

## 2- Méthodes d'analyse des circuits en courant continu

- 2.1 Méthode générale de résolution
- 2.2 Méthode des noeuds
- 2.3 théorème de Millman
- 2.4 Méthode des mailles
- 2.5 Théorème de superposition
- 2.6 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de tension: Théorème de Thévenin
- 2.7 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de courant: Théorème de Norton
- 2.8 Equivalence générateur de courant  $\leftrightarrow$  générateur de tension

### 2.1 Méthode générale de résolution

La résolution d'un réseau électrique (qu'on appelle aussi circuit ou encore montage), consiste à **déterminer l'intensité des courants** qui circulent dans chacune des branches et les **tensions** entre les différents nœuds qui le compose.

On considère un réseau comportant  $n$  nœuds,  $b$  branches et  $m$  mailles.

A priori, l'étude d'un tel réseau devrait nous conduire à considérer :

- $n$  équations (lois des nœuds) appliquée à chaque nœud
- $b$  courants inconnus
- $m$  équations (lois des mailles) appliquée à chaque maille.

**Exemple 1** On considère un réseau de dipôles pour lequel on applique la loi de Kirchoff.

$n=3$

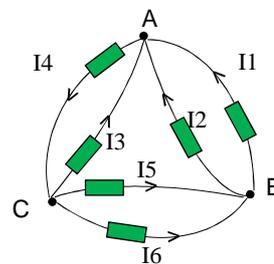
nœud A:  $I_1+I_2+I_3-I_4=0$  (1)

nœud B:  $-I_1-I_2+I_5+I_6=0$  (2)

nœud C:  $-I_3+I_4-I_5-I_6=0$  (3)

On peut montrer par combinaison linéaire, qu'on peut obtenir l'équ. (3) à partir de (1) et (2) ou bien (1) à partir de (2) et (3) ou bien (2) à partir de (1) et (3).

**En conclusion** : dans le système d'équations ci-dessus, il n'y a que **2 équations** linéairement indépendantes.



**Règle générale**  $n$  nœuds  $\Rightarrow n - 1$  équations aux nœuds indépendantes

**Exemple 2** On considère un réseau de dipôles pour lequel on applique la loi de Kircchoff (loi des mailles)

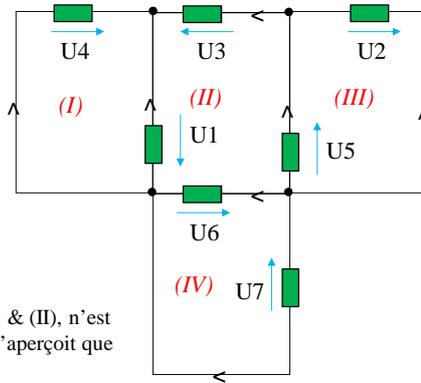
Nombre de mailles ?  
 $m=11$

(I) :  $-U4 - U1 = 0$   
 (II) :  $+U3 + U1 + U6 + U5 = 0$   
 (III) :  $-U2 - U5 = 0$   
 (IV) :  $-U6 + U7 = 0$

Autre maille, par exemple celle englobant (I) & (II)

(V) :  $+U3 - U4 + U6 + U5 = 0$

**Conclusion** : L'équation associée à la maille englobant (I) & (II), n'est pas linéairement indépendante. En fait, on s'aperçoit que le nombre d'équations se limite à 4.



**Règle générale** Pour un réseau (n,b)  $\Rightarrow b - n + 1$  équations aux mailles indépendantes

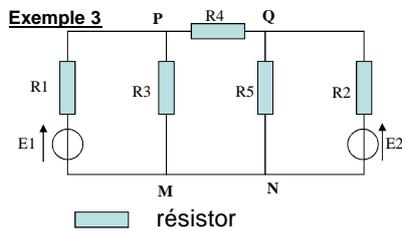
**Application**: cas de l'exemple 2 ci-dessus :

$n=4, b=7 \Rightarrow 7-4+1 = 4$  équations ou mailles

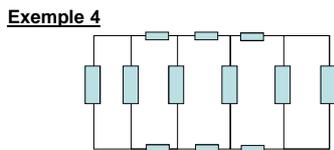
**En résumé :**

n nœuds  $\Rightarrow n - 1$  équations à résoudre  
 b branches  $\Rightarrow b - n + 1$  équations à résoudre

Les valeurs relatives de  $n - 1$  et  $b - n + 1$  indiquent la méthode qui conduit au plus petit nombre d'équations.



$n=3 \Rightarrow 2$  équations aux nœuds  
 $b=5 \Rightarrow 3$  équations aux mailles

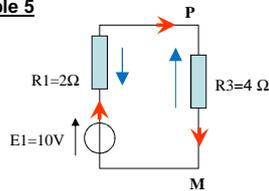


$n=8 \Rightarrow 7$  équations aux nœuds  
 $b=12 \Rightarrow 5$  équations aux mailles

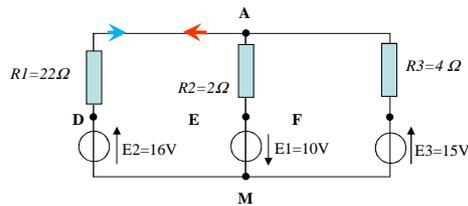
**Règle générale:** La résolution d'un réseau électrique, nécessite de commencer par :

- 1° orienter le sens de parcours des courants à travers les différentes branches
- 2° orienter les tensions en fonction de la nature des dipôles (actif ou passif).

