Cours "Phénomènes de Hautes Énergies"

M2 - APC - 2010/2011 - Thierry Reposeur - CENBG
reposeur@in2p3.fr

Relativité (dite) restreinte

La physique, c'est chercher à savoir comment marche le monde, et partager ses résultats. Il faut pour cela s'affranchir du point de vue, i.e. définir un mode de comparaison indépendant de l'observateur.

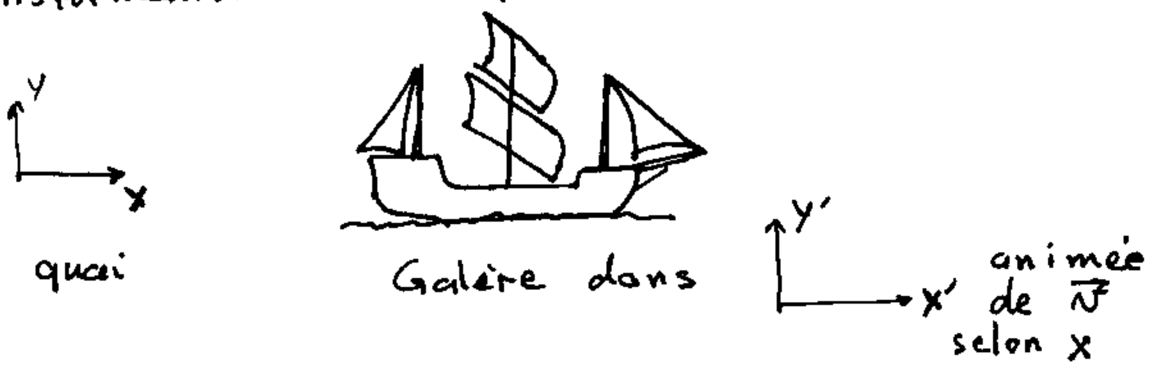
$\longrightarrow$ Principe de relativité

« Il existe une infinité continue de repères d'espace-temps (ou de points de vue) physiquement équivalents »

Dans ces repères :
- Les valeurs de certaines grandeurs physiques changent, (sinon comment distinguer ces repères ?)
- Les relations entre grandeurs sont les mêmes (les lois physiques ont la même forme).

Si ces repères n'existaient pas, inutile de publier des résultats qui n'auraient aucun intérêt pour quelqu'un d'autre.

Historiquement, Galilée a énoncé le principe et posé une transformation entre repères



$$\begin{cases} x = x' + \vec{v}\, t' \\ t = t' \end{cases}$$

transformations de Galilée.

Bien éprouvées tant que $|\vec{v}|$ petit et $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$
- contrôle aérien,
- points de vue des arbitres, des joueurs, au rugby,
- ...

- Vers 1870, Maxwell accomplit la première unification de deux théories :

$$\text{electricité} + \text{magnétisme} \xrightarrow{\text{JCM}} \text{électromagnétisme}$$

Problème, les équations ne sont pas invariantes sous les transformations de Galilée

$\longrightarrow$ viol du principe de relativité.

- Michelson et Morley établissent expérimentalement en 1887 que la vitesse de la lumière est constante dans une tranformation de Galilée, alors que :

$$\begin{cases} x = x' + v t' \\ t = t' \end{cases} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \underbrace{\cancel{\left(\frac{dv}{dt}\right)}}_{0} t' + v \qquad (dt = dt')$$

$$\longrightarrow V = V' + v \quad \text{additif !?!}$$

- Lorentz ($t < 1905$) cherche et trouve une transformation qui réconcilie les équations de Maxwell et le principe de relativité, qui laisse "c" invariante sous la transformation.
- Einstein en 1905 redécouvre et donne un sens physique aux transformations de Lorentz.

Seul "problème", la lumière joue un rôle très particulier et pour tout dire un peu troublant.

La transformation de Lorentz ... autrement.

Librement inspiré de J.-M. Lévy-Leblond, Am. J. Phys. 44 (1976) 271

On se place à 2 dimensions (x,t), l'invariance des lois physiques par rotation spatiale nous assure la généralisation à 4-dim.

$$\begin{cases} x' = f(x, t, \varphi) \\ t' = g(x, t, \varphi) \end{cases}$$

coord. d'1 événement.

φ : param. unique, continu de la transformation (pour l'unicité, voir l'article original)

Un principe d'invariance par translation d'espace et de temps ("Les lois physiques ne dépendent pas de l'origine des coordonnées") permet de postuler l'homogénéité de l'espace-temps, c'est à dire : l'espace s'étend et le temps se déroule toujours de la même façon, partout dans l'Univers.

On peut se borner aux points de vue de 2 physiciennes qui conviennent d'un événement commun comme origines de leurs repères :

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0, 0, \varphi) = 0 \\ g(0, 0, \varphi) = 0 \end{cases}$$

pour 2 événements quelconques A et B :

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = f(x_B, t_B, \varphi) - f(x_A, t_A, \varphi)$$

$$= f(x_A + \Delta x, t_A + \Delta t, \varphi) - f(x_A, t_A, \varphi)$$

Si A est l'événement commun

$$\Delta x' = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta t, \varphi) - f(0, 0, \varphi) = f(\Delta x, \Delta t, \varphi)$$

de même $\Delta t' = g(\Delta x, \Delta t, \varphi)$

$$\longrightarrow \begin{cases} dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ dt' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial t} dt \end{cases}$$

ne dépendent que de φ, pas de x, t.

$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial t}$ ne dépendent que de φ

$\longrightarrow$ f et g sont linéaires en x, t. ☺

Très important : implique que les transformations ne dépendent que de l'intervalle, pas de ses bouts !
Conséquence directe de l'invariance par translation d'espace et de temps.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Paramétrisation commode et justifiée a posteriori

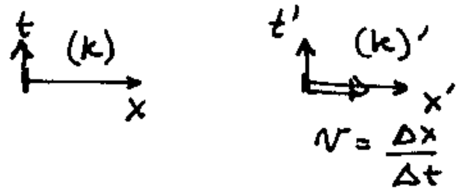
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -wc \\ \varepsilon \frac{w}{c} & \delta \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \alpha, w, \delta \text{ quelconques} \\ c > 0 \ \underline{\text{et}} \ \varepsilon = \pm 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow x' = \alpha x - wct$$

En particulier, pour le tic-tac d'une montre dans le repère du poignet. $(k)'$

$$\begin{cases} \Delta t' = tac - tic \\ \Delta x' = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{wc}{\alpha}$$

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est une vitesse, celle de $(k)'$ par rapport au repère (x,t)



$v = \frac{wc}{\alpha}$ = cste par construction

⚠ Ces transformations concernent des repères équivalents qui ont des vitesses <u>constantes</u> les uns par rapport aux autres.

On les dit *inertiels*, i.e. $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.

Nos transformations seront invalides pour comparer les lois physiques entre repères accélérés.

Examinons le cas où $\underset{O}{\longmapsto} x \quad (k)$ $\qquad x' \longleftarrow\!\!\!| \, O' \quad (k)'$

$$\longrightarrow \quad V_{(k)/(k)'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = V_{(k)'/(k)} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

, et notre principe de relativité impose alors $A^{-1} = A$, donc $A^2 = I$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -V\alpha \\ \varepsilon \frac{\alpha v}{c^2} & \delta \end{pmatrix} \longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \varepsilon \frac{\alpha^2 v^2}{c^2} & -V\alpha^2 - V\alpha\delta \\ \varepsilon\frac{\alpha^2 v}{c^2} + \varepsilon \frac{\alpha\delta v}{c^2} & -\frac{V\alpha^2 v^2}{c^2} + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en introduisant $V = \frac{wc}{\alpha}$

$$\longrightarrow \quad -V\alpha^2 - V\alpha\delta = 0 \iff \alpha = -\delta$$

($V \neq 0$ sinon $(k) \equiv (k)'$ trivial)

$$\longrightarrow \quad A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -v \\ \frac{\varepsilon v}{c^2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2 - \varepsilon\frac{\alpha^2 v^2}{c^2} = 1 \implies \alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{v^2}{c^2}}} \implies \alpha = \frac{\eta}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{v^2}{c^2}}}, \ \eta = \pm 1$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\varepsilon v^2/c^2}}(x - vt) \\[2ex] t' = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\varepsilon \frac{v^2}{c^2}}}\left(\dfrac{\varepsilon v}{c^2}x - t\right) \end{cases}$$

Si $c \longrightarrow \infty$
(moins radicalement $c \gg v$)

$$\begin{cases} x' \longrightarrow \eta(x - vt) \\ t' \longrightarrow \eta(-t) \end{cases}$$

Une transformation bien éprouvée depuis 3 siècles est celle de Galilée, soit ici pour nos repères $\underset{\longrightarrow}{(k)}$ $\quad \underset{\longleftarrow}{(k)'}$

$$\begin{cases} x' = -x + Vt \\ t' = t \end{cases}$$

$\implies$ pas le choix : $\eta = -1$

$\varepsilon = \pm 1$ reste compatible avec Galilée, essayons autre chose.

