

TP modélisation MESP 703 : Lumière 1

Exercice n° 1 *Lois de Snell-Descartes*

De façon préliminaire on veut réécrire dans cet exercice les équations de Snell-Descartes sous une forme mathématique plus pratique que l'on utilisera dans les exercices suivants.

Soit \mathbf{N} le vecteur normal en un point M d'un dioptre séparant 2 régions d'indice respectif n_1 et n_2 . On note \mathbf{u}_i (resp \mathbf{u}_r) le vecteur unitaire porté par un rayon lumineux incident (resp. réfracté) venant frapper (resp. quittant) le dioptre en M . Montrer que les lois de la réfraction de Snell-Descartes se réduisent à la relation suivante :

$$n_1 (\mathbf{N} \times \mathbf{u}_i) = n_2 (\mathbf{N} \times \mathbf{u}_r) \quad (1)$$

Exercice n° 2 *Réfraction par un dioptre plan*

Un poisson se déplace dans un aquarium parallélépipédique parallèlement à une des parois. Un observateur placé hors de l'aquarium regarde ce poisson dans une direction perpendiculaire à cette paroi. On veut dans cet exercice tracer les rayons lumineux issus d'un point source placé sur le poisson, retrouver la position de l'image de cette source prédite par la formule de conjugaison dans l'approximation de Gauss et enfin étudier les effets d'aberrations.

1. On considère un point source A situé dans un milieu d'indice n . On prend comme origine des coordonnées le point O situé sur le dioptre plan et on définit les axes Ox et Oz comme indiqué sur la figure 1.

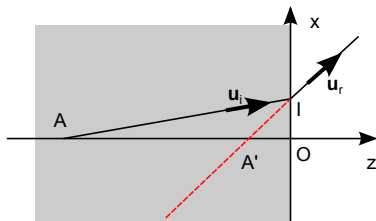


FIGURE 1 – Réfraction à travers un dioptre plan

Choisir un point I sur le dioptre donc de coordonnées $(z_I = 0, x_I)$. Exprimer les coordonnées du vecteur unitaire du rayon incident \mathbf{u}_i , puis à l'aide de l'équation (1) en déduire celles du vecteur unitaire \mathbf{u}_r du rayon réfracté.

2. En remarquant que pour tout point M de la droite passant par I et de direction \mathbf{u}_r est défini par la relation $\mathbf{IM} = t \mathbf{u}_r$ où t est un réel tracer : le rayon incident AI le rayon réfracté IM ainsi que son prolongement dans l'espace antérieur (l'image est virtuelle ici !)
3. Itérer ce processus pour plusieurs points I du dioptre plan en restant néanmoins voisin de l'axe Oz et en déduire la position de l'image A' . Comparer avec la position donnée par l'approximation de Gauss.
4. Explorer à présent des points I « éloignés » de O et montrer qualitativement la notion d'aberration ainsi que la notion de caustique. Comment évoluent ces effets lorsque le point A se déplace dans la direction des x ?

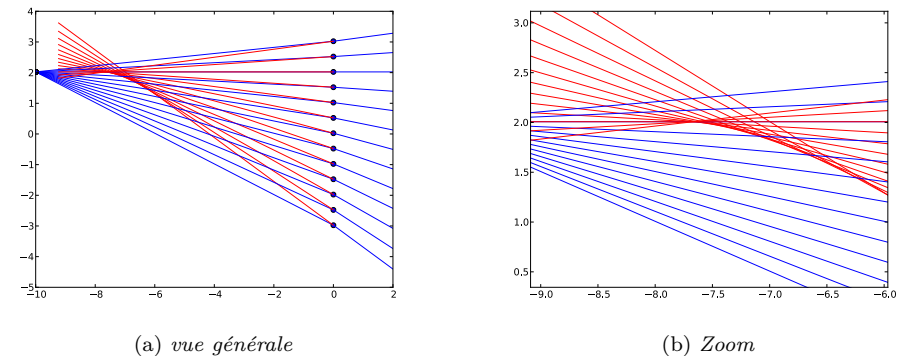


FIGURE 2 – Aberrations géométriques et caustiques

Exercice n° 3 *Réfraction par un dioptre sphérique*

On reprend la démarche de l'exercice précédent mais en l'appliquant à un dioptre sphérique : on cherche à former l'image (réelle) d'un objet placé dans l'air à l'intérieur d'une boule en verre d'indice $n = 1,5$. La figure 3 indique une situation typique.