**Exemple 5**



**Exemple 6**

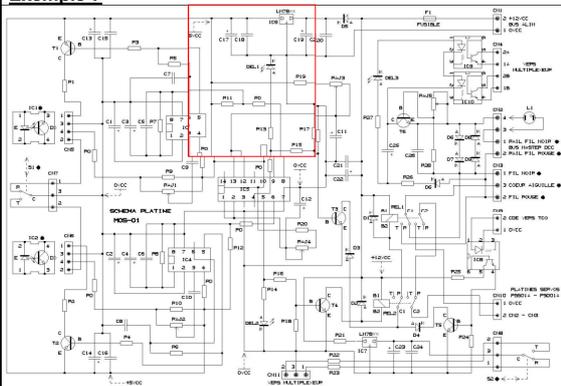


Intéressons nous par exemple à la branche A-D-M :

Dipôle R1 : Deux situations possibles :

Soit  $V_A - V_D > 0 \Rightarrow I_{AD}$  ou bien  $V_D - V_A > 0 \Rightarrow I_{DA}$

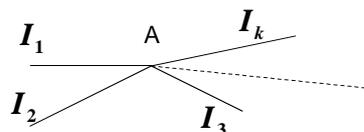
**Exemple 7**



Pour contourner la difficulté à définir le sens réel des courants dans un réseau complexe, on introduit la notion de courants algébriques, c'est-à-dire des courants avec des intensités calculées pouvant être positives ou négatives.

La loi des nœuds devient alors (pour N branches concourantes en A) :

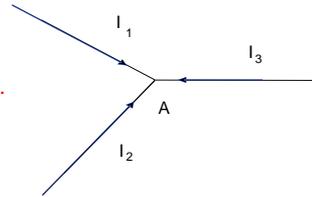
$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$



**Sens conventionnel des courants algébriques**

Pour écrire les équations aux nœuds ou loi des nœuds, on supposera que **TOUS les courants arrivent** sur le nœud.

Notation Algébrique :  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$



**Question :** Comment savoir dans la réalité, quels sont les courants qui arrivent et ceux qui partent ?

La détermination du sens réel des courants se déduit directement du signe de la valeur de l'intensité

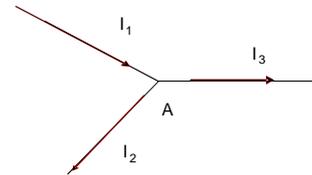
**Convention de signes:**

Tous les courants ayant une valeur numérique **positive arrivent** au nœud.  
Tous les courants ayant une valeur numérique **négative partent** du nœud.

Dans l'exemple du nœud ci-dessus, admettons qu'après résolution des équations on trouve :

$I_1 = 2A$ ,  $I_2 = -1,5A$  et  $I_3 = -0,5A$

On redessine le nœud avec le sens réel des courants.



**2.2 Méthode des noeuds**

➤ **Objet :** Détermination des n-1 **valeurs des potentiels** de noeuds à partir d'un système de n-1 équations aux noeuds

➤ **Expression d'un courant de branche**

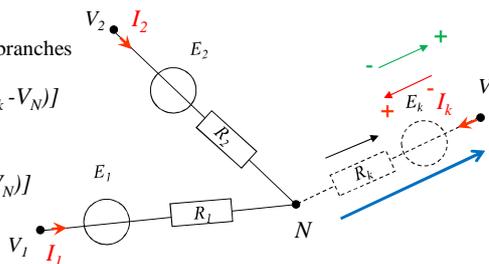
Soit un nœud N formé par la jonction de M branches

$V_k - V_N = R_k I_k - E_k \Rightarrow I_k = G_k [+ E_k + (V_k - V_N)]$

ou bien

$V_k - V_N = R_k I_k + E_k \Rightarrow I_k = G_k [- E_k + (V_k - V_N)]$

$G_k$  : conductance de la branche



En résumé :

$I_k = G_k [+ E_k + (V_k - V_N)]$

Règle:  $+ E_k$  si la borne  $+$  est tournée vers N  
 $- E_k$  si la borne  $-$  est tournée vers N

**Exemple**

$G_1[E_1 + (V_M - V_P)] + G_3[0 + (V_M - V_P)] + G_4[0 + (V_Q - V_P)] = 0$   
 Au nœud P:

$G_2[E_2 + (V_M - V_Q)] + G_5[V_M - V_Q] + G_4[V_P - V_Q] = 0$   
 Au nœud Q:

On introduit les valeurs des tensions et des résistances :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[10 + (V_M - V_P)] + \frac{1}{4}[V_M - V_P] + \frac{1}{2}[V_Q - V_P] = 0 \\ [18 + (V_M - V_Q)] + \frac{1}{6}[V_M - V_Q] + \frac{1}{2}[V_P - V_Q] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[10 + U_{MP}] + \frac{1}{4}U_{MP} + \frac{1}{2}U_{QP} = 0 \\ 18 + U_{MQ} + \frac{1}{6}U_{MQ} + \frac{1}{2}U_{PQ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 3U_{MP} + 2U_{QP} = 0 \\ 18 + \frac{7}{6}U_{MQ} + \frac{1}{2}U_{PQ} = 0 \end{cases}$$

$U_{MQ} = U_{MP} + U_{PQ}$

Méthode de substitution ou méthode de combinaison ?

$$\begin{cases} 20 + 3U_{MP} + 2U_{QP} = 0 \\ 18 + \frac{7}{6}U_{MP} + \frac{7}{6}U_{PQ} + \frac{1}{2}U_{PQ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 3U_{MP} + 2U_{QP} = 0 \\ 18 + \frac{7}{6}U_{MP} + \frac{10}{6}U_{PQ} = 0 \end{cases}$$