Orthodoxie : $\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}_{\text{nouveau}} = \begin{pmatrix} -x' \\ t' \end{pmatrix}_{\text{ancien}}$, c'est à dire

$\overset{O}{\vdash}\!\longrightarrow x$ (k) $\quad \overset{O'}{\vdash}\!\longrightarrow x'$ $(k)'$

Pour les anxieux, on a le droit de le faire en cours de démonstration, à cause du caractère universel de nos transformations ($\eta = -1$ toujours ! et $V = \frac{wc}{\alpha}$ n'a pas changé)

$$\longrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \varepsilon \frac{V^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \varepsilon \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \varepsilon \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$\varepsilon = -1$? entre 2 évènements $\Delta t' = \dfrac{\Delta t + \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 + V^2/c^2}}$

Aie ! $\forall \Delta t, \Delta x$, $\exists$ toujours V telle que

$$\text{signe}(\Delta t') = - \text{signe}(\Delta t)$$

$\longrightarrow$ Il n'existe <u>aucun</u> couple d'évènements qui puissent être en relation de cause à effet dans <u>tous</u> les repères inertiels.

$\longrightarrow$ viol du <u>principe de causalité</u> qui énonce l'existence d'une classe d'évènements dont l'ordre temporel est invariant quelque soit la transformation.

$\varepsilon = 1$ $\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$ $\longrightarrow |V| < c$ obligatoire.

Mais $\frac{|V|}{c} < 1$ implique que la classe d'évènements définie par $\dfrac{\Delta x}{c \Delta t} < 1$ est bien telle que $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t} > 0$

$\longrightarrow$ Il existe un peu d'ordre dans l'Univers ! ouf...

$\longrightarrow$ Identique aux transformations de Lorentz

Nulle part ici on a fait allusion à la lumière, quid de ce "c" ?

$[c]$ = vitesse, que sait-on d'elle ?

1> Elle est grande devant les vitesses de Galilée,

2> C'est une constante, quelque soit le repère,

3> On ne peut ni l'atteindre, ni la franchir. L'autre univers défini par $\varepsilon = -1$ est distinct de celui défini par $\varepsilon = +1$, c'est celui des tachyons...

4> Si la masse du photon $m_\gamma = 0$ alors c coïncide avec la vitesse de la lumière. Actuellement $m_\gamma < 6\,10^{-17}\ eV/c^2$, pas d'inquiétude superflue...

$\longrightarrow$ Ne plus dire
"c est la vitesse de la lumière"
mais "Si $m_\gamma = 0$, les photons vont à la vitesse c".

Galilée avait tout pour arriver à ces conclusions et ces transformations, tout sauf le besoin car

$$v \simeq \text{qlq}\ ms^{-1} \ll c \simeq 3\,10^8\ ms^{-1}$$

ne lui permettait pas de mesurer des écarts à ses transformations.

– – –

Disparition de c

la constante c est tellement fondamentale qu'on s'empresse de la faire disparaître en définissant

$$t_{\text{nouveau}} = c\,t_{\text{ancien}}$$

→ $[t]$ = distance, par exemple "année-lumière"

→ vitesses sans dimension

→ $\beta \overset{\text{df}}{=} \frac{v}{c} < 1$ toujours.

→ $$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \beta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \dfrac{t - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

dont : – la symétrie,
– l'élégance,
– la facilité d'écriture,

sont épatantes !

$\boxed{c = 1}$ partout, les équations aux dimensions nous serviront pour les applications numériques.

Propriétés

1> La distance :

Dans le monde ennuyeux à 3 dimensions spatiales on défini $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 > 0$ et invariante sous les translations, rotations.

Entre 2 événements :
$$\begin{cases} dx' = \dfrac{dx - \beta dt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ dt' = \dfrac{dt - \beta dx}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

qui vérifie : $(dt')^2 - (dx')^2 = (dt)^2 - (dx)^2$

La distance carrée $(ds)^2 \stackrel{df}{=} (dt)^2 - (dx)^2$ est un invariant sous les transformations de Lorentz.

⚠ $(ds)^2$ peut être négative ! ça n'est pas une distance au sens habituel/banal.

A trois dimensions spatiales :

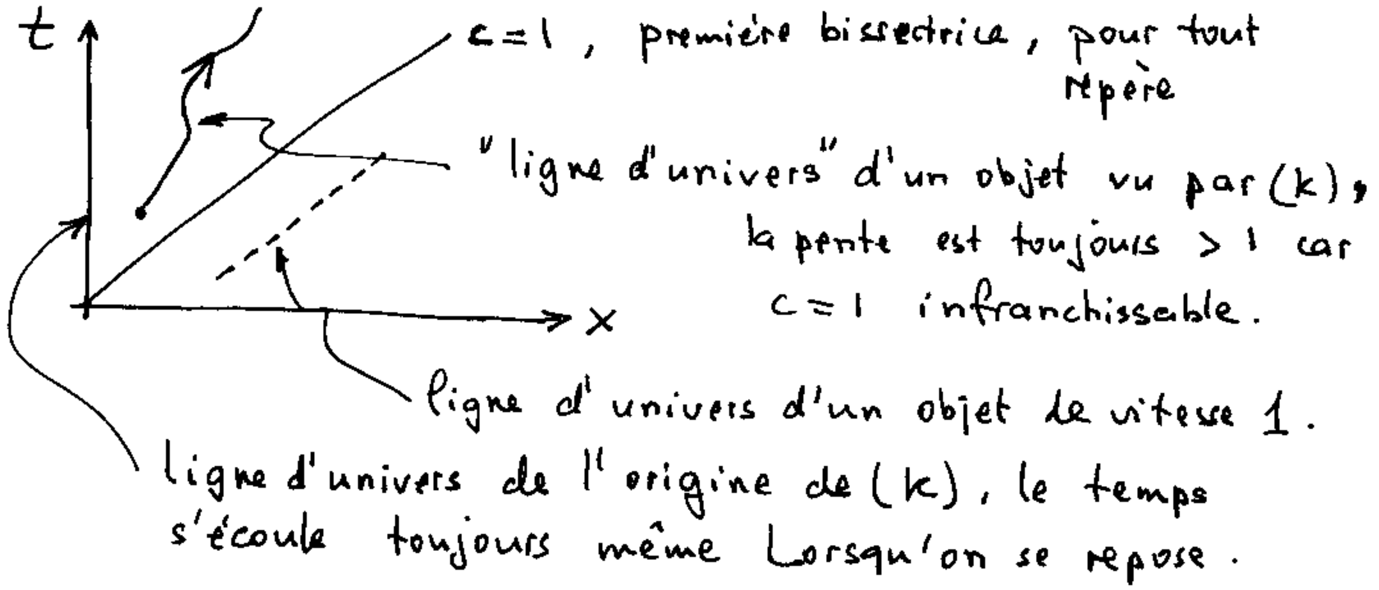
$$(ds)^2 = (dt)^2 - \left[(dx)^2 + d(y)^2 + (dz)^2 \right]$$

2> Relativité par l'image.

