| | |
|---|---|
| UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies<br>Département de formation<br>Premier cycle | Année 2005/2006 SESSION DE MAI 2006<br><br>**ETAPE : PING2, SPC2, CHIM2, 2PREA, MAT2**<br>**Code UE** : PIN 201<br>**Epreuve de : Mécanique du point**<br>**Date : Lundi 29 Mai 2005** **Durée : 1h 30**<br>**Heure : 11h00 – 12h30**<br><br>Documents non autorisés |

Dans un repère cartésien orthonormé R$(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, on étudie le mouvement d'une particule astreinte à se déplacer **sans frottement** sur la surface interne (S) d'un cône renversé fixe de sommet O et d'axe $(O,\vec{e}_z)$. On assimile cette particule à un point matériel M, de masse m.

On utilise un système de coordonnées cylindriques ρ, φ, z et le repère local orthonormé correspondant R$_l(M,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z)$ (figure 1), de sorte que :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z}$$

Les coordonnées de tout point M ∈ (S) satisfont la relation $\rho = \alpha z$ quelque soit ϕ, $(\alpha \text{ constante positive, z} > 0)$.

La particule est soumise exclusivement à deux forces :

- son poids $\vec{P}$
- et la force de contact ou de réaction $\vec{R}$ exercée par la surface interne (S) du cône.

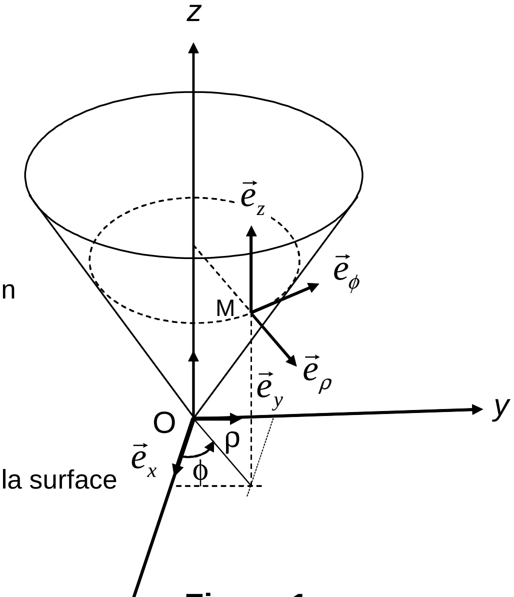


**Figure 1.**

## I- Principe Fondamental de la Dynamique

a) Pour tout point se déplaçant sur (S), on utilisera $\rho$, $\phi$ et leurs dérivées par rapport au temps comme variables indépendantes : donner l'expressions des vecteurs $\vec{v}_M$ *et* $\vec{\gamma}_M$.

b) Que peut-on dire du produit scalaire $\vec{R}.\vec{v}_M$ ? Montrer que l'une des composantes de la réaction $\vec{R}$ satisfait l'équation $R_\phi = 0$, et en déduire une relation entre les composantes $R_\rho$ et $R_z$.

c) Écrire sous sa forme vectorielle le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la particule. En déduire, par projection sur la base $(M,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z)$, trois équations différentielles du mouvement en fonction de $R_\rho$, $R_z$, ρ, ϕ et de leurs dérivées.

d) Montrer que $\rho^2\dot{\phi}$ est une grandeur qui ne dépend pas du temps. On appelle K cette grandeur dans la suite du problème.

e) À l'aide de la relation entre $R_\rho$ et $R_z$ obtenue en b), éliminer $R_\rho$ et $R_z$ des équations du mouvement obtenues en c) et trouver l'équation différentielle du mouvement en fonction de $\rho$, $\phi$, et de leurs dérivées (premières et secondes) par rapport au temps.

f) En utilisant le résultat trouvé en d), exprimer l'équation précédente uniquement en fonction de $\rho$ et de ses dérivées (premières et secondes).

g) À quelles conditions peut on obtenir une trajectoire circulaire. Montrer alors, que le module de la vitesse reste constant, et le calculer. On appelle $v_C$ cette valeur.

## II- Etude énergétique

a) Exprimer l'énergie cinétique $E_C$ en fonction de $\rho$, $\phi$, et de leurs dérivées par rapport au temps.

b) Exprimer l'énergie potentielle $E_P$ en fonction de $\rho$ (on prendra l'origine de l'énergie potentielle au sommet du cône O).

c) L'énergie mécanique totale $E_C + E_P = E$ du point M se conserve-t-elle ? Le justifier.

d) En introduisant la relation trouvée en I-d), exprimer l'énergie totale en fonction de $\rho$ et de sa dérivée.

e) En dérivant l'énergie totale par rapport au temps, retrouver l'équation différentielle satisfaite par $\rho$ et ses dérivées obtenue en I-f).

## III- Etude du Moment cinétique

On considère un point C situé sur l'axe du cône $(O,\vec{e}_z)$ à une hauteur $h$, c'est à dire que $\overrightarrow{OC} = h\vec{e}_z$.

a) Écrire les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$ dans la base $\left(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z\right)$.

b) Rappeler la définition du moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ par rapport à C du point M, animé d'une vitesse $\vec{v}$.

c) Exprimer les composantes du moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ en fonction de $\rho$, $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$, $\alpha$ et $h$.

d) Montrer que la projection du moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ sur l'axe $(O,\vec{e}_z)$ est une constante du mouvement. Que peut-on dire de la projection sur l'axe $(O,\vec{e}_z)$ du Moment de la résultante des forces appliquées au point M ?

- Fin -