$\times -1/3$  Je veux éliminer  $U_{MP}$  en passant par la somme des deux équations membre à membre.  
 $\times 6/7$

$$\begin{cases} -\frac{20}{3} - U_{MP} - \frac{2}{3}U_{QP} = 0 \\ \frac{108}{7} + U_{MP} + \frac{10}{7}U_{PQ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{108}{7} - \frac{20}{3} + \left(\frac{10}{7} + \frac{2}{3}\right)U_{PQ} = 0 \Rightarrow \frac{44}{21}U_{PQ} = -\frac{184}{21}$$

$U_{PQ} = -\frac{184}{44} = -\frac{46}{11}V$  Soit :  $U_{QP} = \frac{46}{11}V$  Et en remplaçant dans l'équation :  $U_{MP} = -\frac{104}{11}V$

**Calcul des courants au nœud P**

$$I_1 = G_1[E_1 + (V_M - V_P)] = \frac{1}{2}\left[10 - \frac{104}{11}\right] = +\frac{3}{11}A$$

$$I_3 = G_3[V_M - V_P] = \frac{1}{4}\left[-\frac{104}{11}\right] = -\frac{26}{11}A$$

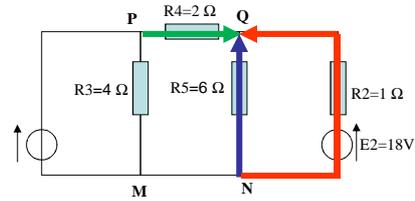
$$I_4 = G_4[V_Q - V_P] = \frac{1}{2}\left[\frac{46}{11}\right] = +\frac{23}{11}A$$

### Calcul des courants au nœud Q

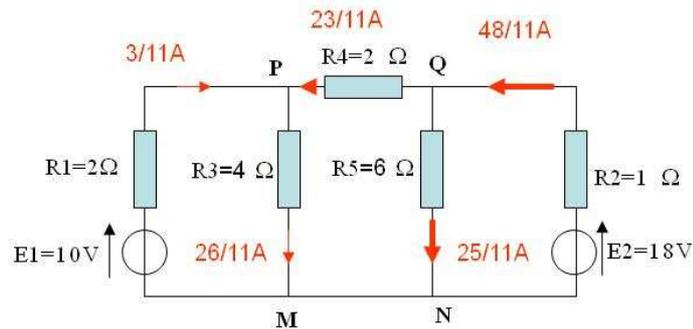
$$U_{QM} = U_{QP} + U_{PM} = \frac{46}{11} + \frac{104}{11} = \frac{150}{11} \text{ V}$$

$$I_2 = G_2 [E_2 + (V_M - V_Q)] = \frac{1}{1} \left[ 18 - \frac{150}{11} \right] = \frac{48}{11} \text{ A}$$

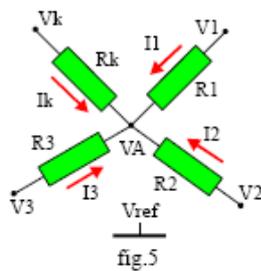
$$I_5 = G_5 [V_M - V_Q] = \frac{1}{6} \left[ -\frac{150}{11} \right] = -\frac{25}{11} \text{ A}$$



### Schéma récapitulatif



### 2.3 – Théorème de Millman



On considère un nœud A auquel aboutissent k branches ; les potentiels  $V_i$  des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence  $V_{ref}$  ;  $R_i$  est la résistance de la branche i et  $G_i$  sa conductance.

La loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_{i=1}^k I_i = I_1 + I_2 + \dots + I_k = 0$$

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \dots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

$$(V_1 - V_A).G_1 + (V_2 - V_A).G_2 + \dots + (V_k - V_A).G_k = 0$$

$$V_A \cdot \sum G_i = \sum V_i \cdot G_i$$

Le potentiel du point A par rapport à celui de la référence commune est :

$$V_A = \frac{\sum V_i \cdot G_i}{\sum G_i}$$

#### Remarques :

- Soit  $I_k$  le courant dans la branche k. Il peut être intéressant d'écrire le théorème de Millman sous la forme suivante :

$$V_A = -\frac{I_k + \sum_{i \neq k} V_i \cdot G_i}{\sum_{i \neq k} G_i}$$

## 2.4 Méthode des courants de mailles

➤ **Objet** : détermination des  $b-n+1$  **valeurs des intensités** indépendantes à partir d'un système de  $b-n+1$  équations aux mailles.

➤ Le long du circuit fermé d'une maille la somme des différences de potentiel est nulle:  $\sum U_i = 0$

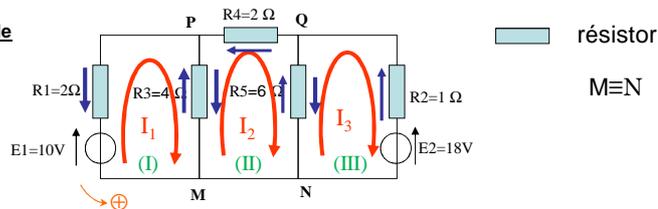
➤ Il faut choisir convenablement les mailles pour faire intervenir toutes les branches.

La méthode la plus rationnelle consiste à :

- choisir un courant et un sens de parcours de la maille étudiée (choix arbitraire).
- avec la convention de signe (courant, tension) dans un dipôle passif,
- la f.e.m d'un générateur est comptée avec le signe de la borne positive.