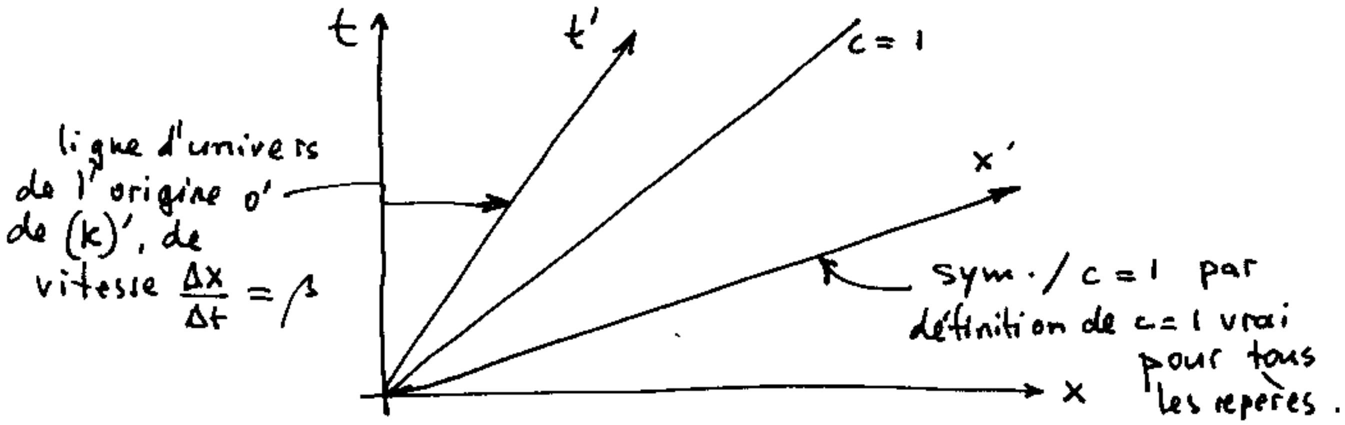
- On se place à 2 dimensions (x, t)
- On se souvient que $V = \frac{\Delta x}{\Delta t} < 1$ toujours
- On garde à l'esprit qu'il existe une vitesse $c = 1$, pour tout les repères

⟶ On va faire des dessins

On veut représenter des événements physiques, dans un diagramme (x,t)



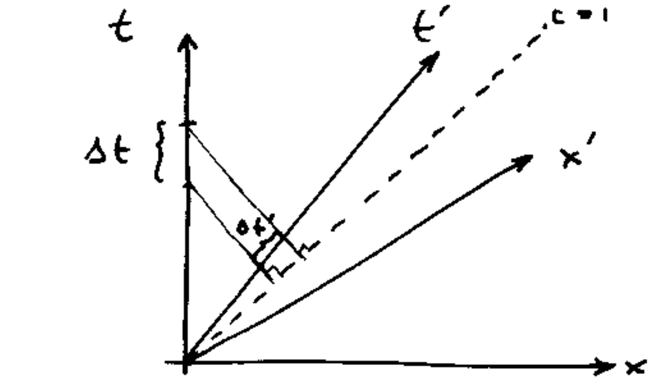
Et $(k)'$ de vitesse $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ par rapport à (k) ?



On va en voir quelques applications.

3) Le temps est relatif

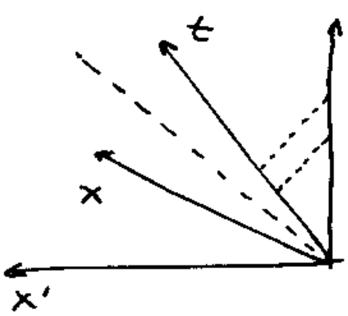
Une physicienne voyageant à $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ par rapport à son amoureux lui envoie 2 bips sous forme de signaux lumineux. Pour elle $\Delta x' = 0$ et l'intervalle entre les bips vaut $\Delta t'$.



Bigre ! $\Delta t > \Delta t'$

Les horloges mouvantes retardent.

Propriété
~~Problème~~ symétrique ; (K') voit partir (K) à $-\beta$



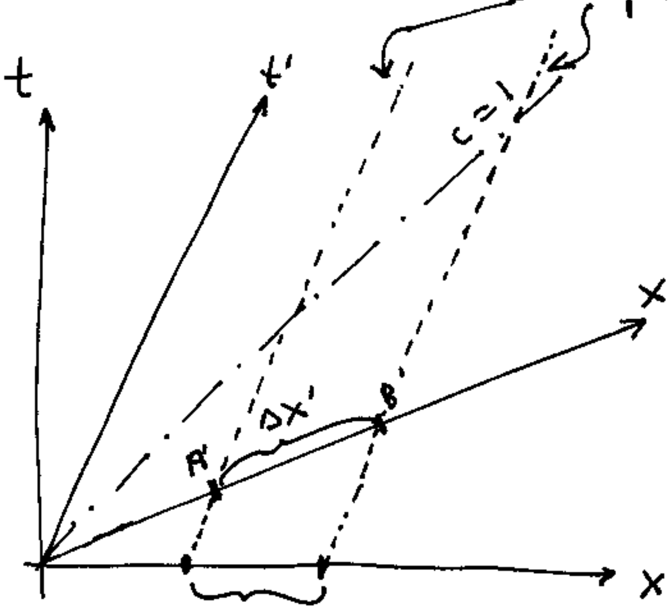
$\Delta t' > \Delta t$

Rq : Qui croire ? Origine du pseudo-paradoxe des jumeaux.

4> La distance est relative.

Notre voyageuse veut maintenant montrer l'écharpe qu'elle a tricotée pour son amoureux. Longueur de l'écharpe $\Delta X'$. Dessinons les lignes d'univers des deux extrémités.

parallèles à l'axe t', vues de (K)



Δx mesurée dans (K)

$\Delta X < \Delta X'$!

"Elle ne va pas être un peu courte ton écharpe ?"

Rq : les mesures de distance se font toujours à $\Delta t = 0$ et $\Delta t' = 0$ car sinon ça bouge pendant Δt ($\Delta t'$)...

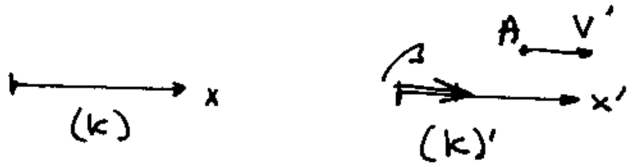
5) Composition des vitesses.

Galilée dit $V = v + V'$ pour un objet de vitesse V' dans $(K)'$ se déplaçant à v par rapport à (K)

Michelson & Morley disent non ! , la lumière est telle que "$c = c + v$"

pour eux c'est la lumière, pour nous c'est juste... "c".

facile :



Vitesse de A dans $(K)'$: V'

coordonnées de A dans (K) : $\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta t') \\ t = \gamma(t' + \beta x') \end{cases}$

$$\begin{cases} dx = \gamma(dx' + \beta\, dt') \\ dt = \gamma(dt' + \beta\, dx') \end{cases} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + \beta}{1 + \beta \frac{dx'}{dt'}}$$

$$\longrightarrow \boxed{V = \frac{V' + \beta}{1 + \beta V'}}$$

On additionne plus les vitesses, on les compose.

Si $V' = 1 \to V = 1$, ouf...

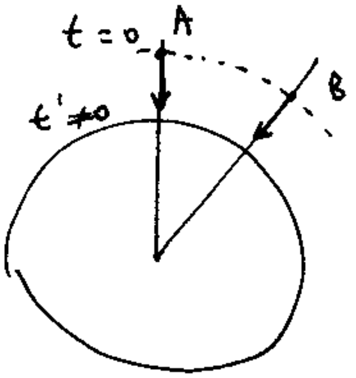
Digression : référentiels inertiels ?

On a vu que les référentiels satisfont $\vec{V} = \text{cste}$ les uns par rapport aux autres pour que nos transformations soient valides.

Autrement dit : 2 repères sont galiléens – ou inertiels – si deux objets lachés avec une vitesse relative $\vec{v}_{rel} = \text{cste}$ ont au cours du temps

$$\frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} = \vec{0}.$$

Voisinage d'une masse :



$\vec{v}_{AB} = \vec{0}$ à $t = 0$

$\vec{v}'_{AB} \neq 0$ $t' > 0$ car les objets sont plus proches l'un de l'autre.

