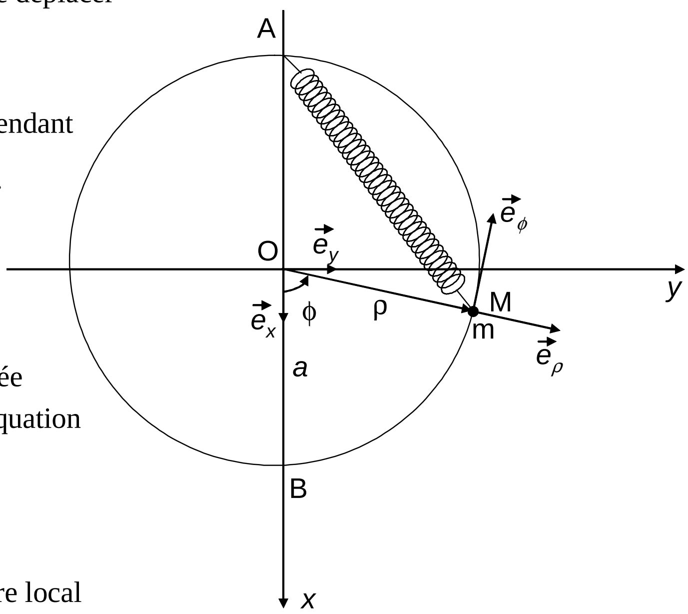
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies

Département de formation
Premier cycle

Année 2004/2005	SESSION DE SEPTEMBRE 2005
ETAPE : PING2, SPC2, CHIM2, 2PREA, MAT2	UE : PIN 201
Epreuve de : Mécanique du point	
Date : Lundi 5 septembre 2005	**Durée : 1h 30**
Documents non autorisés	

Problème



Un mobile ponctuel M de masse m est astreint à se déplacer sur un cercle dans un plan vertical xOy, de centre O et de rayon $\boldsymbol{a}$.

Le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ de l'axe Ox est vertical descendant et le vecteur unitaire $\vec{e}_y$ de l'axe Oy est horizontal.

Le mobile est relié par un ressort au point le plus haut A $(x=-a,\ y=0)$ du cercle subissant ainsi une force de rappel $\vec{F}$ proportionnelle à l'allongement du ressort et dirigée vers le point A. Son expression est donnée par l'équation suivante :

$\vec{F} = k\ \overrightarrow{MA}$, avec $k = \dfrac{mg}{2a}$ (constante de rappel).

Le mouvement du mobile sera étudié dans le repère local polaire $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$, ϕ étant l'angle polaire du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox.

A- Application du principe fondamental de la dynamique

A-1) En admettant que le déplacement du mobile sur le cercle dans le champ de pesanteur ($\vec{g}$) uniforme s'effectue sans frottement, la réaction $\vec{R}$ du cercle au contact avec le mobile se met sous la forme $\vec{R} = -m\ f\ \vec{e}_\rho$, où *f est une grandeur variable inconnue.* Donner l'expression du poids $\vec{P}$ et de la force de rappel $\vec{F}$ dans le repère local. On rappelle :

$$\vec{e}_x = \cos\phi\, \vec{e}_\rho - \sin\phi\, \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_y = \sin\phi\, \vec{e}_\rho + \cos\phi\, \vec{e}_\phi$$

A-2) Expliciter la vitesse $\vec{v}_M$ et l'accélération $\vec{a}_M$ du mobile M sur le cercle dans le repère local.

A-3) Ecrire l'équation vectorielle exprimant le principe fondamental de la dynamique (2$^{\text{ème}}$ loi de Newton).

En projetant sur le repère local :

A-3-1) exprimer $\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$ en fonction de ϕ (équation du mouvement),

A-3-2) expliciter *f* en fonction de ϕ et $\dfrac{d\phi}{dt}$.

B- Energie potentielle

B-1) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle U_p dont dérive $\vec{P}$. Exprimer U_p en coordonnées polaires.

B-2) Vérifier par le calcul que $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle $U_F(\rho,\phi) = \frac{mg}{2}\rho\cos\phi + \frac{mg}{a}\frac{\rho^2}{4} + C_F$, où C_F est une constante. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées polaires $\overrightarrow{grad}\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\rho}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\end{cases}$.

B-3) Exprimer l'énergie potentielle totale sur le cercle $U(\rho = a,\phi)$, *de façon qu'elle s'annule au point* B $(x = a,\ y = 0)$.

C- Puissance, énergie cinétique, énergie mécanique

C-1) Montrer que la puissance de $\vec{R}$ est nulle.

C-2) Exprimer en fonction de ϕ et $\frac{d\phi}{dt}$. la puissance ***P*** de la résultante $\vec{P} + \vec{F}$.

C-3) Expliciter l'énergie cinétique E_c en fonction de $\frac{d\phi}{dt}$.

C-4) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique, E_c. Par comparaison avec l'expression obtenue pour l'énergie potentielle totale (obtenue en B-3), montrer que l'énergie mécanique (totale) ***E*** se conserve**.**

C-5) Expliciter E en fonction de ϕ et $\frac{d\phi}{dt}$.

C-6) Par dérivation de l'expression (C-5) de E, retrouver l'équation du mouvement obtenue en A-3-1

D- Force de réaction

D-1) A l'aide de l'équation obtenue en C-5) et des conditions initiales :

$$\phi(t = 0) = 0, \quad \frac{d\phi}{dt}(t = 0) = \omega_0,$$

établir une relation entre $\frac{d\phi}{dt}$ et ϕ.

D-2) En combinant la relation de D-1) et celle de A-3-2), exprimer la variable *f* en fonction de ϕ *uniquement.*

D-3) Pour quelle valeur de $\phi=\phi_{max}$ la réaction $\vec{R}$ *s'annule-t-elle, si* $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$ *?*