Si à l'issue du calcul, on obtient pour l'intensité du courant dans une branche, une valeur négative, cela signifie que le courant réel circule en sens opposé à celui arbitrairement choisi.

### Exemple



1° nombre de mailles à considérer :  $b-n+1 = 5-3+1 = 3$  mailles

2° Identification des mailles choisies

3° choix arbitraire des courants de maille

4° orientation des tensions de chaque dipôle

5° sens arbitraire de parcours de la maille

6° prêter attention aux branches appartenant à deux mailles juxtaposées

Dans cet exemple, les branches  $PM$  et  $QM$  sont traversées par les courants de maille  $(I_1, I_2)$  et  $(I_2, I_3)$  respectivement.

Dans la maille (I) :

$$R_1 \cdot I_1 - E_1 + R_3 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 = 0 \quad (1)$$

$$2 I_1 - 10 + 4 (I_1 - I_2) = 0 \quad (1)$$

$$6 I_1 - 4 I_2 = 10 \quad (1)$$

Dans la maille (II) :

$$R_4 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_1 + R_5 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_3 = 0 \quad (2)$$

$$2 \cdot I_2 + 4 \cdot I_2 - 4 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 - 6 \cdot I_3 = 0 \quad (2)$$

$$-4 I_1 + 12 \cdot I_2 - 6 I_3 = 0 \quad (2)$$

**Exemple**

$R_1=2\Omega$     $R_3=4\Omega$     $R_4=2\Omega$     $R_5=6\Omega$     $R_2=1\Omega$   
 $E_1=10V$     $E_2=18V$

Dans la maille (III) :  
 $R_5 \cdot I_3 - R_5 \cdot I_2 + E_2 + R_2 \cdot I_3 = 0$  (3)  
 $6 \cdot I_3 - 6 \cdot I_2 + 18 + 1 \cdot I_3 = 0$  (3)  
 $-6I_2 + 7I_3 = -18$  (3)

$$\begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 10 & (1) \\ -4I_1 + 12I_2 - 6I_3 = 0 & (2) \\ -6I_2 + 7I_3 = -18 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3I_1 - 2I_2 = 5 & (1) \times 2 \\ -2I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0 & (2) \times 3 \\ -6I_2 + 7I_3 = -18 & (3) \end{cases}$$

*(1)+(2) M à M*

$$\begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 10 & (1) \\ -6I_1 + 18I_2 - 9I_3 = 0 & (2) \\ -6I_2 + 7I_3 = -18 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14I_2 - 9I_3 = 10 & \times 7 \\ -6I_2 + 7I_3 = -18 & \times 9 \end{cases} \Leftrightarrow (14 \cdot 7 - 6 \cdot 9) \cdot I_2 = 70 - 18 \cdot 9$$

$I_2 = \frac{-92}{44} = -\frac{23}{11} A$  (1)  $\Rightarrow I_1 = 3/11A$  et (3)  $\Rightarrow I_3 = -48/11A$

**Exemple**

$R_1=2\Omega$     $R_3=4\Omega$     $R_4=2\Omega$     $R_5=6\Omega$     $R_2=1\Omega$   
 $E_1=10V$     $E_2=18V$

$I_1 = 3/11A$     $I_2 = -\frac{23}{11}A$    et    $I_3 = -48/11A$

**Schéma récapitulatif**

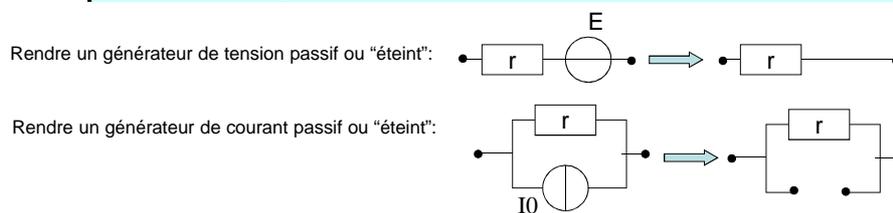
## 2.5 Théorème de superposition

Ce théorème découle directement de la linéarité des équations de Kirchhoff : un dipôle constitué de dipôles linéaires est un dipôle linéaire. Dans un réseau linéaire, il est possible de remplacer un ensemble de dipôles par un dipôle équivalent. La relation (6) montre que le courant  $I_j$  dans une branche est la somme de termes de la forme  $G_j^k \cdot U_k$ , les  $G_j^k$  ayant la dimension d'une conductance.

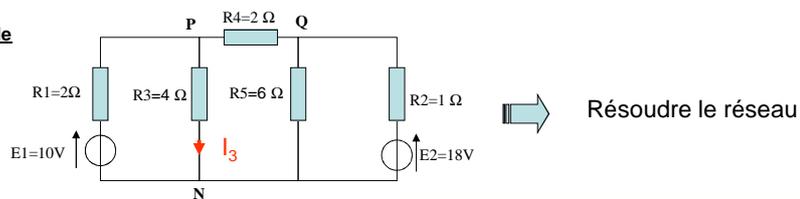
$$I_j = \sum_{i=1}^M G_j^i \cdot U_i \quad (6)$$



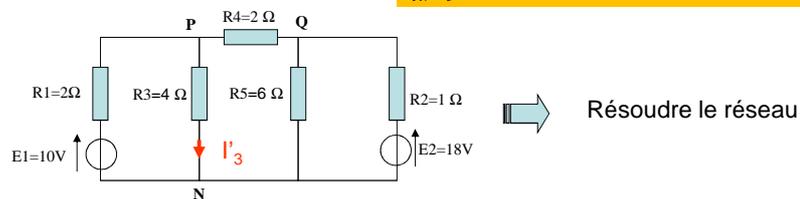
L'intensité du courant dans une branche d'un réseau comprenant plusieurs générateurs est la somme des intensités, que ferait passer, dans cette branche, chaque générateur considéré isolément comme actif, les autres générateurs du réseau étant alors passifs.