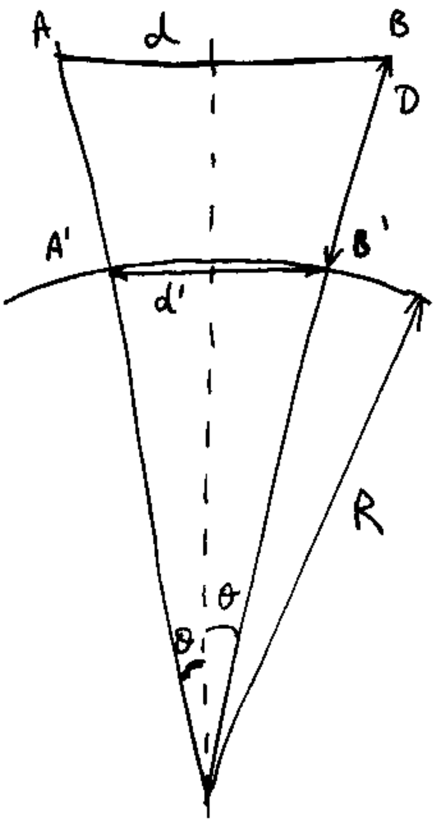
$\longrightarrow$ pas inertiel !

Un repère en présence de champ gravit. n'est jamais "vraiment inertiel".

OUI MAIS : Il y a de la gravité partout

$\rightarrow$! ? ! ? On ne peut plus faire de physique ?

$\rightarrow$ Si ! Tant que les effets ne sont pas mesurables (comme par ex. validité toujours actuelle ~~dans~~ des transf. de Galilée dans la vie courante)



Exemple 1 : rapprochement "transverse"

$$\left.\begin{array}{l} d = 2(R+D)\sin\theta \\ d' = 2R\sin\theta \end{array}\right\} \rightarrow d' = d\,\frac{R}{R+D}$$

chute libre : $D = \frac{1}{2}\frac{GM}{(R+D)^2}\Delta t^2 \simeq \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}\Delta t^2$

chute courte, R varie peu.

$$d - d' = d\left(1 - \frac{1}{1+\frac{D}{R}}\right)$$

$$= d\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}GM\frac{\Delta t^2}{R^3}}\right)$$

A.N. : $\Delta t \approx 7\,\mathrm{sec}$, $d = 25\,\mathrm{m}$

$M = 5.9\ 10^{24}$ kg

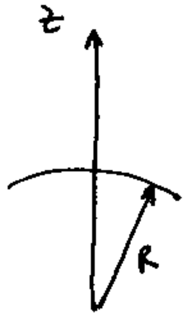
$R = 6.4\ 10^{6}$ m $\longrightarrow$ $\boxed{d - d' \simeq 1\,\mathrm{mm}}$

$G = 6.67\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

Si $M = M_\odot = 2\,10^{30}$ kg $\longrightarrow$ $d - d' = 23$ m !

Exemple 2 : Élongation longitudinale.

laché d'un objet étendu en z, sur un axe passant par le centre du champ gravitationnel.



$$g(r+\Delta z) - g(r) = \frac{dg}{dr}\,\Delta z = \frac{2GM}{R^3}\,\Delta z$$

la différence de distance parcourue pendant une chute de Δt s'écrit

$$\frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{2GM}{R^3}\,\Delta t\right)$$

A.N. : $\Delta z = 25\,m$, $\Delta t = 7\,s$, $M = 5.9\;10^{24}\,kg$, $R = 6.4\;10^{6}\,m$ (sur Terre)

$\longrightarrow$ élongation $\simeq 2\,mm$

Si $M = 2\;10^{30}\,kg \longrightarrow 600\,m$!!! Ne jamais approcher une étoile à neutrons, ce serait pire !

Conséquence #1 Au voisinage de la Terre et si on admet une tolérance de $\frac{0{,}002}{25} = 0{,}008\,\%$ sur les mesures de distances, alors un repère en chute libre pendant 7 secondes peut être considéré comme inertiel.

Conséquence #2 chute "libre" $\longrightarrow$ contraction transverse
élongation longitudinale

$\longrightarrow$ "effets de marée", dislocation de la matière

Si un jour notre lune décroche, ça fabriquera de jolis anneaux et plein d'étoiles filantes.

Conclusion

- La gravitation interdit l'existence à gde échelle de repères inertiels, mais localement l'espace-temps est toujours et partout plat et Lorentzien. L'échelle d'espace est définie par la "courbure" locale $\frac{GM}{R^2}$
- Aucune manifestation de la gravitation n'est visible si on joue tout(e) seul(e). On doit toujours regarder le mouvement relatif de deux objets.

Le Formalisme quadri-vectoriel

Où l'on réécrit tout ça pour voyager facilement à l'aide d'un formalisme un peu sec. Exposé brutal par souci d'efficacité opérationnelle.

Le formalisme.

Soit un événement $\mathcal{E}$ de coordonnées (t, x, y, z) dans (K)
(t', x', y', z') dans $(K)'$

les transformations

$$\boxed{\begin{array}{l} x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, x^{\beta} \\ \text{telles que} \quad \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, \Lambda^{\gamma}_{\ \delta}\, g_{\alpha\gamma} = g_{\beta\delta} \\ \text{où} \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ \text{définit la } \underline{\text{métrique}}. \end{array}}$$

sont dites <u>transformations de Lorentz</u> et constituent le groupe de Lorentz homogène ou groupe de Poincaré.

Pour une T.L. de $(K)'$ à la vitesse β suivant x par rapport à (K)

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conventions : - $0 \rightarrow$ indice de composante "temps"
$1, 2, 3 \rightarrow$ " s " s "espace"

- contraction des indices (convention d'Einstein)

$$X_{\alpha} = X^{\beta} g_{\alpha\beta}$$

Vous l'avez deviné $X^\alpha = (t, x, y, z)$.

Examinons $(ds)^2 \stackrel{df}{=} dt^2 - d\vec{x}^2 = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dx^\beta$

¿ $(ds')^2 = g_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha\, dX'^\beta$

$$= g_{\alpha\beta}\, \Lambda^\alpha{}_\mu dx^\mu \Lambda^\beta{}_\nu dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = (ds)^2$$

$(ds)^2$ est invariant sous les transformations de Lorentz, déjà évoqué p. 9.

a> $(ds)^2 > 0$ dominé par $(dt)^2$, on définit l'intervalle de temps propre $\boxed{d\tau \stackrel{df}{=} \sqrt{(ds)^2}}$

Très important : c'est l'intervalle de temps entre deux événements dans le repère où ils ont lieu au même endroit

par ex. : $t_{\text{mort}} - t_{\text{naissance}}$ = durée de vie d'une particule dans son repère, au repos donc.

b> $(ds)^2 < 0$ dominé par $(d\vec{x})^2$, on définit la distance propre $\boxed{d\sigma \stackrel{df}{=} \sqrt{-(ds)^2}}$

Distance dans le repère où les 2 évènements sont simultannés.

Vocabulaire:

$(ds)^2 > 0$	Intervalle	genre temps
$(ds)^2 < 0$	"	espace
$(ds)^2 = 0$	"	lumière

allusion pas très fine aux photons

Quadri-vecteurs.

Par définition, on appelle 4-vecteur tout quadriplet (A^0, A^1, A^2, A^3) qui se transforme comme (x^0, x^1, x^2, x^3) dans une transformation de Lorentz.

$$A^\alpha \xrightarrow{T.L.} A'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta .$$

Propriétés en vrac

a> $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \longrightarrow g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} = \delta^\beta{}_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b> $\Lambda_\alpha{}^\beta \stackrel{df}{\equiv} g_{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} \Lambda^\gamma{}_\delta$

$$\longrightarrow \Lambda_\alpha{}^\beta \Lambda^\alpha{}_\delta = g_{\alpha\gamma} g^{\nu\beta} \Lambda^\gamma{}_\nu \Lambda^\alpha{}_\delta = g^{\nu\beta} \underbrace{g_{\alpha\gamma} \Lambda^\gamma{}_\nu \Lambda^\alpha{}_\delta}_{} = g_{\nu\delta}$$

$$= g^{\nu\beta} g_{\nu\delta} = \delta^\beta{}_\delta$$

$\longrightarrow$ les matrices sont inverses l'une de l'autre et conduisent à définir $B_\alpha = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ tel que

$$B_\alpha \xrightarrow{T.L.} B'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta B_\beta$$

$A^\alpha \equiv$ grandeur contravariante

$A_\alpha \equiv$ grandeur covariante

$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$ pour passer des unes aux autres.

c> $$A^\alpha B_\alpha \xrightarrow{T.L.} \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\mu A^\mu}_{A'^\alpha} \underbrace{\Lambda_\alpha{}^\nu A_\nu}_{A'_\alpha} = A^\mu A_\nu \delta^\nu_\mu = A^\mu B_\mu$$

Trrès Trrès... important

le produit scalaire $\boxed{AB \stackrel{df}{\equiv} A^\alpha B_\alpha}$ est invariant relativiste

Rq : $(ds)^2 = X^\alpha X_\alpha$ déjà vu.

d) 4-divergence $\partial_\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

<u>le 4-vecteur Position</u> $X^\alpha = (t, x, y, z) = (t, \vec{x})$ que vous connaissez bien !

