

## TP modélisation MESP 703 : Mécanique 1

R. BOISGARD

**A Exercices préliminaires****Exercice n° 1** *Équation différentielle d'ordre 1*

La population d'un corps radioactif évolue suivant la loi de désintégration

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N$$

où  $N$  est le nombre d'atomes à l'instant  $t$  et  $\alpha$  le taux de décroissance caractéristique du corps considéré.

1. Rappeler brièvement la solution analytique de cette équation.
2. Résoudre cette équation par la méthode d'Euler dont on rappelle ici le principe pour une équation du type

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

On découpe l'intervalle  $[0, t]$  en  $N$  sous-intervalles de longueur  $h$  appelé *pas* d'intégration, on note  $t_n = nh$  l'instant après  $n$  itérations et  $y_n = y(t_n)$  la fonction recherchée  $y(t)$  à cet instant. On a alors la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n)h$$

3. Construire en python deux tableaux l'un contenant les  $t_n$  et l'autre les  $N_n$ . Comparer alors sur un même graphique la solution analytique  $N(t)$  avec la solution numérique pour différente valeur du pas  $h$ . Conclure.

**Exercice n° 2** *Équation différentielle d'ordre 2*

On se propose de résoudre par une méthode numérique l'équation d'évolution d'un corps lancé verticalement dans un champ de pesanteur uniforme donc suivant la loi bien connue

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Bien entendu la solution analytique (elle aussi bien connue) nous permettra de valider la solution numérique.

1. Réécrire cette équation sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -g \end{cases}$$

et proposer une adaptation de l'algorithme d'Euler pour le résoudre numériquement.

2. Tracer sur un même graphe la solution analytique et  $z(t)$  obtenue par la méthode numérique.
3. Reprendre la démarche en utilisant la fonction `ode` du module `integrate` de la bibliothèque `scipy`.

**B Oscillateur 1****Exercice n° 3** *Oscillateur harmonique linéaire*

1. Résoudre numériquement l'équation

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Comparer avec la solution analytique

2. Introduire une dissipation linéaire

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

- (a) Retrouver numériquement le comportement attendu des 3 régimes : pseudo-périodique, critique et sur-amorti.
- (b) Représenter ces trois régimes sur un même graphe.
- (c) Tracer les portraits de phase (trajectoire dans l'espace  $(\theta, \dot{\theta})$ ) pour les trois régimes

**Exercice n° 4** *Effet non-linéaires*

1. Étudier le cas d'une dissipation non linéaire

$$\ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} \left| \dot{\theta} \right| + \omega_0^2 \theta = 0$$

Comparer avec la solution linéaire.

2. équation de Van der Waals
3. équation de Duffing

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

étudier la période en fonction de l'amplitude. Comparer avec la méthode de Borda.

**Exercice n° 5** *Régime forcé*

1. cas linéaire

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A \cos \omega t$$

courbes de résonance

2. cas non-linéaire

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = A \cos \omega t$$

étudier l'apparition d'un cycle d'hystérésis.