### Exemple



Par la méthode des nœuds ou des mailles on trouve :  
 $I_{PN} = I_3 = 25/22 \text{ A}$



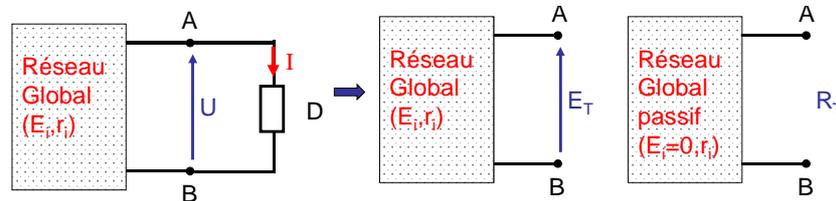
Par la méthode des nœuds ou des mailles on trouve :  
 $I_{PN} = I'_3 = 27/22 \text{ A}$

Le courant total dans la branche PN est la somme algébrique :

$$I_{PN} = I_3 + I'_3 = 25/22 + 27/22 = 52/22 = 26/11 \text{ A}$$

## 2.6 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de tension: Théorème de Thévenin

On considère un réseau comprenant des dipôles actifs et passifs et on s'intéresse au fonctionnement d'un dipôle D particulier. Il est traversé par un courant I et la d.d.p. entre ses bornes est U.



Supposons que D soit isolé du reste du réseau. Si ce reste de réseau est actif, la f.e.m. mesurée entre A et B vaut  $E_T$  : c'est la tension en circuit ouvert. S'il est rendu passif c'est-à-dire si les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes, la résistance mesurée entre A et B vaut  $R_T$ . On remplace D par une source de tension idéale de f.e.m. U. D'après le théorème de superposition, le fonctionnement du circuit est inchangé. Le courant I est la superposition d'un courant  $I_P$  correspondant à la passivation de toutes les sources autres que U et d'un courant  $I_A$  où seule la source U est passivée :  $I = I_P + I_A$

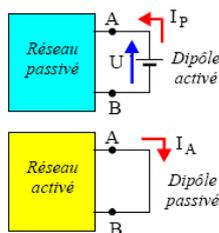


Fig. 6

– Si le générateur qui remplace D est seul à être actif le reste du réseau est équivalent à  $R_T$  :  $I_P = -U/R_T$

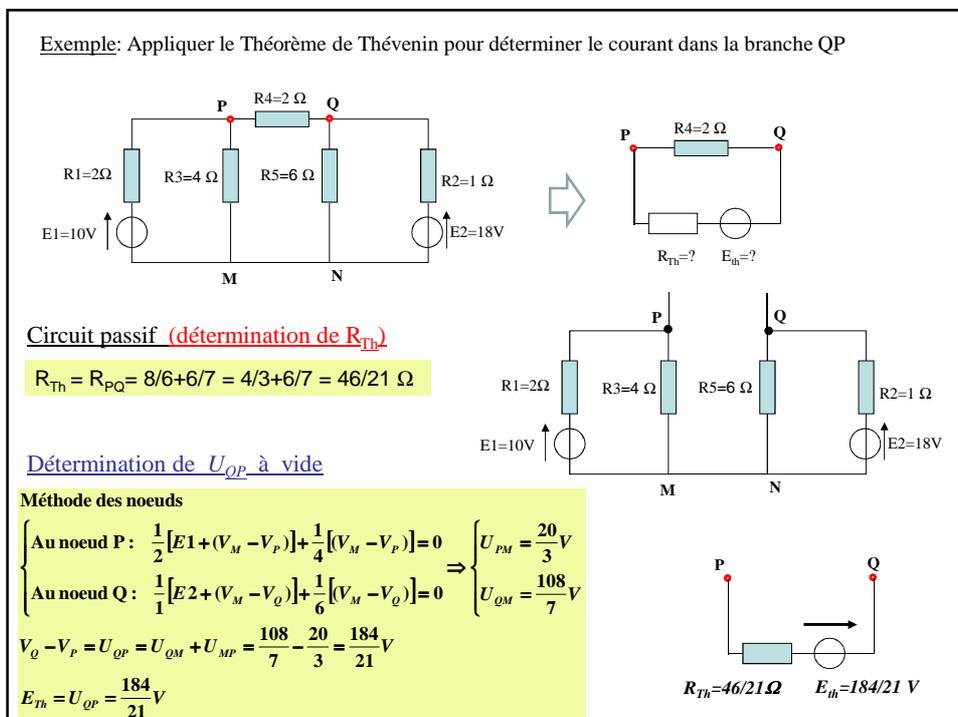
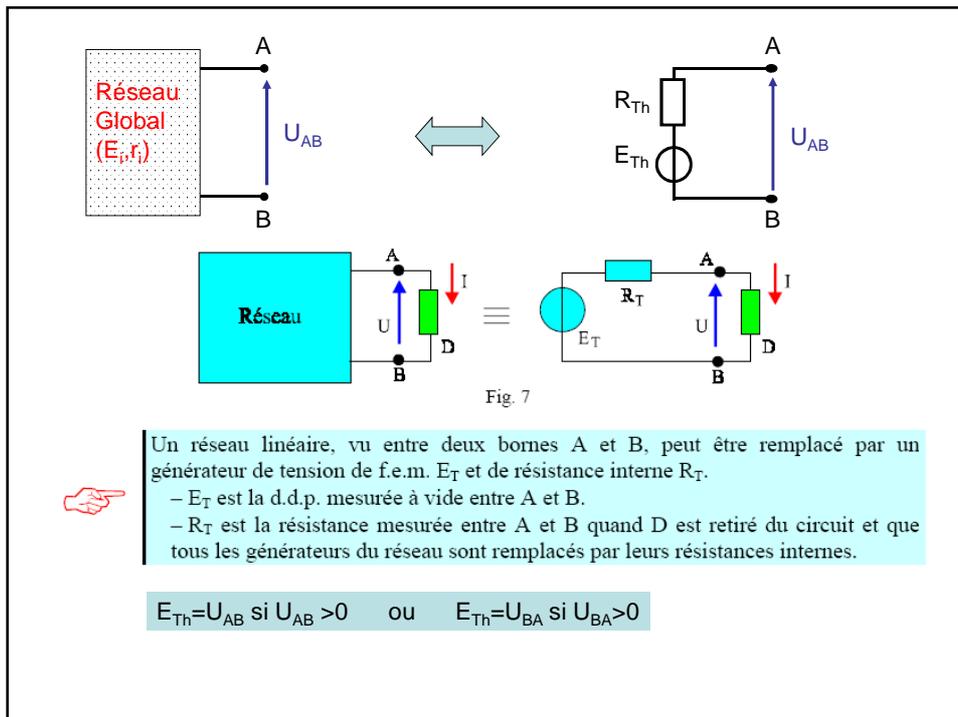
– Si on passive ce générateur, il est équivalent à une résistance nulle : le reste du réseau débite dans ce fil le courant  $I_A = E_T/R_T$   
Ce courant est le courant de court-circuit entre A et B.