<u>le 4-vecteur Impulsion</u>

Définissons $\boxed{p^\alpha \stackrel{df}{=} m \frac{dx^\alpha}{d\tau}}$ pour un objet de masse m.

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (dt)^2 \left(1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right) \longrightarrow d\tau = dt\sqrt{1 - v^2}$$

$dx^\alpha dx_\alpha$ invariant.

$$\longrightarrow \begin{cases} p^0 = m \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m\gamma \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{d\tau} = m \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m\gamma \vec{v} \end{cases}$$

$$\boxed{p^\alpha = (\underbrace{m\gamma}_{\text{énergie relativiste}}, \underbrace{m\gamma\vec{v}}_{\text{impulsion relativiste}})}$$

$$p^2 = p^\alpha p_\alpha = m^2 \quad \text{invariant !}$$

- Dans le repère propre où $\vec{v} = \vec{0}$: $p^0 = m$ dite masse au repos ou masse tout court car...
- ... $p^2 = m^2$ invariant abolit l'idée de "masse qui augmente avec la vitesse". La <u>masse est invariante</u> !
- $p = (E, \vec{p})$ très pratique pour la cinématique.

- propriété non démontrée ici

  Si $P_{initial} = P_{final}$ dans une réaction, alors

  $P'_{initial} = P'_{final}$ partout.

- $\vec{P} = \epsilon \vec{v}$ indépendant de m !

- Si m finie $\begin{cases} \epsilon \longrightarrow \infty \\ |\vec{v}| \to 1 \\ \vec{P} \longrightarrow \vec{\infty} \end{cases}$ dur à satisfaire en période de crise.

<u>Mais</u> si $m = 0$ $\quad \epsilon = |\vec{P}|$ (plutôt $\epsilon = \pm|\vec{P}|$ mais c'est une autre histoire ...)

et ϵ et $\vec{P}$ ne sont finies <u>que</u> si $|\vec{v}| = 1$, on utilise alors plutôt $\epsilon = \hbar\omega$, $\vec{P} = \epsilon\vec{v}$, et tout marche bien. (on retrouve au passage que $c = 1$ n'est la vitesse de la lumière <u>que</u> si $m_{photon} = 0$)

- $m^2 = \epsilon^2 - \vec{P}^2$ ~~invariant~~ $\rightarrow$ $\epsilon^2 = \vec{P}^2 + m^2$ que vous connaissez bien (et $\epsilon = \pm\sqrt{\vec{P}^2 + m^2}$ dans un autre cours fabuleux ☺ !)

<u>Le 4-vecteur Vitesse</u>

m invariant nous permet d'oser $\boxed{P^\alpha = m U^\alpha}$ où

$$U^\alpha \overset{df}{=} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Très pratique : $U^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} ; \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \right)$ dans le référentiel où la particule a la vitesse $\vec{v}$.

Trivialement, $U^2 = 1$ invariant.

le 4-vecteur Accélération.

Toujours plus fou ! $\boxed{W \stackrel{\text{df}}{=} \frac{dU}{d\tau}}$ 4-accélération

$$W^\alpha = \left(\frac{1}{(1-\vec{v}^2)^2}\, \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \; ; \frac{1}{(1-\vec{v}^2)^2}\,(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})\vec{v} + \frac{1}{(1-\vec{v}^2)}\,\frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

qui ne doit pas vous effrayer. Dans le repère propre d'une particule, se résume à : $\left(0,\ \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$.

Très utile pour revisiter Tintin, la guerre des étoiles ou démontrer que les voyages maintiennent la jeunesse, relativement bien sûr.

Le mouvement hyperbolique.

Tintin dans "objectif lune" prévoit de partir dans une fusée à accélération positive "a" constante, puis à mi-chemin, de retourner la fusée, toujours à accélération "a" constante (mais négative vue de la Terre) pour ralentir et arriver sur la Lune à vitesse nulle.

vue de la Terre

Voyons cela ...

Maximum de confort : $a = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

$a = 9{,}81 * \frac{1}{c} = \frac{9.81}{3\,10^8} \simeq 3{,}27\ 10^{-8}\ \mathrm{s^{-1}}$ dans nos unités $c=1$

$a = 1.031 \simeq 1\ \mathrm{an^{-1}}$ (amusant non ?)

Pour Tryphon : $U' = (1, 0, 0, 0)$

$W' = (0, a, 0, 0)$

1 dim. spatiale : l'espace est vide, pas d'obstacle → pas de zigzag.

Rq en passant :

$U^\alpha W_\alpha = 0$ invariant.

Pour la Terre :

$$U'W' = 0 \longrightarrow UW = 0 = U^0W^0 - U^1W^1$$

$$\longrightarrow \frac{W^0}{U^1} = \frac{W^1}{U^0} \longrightarrow \begin{cases} W^0 = kU^1 \\ W^1 = kU^0 \end{cases}$$

$W'W' = -a^2$ et $U'U' = 1$ sont invariants

$$\longrightarrow (W^0)^2 - (W^1)^2 = k^2\Big[\underbrace{(U^1)^2 - (U^0)^2}_{-1}\Big] = -a^2$$

$$\longrightarrow k^2 = a^2$$

$k = +a$ choix arbitraire, justifié par la suite. En fait le problème est mal dimensionné, l'accélération est toujours positive pour Tryphon, mais change de signe au retournement vu de la Terre.

$$\begin{cases} W^0 = aU^1 \\ W^1 = aU^0 = \dfrac{dU^1}{d\tau} = \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dU^1}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right) \overset{\text{p.19}}{=} \dfrac{a}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$$

v est bien la vitesse du vaisseau vu de la Terre ...

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right) = a \longrightarrow \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = at + \text{cste}$$ et si

$t = 0$ au décollage $\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}} = at \iff v^2 = \dfrac{a^2t^2}{1+a^2t^2}$.

$$\longrightarrow \boxed{v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}}}$$

(signe (+) car v a le signe de t)

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{au}{\sqrt{1+a^2u^2}}\,du = \frac{1}{a}\int_0^t \frac{2au}{2\sqrt{1+a^2u^2}}\,d(au)$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\sqrt{1+a^2t^2} - 1\right\}$$

En choisissant $X(0) = 0$ à $t = 0$ (quand $v = 0$)

$$\boxed{X(t) = \frac{1}{a}\left[\sqrt{1+a^2t^2} - 1\right]}$$

dit mvt. hyperbolique.

Vieillissement relatif

Temps propre de Tournesol en fonction du temps sur Terre.

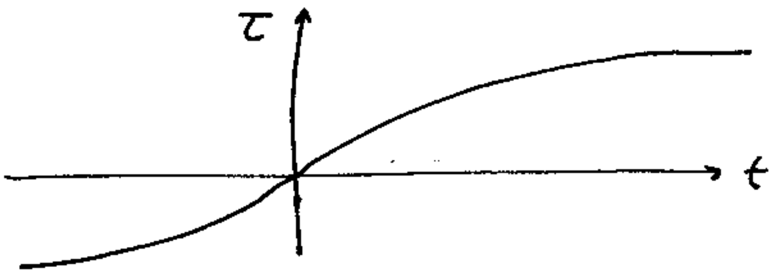
$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 = (dt)^2\,(1 - v^2)$$

$$\longrightarrow d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{a^2t^2}{1+a^2t^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1+a^2t^2}}$$

$$\tau(t) - \tau(0) = \frac{1}{a}\int_0^{at}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

0 qd $t=0$, au décollage.

$$\longrightarrow \boxed{\tau(t) = \frac{1}{a}\,\mathrm{arg\,sh}(at) = \frac{1}{a}\ln\left(at + \sqrt{1+a^2t^2}\right)}$$



l'accélération donne aux voyageurs l'avantage du temps !

