

TP modélisation MESP 703 : Mécanique 3

Exercice n° 1 Force centrale en $1/r^2$

On considère un objet de masse M supposé immobile dans un référentiel galiléen qui exerce sur un corps d'épreuve (satellite) de masse m une force gravitationnelle.

1. Mise en équations :

- (a) Établir que les coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ du satellite obéissent au système d'équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -GM \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

où G est la constante de gravitation universelle.

- (b) Montrer qu'en appliquant le changement de variable $\tau = \frac{t}{T}$, $X = \frac{x}{A}$ et $Y = \frac{y}{A}$ où T et A sont un temps et une longueur caractéristiques reliés par l'équation $\frac{A^3}{T^2} = GM$ on obtient le système adimensionné

$$\ddot{X} = -\frac{X}{(X^2 + Y^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \ddot{Y} = -\frac{Y}{(X^2 + Y^2)^{3/2}}$$

où \ddot{X} et \ddot{Y} indiquent les dérivées secondes de X et Y par rapport au « temps » τ .

Justifier le choix de cette relation $\frac{A^3}{T^2} = GM$.

- (c) Résoudre numériquement ces équations avec les conditions initiales

- $X(0) = 1, Y(0) = 0, \dot{X}(0) = 0$ et $\dot{Y}(0) = 0.5$
- $X(0) = 1, Y(0) = 0, \dot{X}(0) = 0$ et $\dot{Y}(0) = 1.5$

Préciser dans chaque cas la nature de la trajectoire.

- (d) Déterminer les conditions initiales nécessaires pour obtenir

- une trajectoire circulaire.
- la vitesse de libération

2. Lois de conservations :

- (a) Montrer en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) que le moment cinétique s'écrit $\mathcal{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ et l'énergie mécanique

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

En déduire que l'on peut définir un moment cinétique adimensionné $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{V}$ où R et V sont respectivement la position et la vitesse adimensionnées du satellite, et une énergie mécanique adimensionnée E telle que

$$E = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{L^2}{2R^2} - \frac{1}{R}$$

- (b) Vérifier numériquement que L et E sont conservés.

3. Comparaison avec les solutions exactes :

- (a) On rappelle que l'équation d'une conique en coordonnées polaires s'écrit

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où e est l'excentricité et p le paramètre de la conique, avec dans le cas d'une ellipse $p = a(1 - e^2)$ si on note a le demi-grand axe de celle-ci.

Après avoir justifié que les distances minimale R_{\min} et maximale R_{\max} sont solutions de l'équation

$$R^2 + \frac{1}{E}R - \frac{L^2}{2E} = 0$$

en déduire que

- le demi-grand axe $a = -\frac{1}{2E}$
- et l'excentricité $e = \sqrt{1 + 2EL^2}$

- (b) Tracer alors la solution analytique et comparer avec la solution numérique.

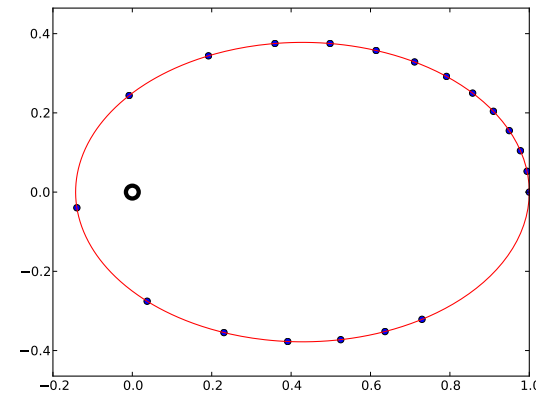


FIGURE 1 – Comparaison des solutions numérique et analytique