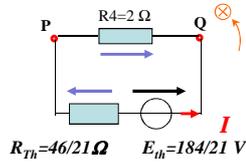
$$I = I_A + I_P = E_T/R_T - U/R_T$$

L'équation du circuit équivalent est donc :

$$U = E_T - R_T \cdot I$$

Cette équation est celle d'un générateur de tension que l'on nomme le *générateur de Thévenin* du circuit. Les deux circuits de la figure 7 sont équivalents et l'application de la loi de Pouillet au circuit de droite donne de façon triviale :  $E_T = (R_T + D) \cdot I$





à partir de la borne Q :

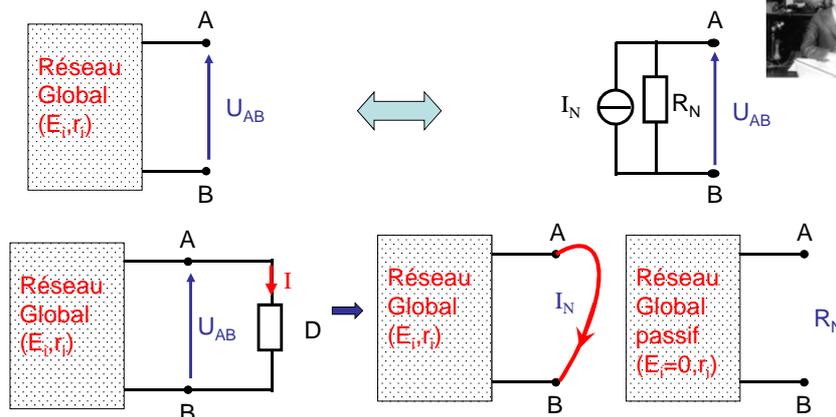
$$-R_4 \cdot I - R_{Th} \cdot I + E_{Th} = 0 \Leftrightarrow -(R_4 + R_{Th}) \cdot I + E_{Th} = 0 \Leftrightarrow I = \frac{E_{Th}}{R_4 + R_{Th}}$$

$$I = \left( \frac{184}{21} \right) / \left( \frac{46}{21} + 2 \right) = \frac{184}{88} = \frac{23}{11} \text{ A}$$

Le courant dans la branche QP est bien de 23/11 A, identique aux résultats précédents.

## 2.7 Equivalence d'un dipôle et d'un générateur de courant: Théorème de Norton

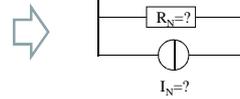
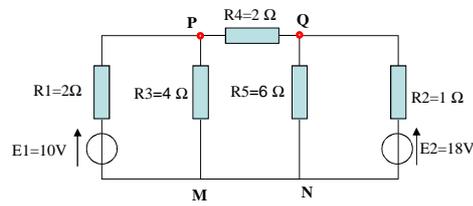
On considère un réseau global comprenant des dipôles passifs et actifs débitant un courant I sur un dipôle D subissant une tension U.