Par exemple :

$\begin{cases} t = 1 \text{ mois} \\ \tau \simeq 1 \text{ mois} \end{cases}$ bof, mais $v = 0{,}085$, pas encore relativiste

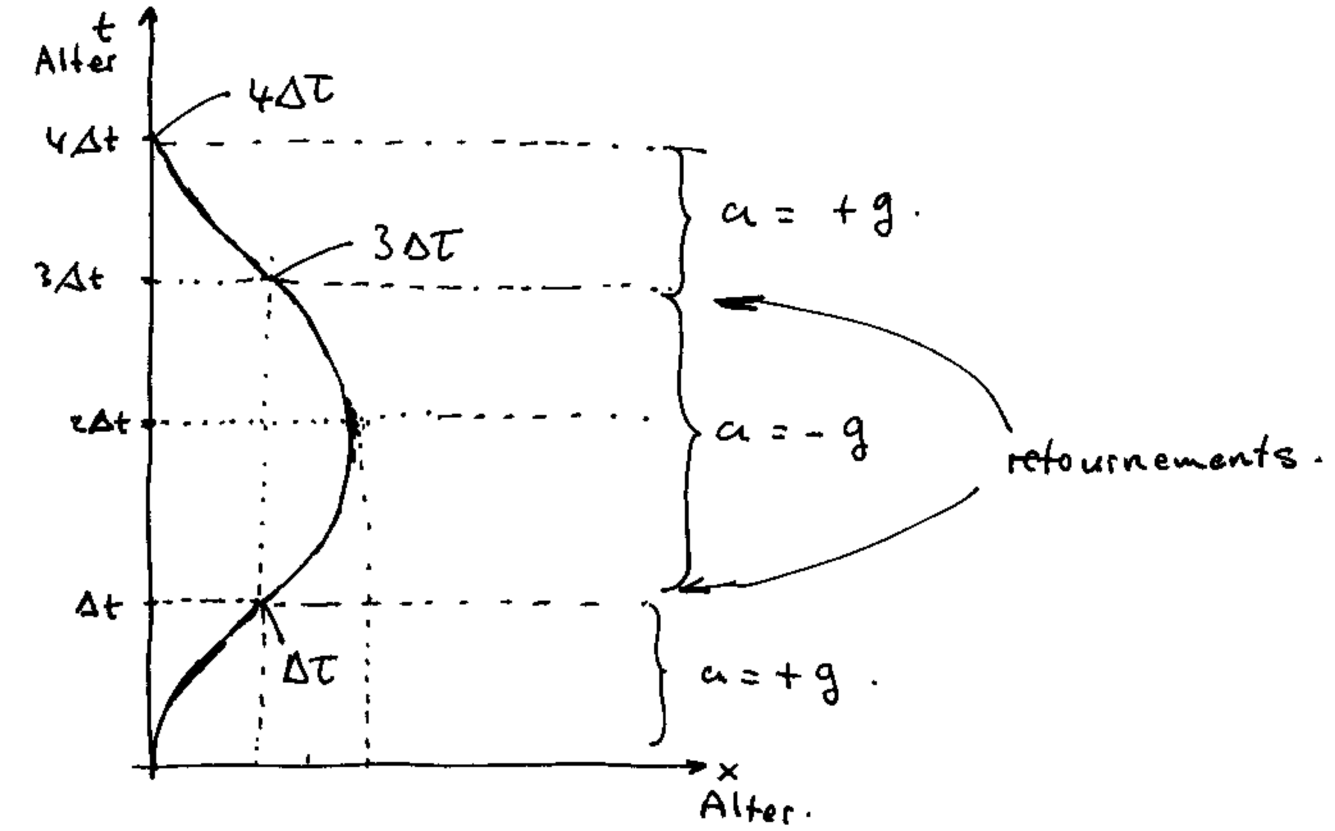
$\begin{cases} t = 3 \text{ mois} \\ \tau = 7.7\ 10^6\,s \end{cases}$ $\longrightarrow$ on gagne $\sim$ 1 jour ...

$\begin{cases} t = 1\,an = 3{,}16\ 10^7 s \sim \pi\, 10^7 s \quad (\smile) \\ \tau = 2.76\ 10^7 s \end{cases}$ $\longrightarrow$ on gagne $\sim$ 1 mois 16 jours

$t = 10$ ans
$\tau = 9{,}27\ 10^7\,s = 2{,}93$ ans cool... ($v = 0{,}995$ ultra relativiste. le temps "s'arrête".)

Les jumeaux

Alter et Ego dérivent de conserve dans l'espace, inertes (v relative $= 0$). Ego décide de quitter Alter et se donne une accélération $a = g$ pendant $\Delta\tau$, puis décide de revenir et retourne sa fusée en maintenant son accélération pendant $2\Delta\tau$. Il décide enfin de rejoindre Alter et pour ralentir, retourne sa fusée en maintenant toujours son accélération pendant $\Delta\tau$. Enfin, il coupe son moteur.



Si l'histoire dure 9 mois pour Alter : $\Delta t = \frac{9}{4}$ mois $= \frac{3}{16}$ ans

$a = 9{,}81\ ms^{-2} \sim 1\ an^{-1}$ (unités $c = 1$)

$$a\tau = \ln\left(at + \sqrt{1 + a^2t^2}\right)$$

$\rightarrow \Delta\tau \simeq 0{,}1864$

$4\Delta t = 0{,}75$ an

$4\Delta\tau = 0{,}7456$ an

Ego est + jeune de $\sim$ 1 jour 14 h.

Deux commentaires :

- Il faut traiter le problème sur Δt et non sur le voyage total car il y a changement de trajectoire !
- Ego est réellement + jeune ! La question ici n'a rien à voir avec la dilatation des temps de la page 10/11 ; on regardait alors des temps relatifs entre repères inertiels, avec une situation parfaitement symétrique (c'est fait pour !).

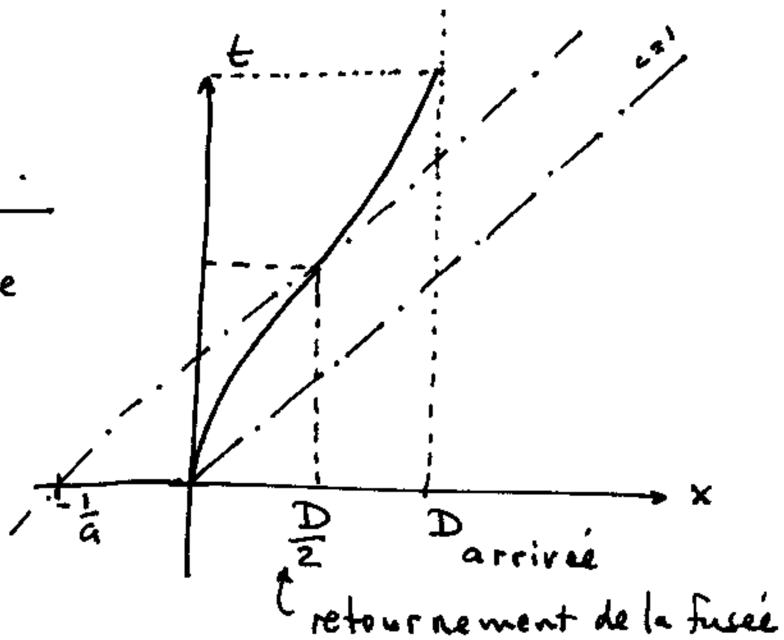
Ici Ego n'est pas inertiel, c'est l'accélération qui est responsable de $\Delta\tau \neq \Delta t$ au retour.

A méditer : il n'y a aucun moyen dans son repère propre de faire la différence entre une accélération due à un moteur et celle due à un champ gravitationnel, ce qui conduit au fameux postulat $m_{grave} = m_{inerte}$.

Tout se passe comme si Ego se plongeait dans un champ gravitationnel et pas Alter, et ça, ça n'est pas symétrique !

Voyage au long cours.

