Département de formation
Premier cycle

ANNEE UNIVERSITAIRE 2007/2008
SESSION 1 DE PRINTEMPS

Parcours: PNG2, KHI2 UE : PNG205
Epreuve de : Mécanique du point
Date : Mardi 6 mai 2008 **Heure : 11h00** **Durée : 1h 30**
Documents non autorisés

Epreuve de M. M. Aïche et S. Czajkowski

Question du cours 3pts

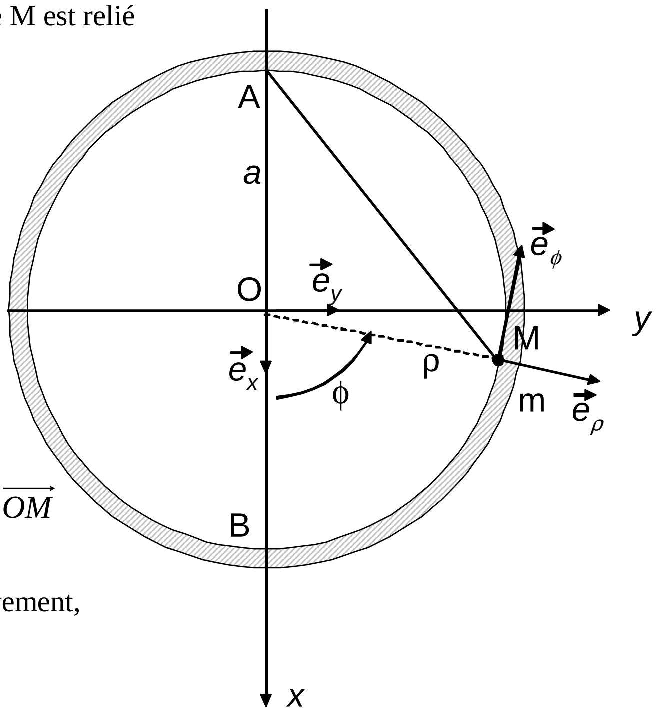
1 1) Définition du moment cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par rapport à un point fixe O.

1 2) En dérivant par rapport au temps le moment cinétique, retrouvez l'expression du moment des forces appliquées au point matériel M.

1 3) Démontrez que le moment cinétique d'un mobile ponctuel soumis à une force centrale, pris au centre des forces, est une constante du mouvement.

Problème

Un mobile ponctuel M de masse m est **astreint** à se déplacer sur la face intérieure d'un anneau circulaire vertical, de centre O et de rayon intérieur a. Le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ de l'axe Ox est vertical descendant et le vecteur unitaire $\vec{e}_y$ de l'axe Oy est horizontal. Le mobile M est relié par un élastique au point le plus haut A $(x=-a,\ y=0)$ à l'intérieur de l'anneau, subissant ainsi une force de rappel $\vec{F}$ proportionnelle à l'allongement de l'élastique et dirigée vers le point A. Son expression est donnée par : $\vec{F} = k\ \overrightarrow{MA}$, avec k la constante de rappel de l'élastique. (On suppose que la longueur à vide de l'élastique est négligeable devant $\|\overrightarrow{MA}\|$).



Le mouvement du mobile M sera étudié dans le repère local polaire $(M;\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi)$, ϕ étant l'angle polaire du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox. On désigne par $\dot{\phi} = \dfrac{d\phi}{dt}$ et $\ddot{\phi} = \dfrac{d^2\phi}{dt^2}$ respectivement, la dérivée première et seconde de ϕ par rapport au temps.

A- Cas statique. Mesure de la constante k de rappel de l'élastique. 2 pts

1 A-1) On suppose au départ que le mobile M est au repos en B et que la force de rappel compense exactement le poids. En traduisant cet équilibre, déterminer l'expression de la constante k en fonction de m, g et a.

1 A-2) Calculez la valeur numérique de k en $N.m^{-1}$. On donne : a=30 cm, m=500 g et g=10 $m.s^{-2}$

B- Application du principe fondamental de la dynamique 6 pts

On écarte à présent le mobile M de sa position d'équilibre d'un angle ϕ par rapport à l'axe vertical.

1.5 B-1) Expliciter le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, la vitesse $\vec{v}_M$ et l'accélération $\vec{\gamma}_M$ du mobile M dans le repère local.

B-2) En admettant que le déplacement du mobile à l'intérieur de l'anneau s'effectue sans frottement,

1.5 donner dans la base locale polaire $(M;\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi)$, l'expression de la force de réaction $\vec{R}$ (de module R), du poids $\vec{P}$ et de la force de rappel $\vec{F}$ s'exerçant sur M et les représenter sur la figure 1 jointe en annexe.

0.5 Pour déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{MA}$ dans la base polaire, on donne :

$\vec{e}_x = \cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{e}_\phi$, $\quad \vec{e}_y = \sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{e}_\phi$

1.5 B-3) Ecrire l'équation vectorielle exprimant le principe fondamental de la dynamique (ou 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton) et la projeter dans la base locale polaire.

1 B-4) En déduire de la relation issue de la projection sur $\vec{e}_\phi$, une équation différentielle reliant $\ddot{\phi}$ et $\sin\phi$ (Équation du mouvement).

C- Approche énergétique 9 pts

1 C-1) Expliciter l'énergie cinétique E_c du mobile M en fonction de $\dot{\phi}$.

1 C-2) Que peut-on dire du travail de la force de réaction $\vec{R}$?

1.5 C-3) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $U_{\vec{P}}(M)$ du mobile au point M en fonction de ϕ. On prendra l'origine des énergies potentielles de pesanteur en B ($U_{\vec{P}}(B)=0$).

1 C-4) Vérifier par le calcul que la force de rappel $\vec{F}$ du mobile M à l'intérieur de l'anneau dérive de l'énergie potentielle $U_{\vec{F}}(\rho,\phi) = k\,a\,\rho\cos\phi + k\dfrac{\rho^2}{2} + C_F$, où C_F est une constante. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées polaires : $\overrightarrow{grad}\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\rho}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\end{cases}$ *ou encore* $\overrightarrow{grad} = \vec{e}_\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\phi\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$.

1.5 C-5) Déterminer la constante C_F de façon que l'énergie potentielle totale $U(\rho=a,\phi)$, s'annule au point A $(x=-a,\ y=0)$. En déduire l' expression U de l'énergie potentielle totale.

2 C-6) En supposant que l'énergie mécanique **se conserve au cours du temps**, en déduire une équation différentielle reliant $\ddot{\phi}$ et $\sin\phi$.

1 C-7) En comparant cette équation à celle établie à la question B-4), discuter la validité de l'hypothèse d'un système conservatif.

FIN