Le générateur de courant de Norton équivalent au dipôle AB est obtenu de la façon suivante :

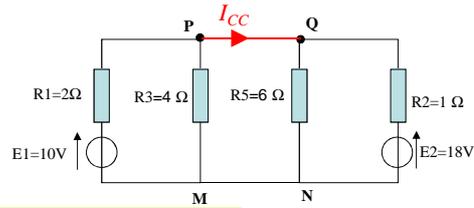
- Le courant  $I_N$  et la polarité sont donnés par le courant de court-circuit entre A et B.
- La résistance  $R_N$  est égale à la résistance équivalente  $R_{AB}$  du réseau passif entre ces deux points

Exemple: Appliquer le Théorème de Norton pour déterminer le courant dans la branche QP



Circuit passif (détermination de  $R_N$ )

$$R_N = R_{PQ} = 8/6 + 6/7 = 4/3 + 6/7 = 46/21 \Omega$$



Détermination de  $I_{CC}$ .

Méthode des noeuds

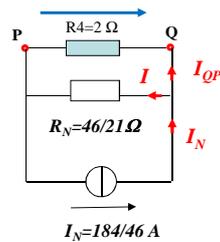
$$\begin{cases} \text{Au noeud P: } \frac{1}{2}[E1 + (V_M - V_P)] + \frac{1}{4}[(V_M - V_P)] - I_{CC} = 0 \\ \text{Au noeud Q: } \frac{1}{6}[E2 + (V_M - V_Q)] + \frac{1}{6}[(V_M - V_Q)] + I_{CC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}U_{MP} - I_{CC} + 5 = 0 \\ \frac{7}{6}U_{MQ} + I_{CC} + 18 = 0 \end{cases}$$

$$V_Q = V_P \Rightarrow \frac{4}{3}(-I_{CC} + 5) = \frac{6}{7}(I_{CC} + 18) \Rightarrow I_{CC} \left( \frac{4}{3} + \frac{6}{7} \right) = -\frac{6 \cdot 18}{7} + \frac{20}{3}$$

$$I_{CC} = \frac{-18 \cdot 18 + 140}{28 + 18} = -\frac{184}{46} \text{ A}$$

Le courant réel est orienté de Q vers P.

$$I_N = -I_{CC} = 184/46 \text{ A}$$



$$I_N = I_{QP} + I$$

$$U_{PQ} = R_4 \cdot I_{QP} = R_N \cdot I \Rightarrow I = I_{QP} \cdot \frac{R_4}{R_N}$$

Correction :

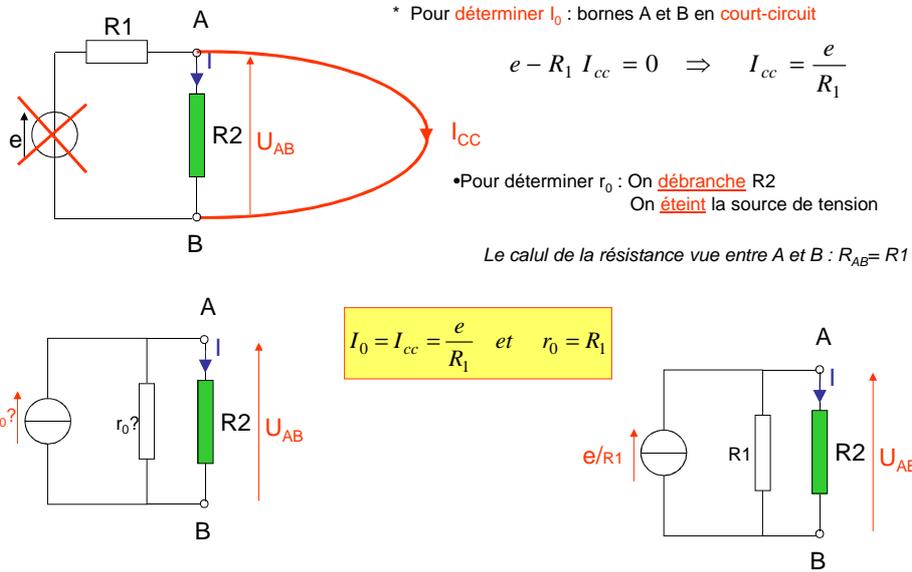
$$U_{QP} = R_4 \cdot I_{QP} = R_N \cdot I \Rightarrow I = I_{QP} \cdot \frac{R_4}{R_N}$$

$$I_N = I_{QP} + I_{QP} \cdot \frac{R_4}{R_N} = I_{QP} \left( 1 + \frac{R_4}{R_N} \right) \Rightarrow I_{QP} = \frac{R_N}{R_N + R_4} I_N$$

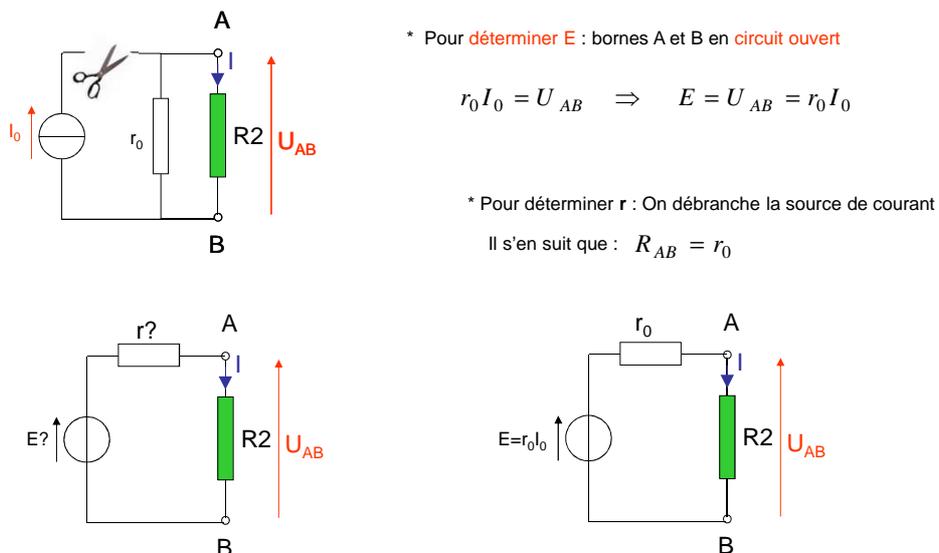
$$I_{QP} = \frac{\frac{46}{21}}{\left( \frac{46}{21} + 2 \right)} \cdot \frac{184}{46} = \frac{46 \cdot 184}{88 \cdot 46} = \frac{23}{11} \text{ A}$$