Voyage de Tournesol vu de la Terre



1ère partie du voyage

$$ax = \sqrt{1 + a^2t^2} - 1$$

$$a\frac{D}{2} = \sqrt{1 + \left(a\frac{\Delta t}{2}\right)^2} - 1 \longrightarrow \Delta t \simeq D\left(1 + \frac{2}{aD} + \dots\right)$$

Si Tournesol part au centre galactique : $D \approx 30000$ ans, et à $a = 1\,\text{an}^{-1} \longrightarrow \Delta t = 30000 + 2$ ans !

A mi-chemin : $V = 0{,}99999999778$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 15001{,}5$

ultra-ultra relativiste !

- Le voyage est-il long pour Tryphon ?

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \frac{1}{a} \ln\left(a\frac{\Delta t}{2} + \sqrt{1+a^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}\right)$$

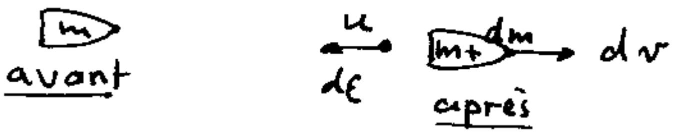
tjs pareil, il faut calculer sur la 1ère moitié.

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta\tau}{2} = 10{,}3 \text{ ans} \qquad \underline{\Delta\tau = 20{,}6 \text{ ans}}$$

Les navigateurs survivent à leurs patrons armateurs $\longrightarrow$ fin du capitalisme !

- Combien ça coûte ?

La fusée, de masse m, vitesse nulle à un instant donné, expulse de l'énergie à la vitesse u et voit sa masse changée en $m+dm$, sa vitesse en dv.



Conservation de p^α

$$\begin{cases} m = d\mathcal{E} + \gamma(m+dm) \\ 0 = -u\,d\mathcal{E} + \gamma(m+dm)\,dv \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-dv^2}}$$

$$\begin{cases} m = d\mathcal{E} + \left(1+\frac{(dv)^2}{2}+\dots\right)(m+dm) \\ 0 = -u\,d\mathcal{E} + (\quad \dots \quad)(m+dm)\,dv \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = d\mathcal{E} + m + dm + \mathcal{O}((dv)^2) \longrightarrow d\mathcal{E} = -dm \\ 0 = -u\,d\mathcal{E} + m\,dv + \mathcal{O}(dv^2). \end{cases}$$

$$\boxed{u\,dm + m\,dv = 0}$$

Si, avant, la fusée allait à la vitesse V vue de la Terre, elle va, après, à $V+dV$

Composition des vitesses : $\quad V + dV = \dfrac{V+dv}{1+V\,dv} \qquad dv \ll 1$

$$\longrightarrow \quad V + dV = (V+dv)(1 - V\,dv + \dots)$$

$$\boxed{\frac{dV}{1-V^2} = dv}$$

Le gain en vitesse ~~devient~~ parait de-en-grand au fur et à mesure que $V \to 1$

$$\frac{dV}{1-V^2} = dv = -u \, \frac{dm}{m}$$

Si on définit la rapidité $\varphi \overset{df}{=} \operatorname{argth}(V) = \operatorname{Ln}\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$

$V = \operatorname{th}\varphi$, $dV = \frac{d\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi}$, et $1-V = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}$.

Rq les rapidités, elles, sont additives.

$$\rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\,\frac{dV}{1-V^2} = \frac{-1}{u}\, d\varphi$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{m_2}{m_1} = e^{-\frac{1}{u}(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$ rapport des masses, avant et après éjection de dE.

1ère moitié du voyage : $\frac{m_{1/2}}{m_i} = e^{-\frac{1}{u}(\varphi_{1/2} - 0)}$ départ : $V=0$

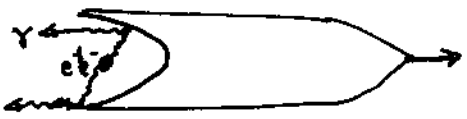
2ème moitié : $u \rightarrow -u$ après retournement

$$\frac{m_f}{m_{1/2}} = e^{-\frac{1}{-u}(0-\varphi_{1/2})}$$ arrivée à $V=0$

$$\longrightarrow \frac{m_f}{m_i} = e^{-\frac{2}{u}\varphi_{1/2}}$$

Si on veut maximiser la propulsion ($\frac{m_f}{m_i}$ max) il faut $\frac{\varphi_{1/2}}{u}$ minimal et donc u maximal.

$\longrightarrow$ propulsion photonique, par ex. $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ au foyer d'une parabole.



$\varphi = \operatorname{Ln}\sqrt{\frac{1+V}{1-V}} = \operatorname{Ln}\sqrt{\frac{(1+v)^2}{1-v^2}}$ qui après un coup de mixer donne

$$\varphi = a\tau \quad ; \quad \varphi_{1/2} = a\,\frac{\Delta\tau}{2} \simeq \operatorname{Ln}(aD)$$

$$\longrightarrow \frac{m_f}{m_i} = e^{-2\operatorname{Ln}(aD)} = \frac{1}{(aD)^2}$$; centre galactic à $a = g = 9{,}81\ ms^{-2}$ $\rightarrow aD \simeq 30000$

$$\longrightarrow \frac{m_f}{m_i} = \frac{1}{9\,10^8} \simeq 10^{-9} \ !$$

Pour amener 1 tonne, il faut 10^9 tonnes, $\sim 1\ km^3$ d'eau au départ... On y est pas encore !

Electrodynamique Classique.

Il y a la physique avant J.C. et la physique après J.C.

Vers 1870 James Clerk Maxwell établit une jolie synthèse du magnétisme et de l'électricité.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}}$$

équations de Maxwell.

où $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

Avec la Force de Lorentz $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})}$ qui s'exerce sur une particule de charge électrique q, masse m, vitesse $\vec{v}$, l'électrodynamique est née !

éq. 1 $\longrightarrow$ $\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}$

éq. 4 $\longrightarrow$ $\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = \begin{cases} 0 & (\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}) \equiv 0)\\ \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\operatorname{div}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$ équation de continuité.

Subtilité lourde de conséquence...

- Les charges présentes dans les éq. de Maxwell (ρ, $\vec{J}$ ...) sont source des champs : charges sources
- q dans la force de Lorentz subit la force, les champs, c'est une charge test.

champ total, excepté celui crée par q_t $\longrightarrow$ $\vec{E} = \frac{1}{q_t}\vec{F}$ $\longleftarrow$ Lorentz, subie par q_t

test (q_t)

$\vec{E} = \frac{q_s}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ dans le cas d'1 charge source.

Impossible de distinguer clairement source et test ; donnera naissance à une cohabitation difficile et à des curiosités peu intuitives : renormalisation infinie des masses, solutions auto-accélérées sous l'action des force de freinage ...

Ici on se contentera d'utiliser les résultats, bonnes référence pour les détails :

- J. D. Jackson, "Classical electrodynamics" 3rd edition,
- R.P. Feynman - le cours - 3 volumes

Les potentiels électromagnétiques.

$\mathrm{div}\vec{B} = 0$ est source (justement non !...) de tous les tracas

$\mathrm{div}\vec{B} = 0$ et $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}) \equiv 0 \longrightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}}$ $A(\vec{r},t)$ potentiel vecteur

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$

et $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}) \equiv 0 \longrightarrow$ $\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{\mathrm{grad}}\,\phi}$ $\phi(\vec{r},t)$ potentiel scalaire

$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{A}) = \rho/\varepsilon_0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \ldots$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{-\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$

... correspondent aux 4 éq. de Maxwell.

Invariance de jauge.

Les transformations
$$\begin{cases} \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' \overset{df}{=} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\chi \\ \phi \longrightarrow \phi' \overset{df}{=} \phi - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

assurent que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont inchangés.

Cette manipulation répond au doux nom de transformation de jauge.

L'électrodynamique est invariante sous les transformations de jauge ou invariante de jauge en jargon.

Utilité : très importante, permet d'étudier différentes solutions aux éq. de Maxwell.

Ici on se placera dans la jauge de Lorentz définie par
$$\boxed{\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \Delta \phi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \dfrac{-\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} \end{cases}$$
2 équations d'onde.

