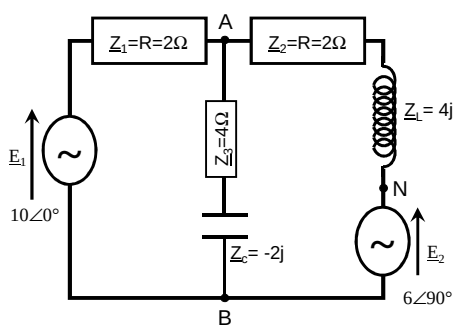
Cela correspond simplement à un changement de sens



3.3. Théorème de Thévenin et Norton

3.3.1 Théorème de Thévenin

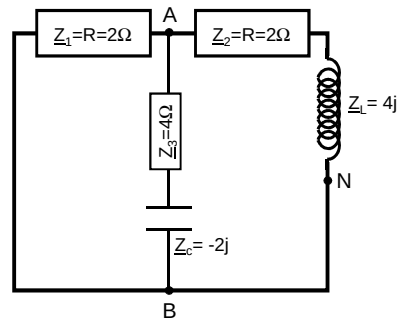
Détermination du générateur de Thévenin équivalent entre A et B



Calcul de E_{TH}

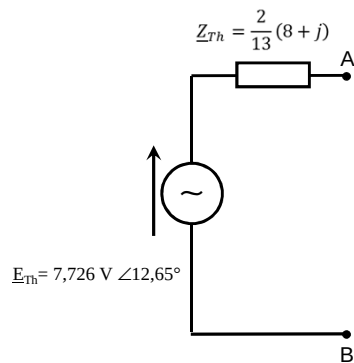
$$E_{TH} = \underline{V}_{AB} = 2 \left[\frac{49 + 11j}{13} \right] = 7,726V \angle 12^\circ,65$$

$$\Rightarrow e_{TH}(t) = 7,726\sqrt{2} \cos(\omega t + 12^\circ,65)$$



$$\frac{1}{Z_{TH}} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4 - 2j} + \frac{1}{2 + 4j} \right]$$

$$\Rightarrow Z_{TH} = 2 \left[\frac{8 + j}{13} \right]$$



Générateur de Thévenin équivalent entre A et B.

Remarque

On aurait pu écrire l'impédance du générateur de Thévenin en polaire ou exponentielle, ou encore en notation phaseur à partir de sa forme cartésienne :

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{2}{13}(8 + j) = Z_{Th} e^{i\varphi_{Th}} \quad Z_{Th} = |\underline{Z}_{Th}| = \frac{2}{13}\sqrt{65} \quad \text{et} \quad \varphi_{Th} = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = 7,125^\circ$$

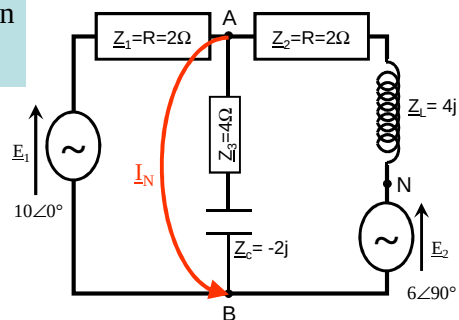
$$\underline{Z}_{Th} = \frac{2}{13}\sqrt{65} e^{j\frac{7,125}{180}\pi}$$

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{2}{13}\sqrt{65} \angle 7,125^\circ$$

3.3.2 Théorème de Norton

impédance du générateur de Norton

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_{TH}$$

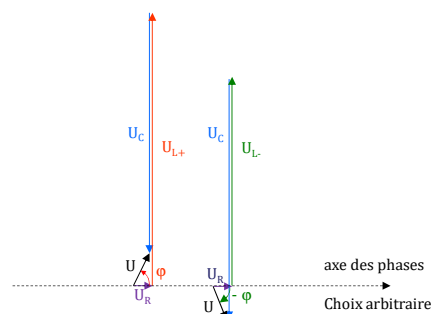
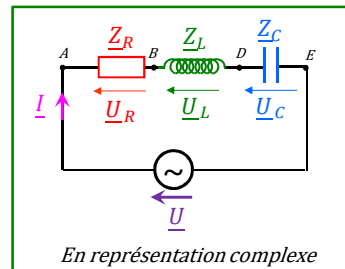
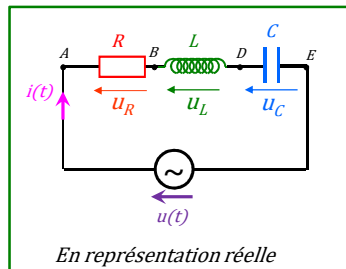


Calcul de $\underline{I}_N$ courant de "court - circuit"

Au nœud A : $\frac{10}{2} + \frac{6j}{2+4j} - \underline{I}_N = 0$

$$\underline{I}_N = \frac{5 + 13j}{1 + 2j} = \frac{31 + 3j}{5} = 6,23 \text{ A } \angle 5,53^\circ$$

$$i_N(t) = 6,23 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{5,53\pi}{180}\right)$$



En valeur absolue les longueurs sont égales :
 $|U_C - U_{L+}| = |U_C - U_{L-}|$