1. Tracer un rayon lumineux issu d'un point source A en suivant les procédures suivantes :
 - Fixer la position du point source A , le centre de courbure C et l'indice n du milieu.
 - Déterminer un point du dioptre I en fixant dans un premier temps sa dimension transverse x_I , puis en déduire sa composante longitudinale z_I connaissant le rayon de courbure R du dioptre.
 - Calculer le vecteur unitaire \mathbf{u}_i du rayon incident, puis le vecteur normal au dioptre \mathbf{N} au point I et en déduire à l'aide de la loi de Snell-Descartes le vecteur unitaire \mathbf{u}_r du rayon réfracté.

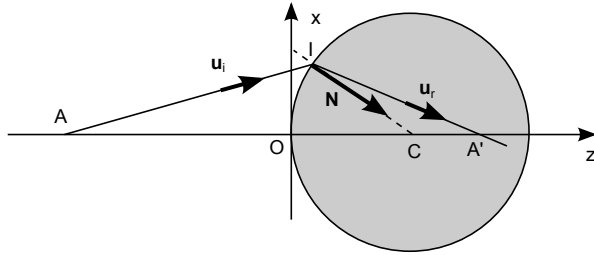
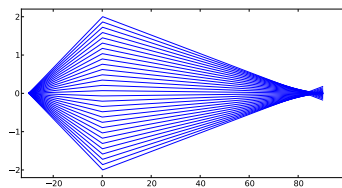
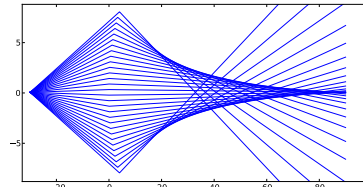


FIGURE 3 – Réfraction d'un rayon passant de l'air dans le verre à travers un dioptre sphérique

- Tracer alors les rayons incident et réfracté en suivant la méthode utilisée dans l'exercice précédent.
2. Itérer le processus pour plusieurs points I du dioptre sphérique en restant dans un premier temps au voisinage de l'axe optique et en déduire la position de l'image A' . Comparer avec la position donnée par l'approximation de Gauss.



(a) cas « gaussien »



(b) cas « aberrant »

FIGURE 4 – Aberrations géométrique et caustiques sur un dioptre sphérique

3. Explorer à présent des points I « éloignés » du sommet du dioptre et montrer qualitativement la notion d'aberration ainsi que la notion de caustique.
4. Étudier ces effets d'aberration en déplaçant le point source hors axe.

Exercice n° 4 Principe de Fermat (1)

Reprendre le cas d'écoule de deux points A et B placés de part et d'autre d'un dioptre plan.

1. Choisir un point M du dioptre puis calculer l'expression du chemin optique $L_{AB}(M) = [AMB]$ en fonction des coordonnées des points A et B et du point M
2. On se place dans une situation simplifiée où le point M reste coplanaire aux points A et B . Tracer $L_{AB}(x)$ en fonction de la position x du point M . Vérifier qualita-

vement que la solution suivie effectivement par la lumière correspond au minimum du chemin optique.

3. Déterminer à présent par le calcul la valeur du minimum :

- (a) dans un premier temps par un algorithme de votre cru
- (b) dans une seconde étape en utilisant la procédure `fmin` disponible à partir de la sous-bibliothèque `scipy.optimize` de `scipy`, dont voici un exemple d'utilisation

```
### -*- coding: cp1252 -*-
"""
Programme type de recherche du minimum d'une fonction
"""
from __future__ import division
from pylab import *
from scipy import *
from scipy.optimize import fmin

def f1(x):
    res = x**4 - x**2 - 0.1*x
    return res

pt0 = 0.1
retour = fmin(f1, pt0)
print retour

x = linspace(-1.2, 1.2, 300)
y = f1(x)
plot(x, y)
show()
```