## 2.8 Equivalence générateur de courant $\leftrightarrow$ générateur de tension

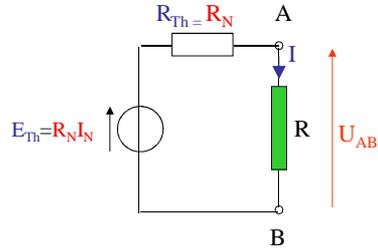
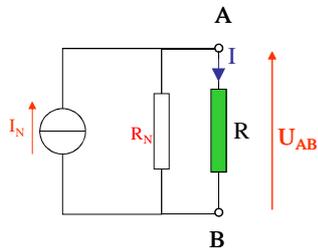
### 2.8.1.1 Transformation générateur de tension $\leftrightarrow$ générateur de courant



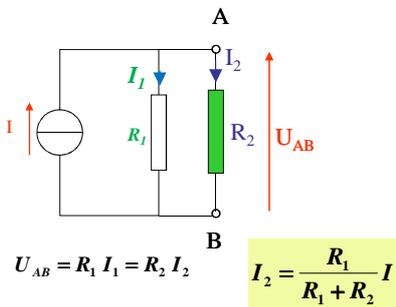
### 2.8.1.2 Transformation générateur de courant $\leftrightarrow$ générateur de tension



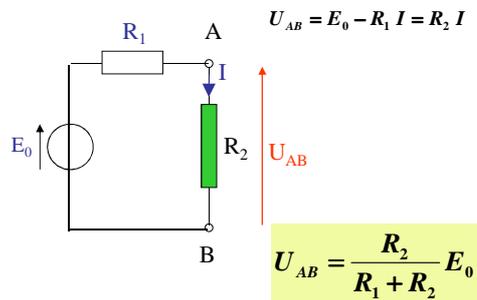
### 2.8.2 Equivalence générateur de courant $\leftrightarrow$ générateur de tension



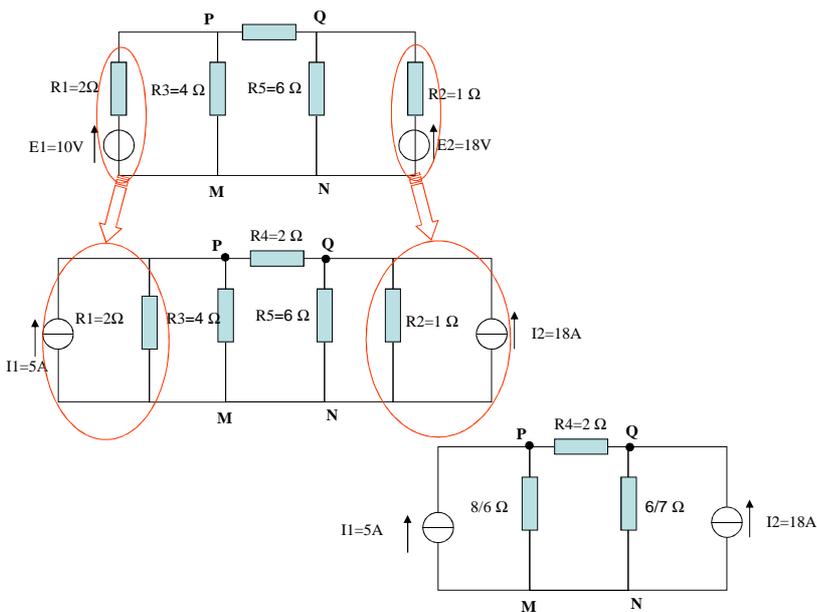
### 2.8.3 Diviseur de courant

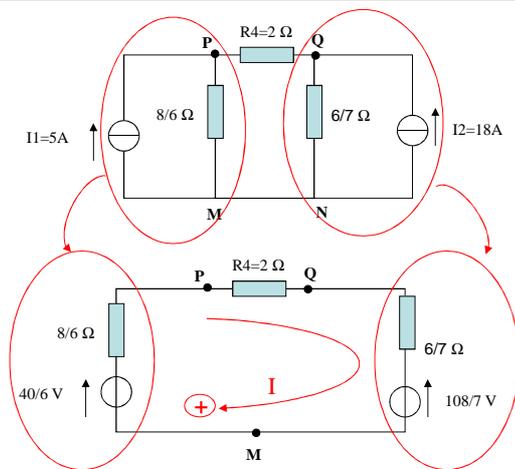


### 2.8.4 Diviseur de tension



Exemple: Par transformations successives g.t  $\leftrightarrow$  g.c, déterminer le courant dans la branche QP





Méthode des mailles

$$-\frac{40}{6} + \frac{8}{6}I + 2I + \frac{6}{7}I + \frac{108}{7} = 0 \Rightarrow I = \frac{368}{176} = \frac{23}{11} \text{ A}$$