Unités

Par souci de cohérence avec nos transformations de Lorentz, on redéfinit les unités
$$t_{\text{nouveau}} = c\,t_{\text{ancien}}$$

et $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times (c\vec{B})\right)$; $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial (c B)}{\partial (c t)}$

suggèrent $\vec{B}_{\text{nouveau}} = c\,\vec{B}_{\text{ancien}}$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ont la même dimension, plus grande symétrie, comme pour $\vec{x}, t$ précédement.

et aussi $\vec{E}, \vec{B}_{\text{nouveaux}} = \sqrt{\varepsilon_0}\ \vec{E}, \vec{B}_{\text{anciens}}$

$$\rho, \vec{J}, q_{\text{nouveaux}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\ \rho, \vec{J}, q_{\text{anciens}}$$

nous donnent :

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E} = \rho \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ &\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B}) \end{aligned}}$$

équations de Maxwell-Lorentz

Très belle symétrie, juste gatée par l'abscence de monopôle magnétique.
C'est cet amour de la symétrie qui conduit les physiciens à s'obstiner à les chercher !

(en argot : système "$c = \varepsilon_0 = 1$")

Transformations de Lorentz et électrodynamique.

Facile de montrer que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous une transformation de Galilée
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

Conduira Lorentz à chercher (et à trouver) une classe de transformations qui les ~~rendent~~ laissent invariantes, avec le rôle ambigüe qu'y joue "c".

Si la charge d'une particule, comme sa masse, est une propriété intrinsèque définie sans son repère propre, elle devient une caractéristique invariante

Astuce de Feynman : quelques charges dans une boite à chaussures

densité $\rho_0 = \begin{cases} \frac{\Sigma q_i}{V_0} & \text{dans la boite} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ dans le repère propre de la boite.

Dans un autre repère où l'on observe la boite à la vitesse $\vec{\beta}$ on a "contraction des longueurs"

$\longrightarrow$ $V = \sqrt{1-\beta^2}\, V_0$

$\longrightarrow \begin{cases} \rho = \begin{cases} \frac{\Sigma q_i}{V} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 \end{cases} \\ \vec{J} = \rho \vec{\beta} = \rho_0 \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$

sensationnel, on reconnait les composantes contravariantes de la 4-vitesse.

Comme ρ_0 est invariant, on s'empresse de définir une quadri-densité de courant

$$J^\alpha \stackrel{df}{=} \rho_0 U^\alpha \quad ; \quad J^\alpha = (\rho, \vec{J})$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\partial_\alpha J^\alpha = 0}$ équation de continuité réécrite sous forme clairement invariante

les 2 équations d'onde deviennent $\begin{cases} \partial_\alpha \partial^\alpha \phi = J^0 \\ \partial_\alpha \partial^\alpha \vec{A} = \vec{J} \end{cases}$

et si on pose $A^\alpha \stackrel{df}{=} (\phi, \vec{A})$ on a bien

$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = J^\beta$ Hourra !

$\boxed{A^\alpha = (\phi, \vec{A})}$ sont les composantes contravariantes du quadri-potentiel.

J^α, A^α se transforment comme $X^\alpha = (t, \vec{x})$.

$$j^\alpha \xrightarrow{T.L.} j'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, j^\beta$$

$$A^\alpha \xrightarrow{T.L.} A'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, j^\beta$$

On peut travailler...

Au passage, la condition de jauge de Lorentz peut aussi s'écrire sous forme invariante : $\partial_\alpha A^\alpha = 0$.

Pour les champs $\vec{E}, \vec{B}$ c'est un peu plus difficile, on ne peut pas les réduire à des 4-vecteurs.

En définissant $\boxed{F_{\mu\nu} \overset{df}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$ on trouve

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

le tenseur du champ électromagnétique

Ça n'est pas tout... Force de Lorentz ?

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

dans le repère propre de m : $\vec{F} = q\vec{E}$, qui permet de déduire

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = q \, F^{\alpha\beta} \, U_\beta$$

Maxwell
+ Lorentz
+ jauge
+ unités ad-hoc

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu A^\nu &= j^\nu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \frac{dp^\alpha}{d\tau} &= \frac{q}{m} F^{\alpha\beta} p_\beta \end{aligned}}$$

très impressionnant...

Rq/Rappel :

$$\partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Les transformations ?

J^α, A^α trivial. Typiquement si $\overset{(K)'}{\longmapsto} x$ $\quad \overset{(K)}{\longmapsto} x$ à β selon x'

$$\begin{cases} A'_x = \dfrac{A_x + \beta \phi}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \phi' = \dfrac{\phi + \beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

⚠ subtilité : $\vec{A}, \phi$ sont des champs. On transforme les valeurs, pas les fonctions.

en chaque point $(t, \vec{r})$

$F_{\mu\nu}$ un peu plus difficile car $\vec{E}, \vec{B}$ non 4-vecteur, pas plus que $F_{\mu\nu}$. Il faut exprimer explicitement $\vec{E}, \vec{B}$.

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} \longrightarrow F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{calcul}} \begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \dfrac{E_y + \beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ E'_z = \dfrac{E_z - \beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \dfrac{B_y - \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B'_z = \dfrac{B_z + \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

joie ! Les champs se transforment, des champs $\vec{E}, \vec{B}$ apparaissent dès lors que l'on prend la peine de se bouger un peu.

A basse vitesse :
$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B} + o(2) \\ \vec{B}' = \vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{B} + o(2) \end{cases}$$

Si dans (k) $\vec{B} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{B}' = \vec{\beta} \times \vec{E} \\ \vec{E}' = \vec{E} \end{cases} \longrightarrow \vec{B}' = \vec{\beta} \times \vec{E}'$$

$\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ sont orthogonaux dans (k)'

et même chose si $\vec{E} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{E}' = -\vec{\beta} \times \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases} \longrightarrow \vec{E}' = -\vec{\beta} \times \vec{B}'$$

Réciproquement : Si $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ sont orthogonaux, alors il existe un repère $\left(|\vec{\beta}| = \frac{|\vec{B}'|}{|\vec{E}'|}\right)$ où $\vec{B} = \vec{0}$ <u>ou</u> un repère $\left(\beta = \frac{|\vec{E}'|}{|\vec{B}'|}\right)$ où $\vec{E} = \vec{0}$.

Des invariants ?

- $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ clairement invariant qui se révèle facilement $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right)$

Pour finir, utile de connaître :

$$\boxed{\vec{S} \stackrel{df}{=} \vec{E} \times \vec{B}}$$

Vecteur de Poynting. (courant d'énergie)

$$\boxed{u \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)}$$

densité d'énergie du champ électromagnétique.

Rayonnement d'une charge en mouvement. (elec 9

Énôôôrme parachutage, baptisé "rappels", qui n'en sont peut-être pas.

Puissance rayonnée par 1 charge en mvt quelconque

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi} W^4$$

4-accélér. $W^\alpha W_\alpha$ invariante.

La distribution angulaire de cette puissance

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{d^2\hat{R}} = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 \frac{\left|\hat{R}\times\left((\hat{R}-\vec{v})\times\dot{\vec{v}}\right)\right|^2}{(1-\hat{R}\cdot\vec{v})^5}}$$

$\vec{v}$ de la particule,

$\hat{R} = \dfrac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ distance de la particule au point où s'exerce les champs

Cas d'une accélération transverse : $\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$

$$W^\alpha = (0, \gamma^2\dot{\vec{v}}) \longrightarrow \mathcal{P} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi}\gamma^4|\dot{\vec{v}}|^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$|\vec{v}| \ll 1 \qquad \boxed{\mathcal{P} \simeq \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi}|\dot{\vec{v}}|^2}$$

formule de Larmor (à basse vitesse)

Vers l'avant : $\hat{R} = \hat{v}$, $\vec{v} = v\,\hat{v} \longrightarrow \left|\hat{R}\times\left((\hat{R}-\vec{v})\times\dot{\vec{v}}\right)\right|^2 = (1-v)^2\dot{\vec{v}}^2$

(direction du mvt.)

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi}\gamma^4|\dot{\vec{v}}|^2 \\ \frac{d\mathcal{P}}{d^2\hat{R}} &= \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2\frac{\dot{\vec{v}}^2}{(1-v)^3}\end{aligned}}$$

Puissance rayonnée par une part. en mvt., charge q, vitesse $\vec{v}$, accélération transverse

Vers l'avant pour $\dfrac{d\mathcal{P}}{d^2\hat{R}}$.