Département de formation
Premier cycle

ANNEE UNIVERSITAIRE 2007/2008
SESSION 2 DE PRINTEMPS

Parcours: PNG2, KHI2 UE : PNG205
Epreuve de : Mécanique du point
Date : Mardi 24 juin 2008 **Heure : 8h30** **Durée : 1h 30**
Documents non autorisés

Epreuve de M. M. Aïche et S. Czajkowski

Questions du cours

1) Rappeler le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ soumis à une force $\vec{F}$.
2) Pourquoi est ce que le travail d'une force qui dérive d'une énergie potentielle est indépendant du chemin suivit. Justifier votre réponse.

Problème

Une particule de masse *m*, assimilée à un point matériel M est soumise de la part de l'origine O d'un repère galiléen à une force centrale de la forme :

$$\vec{f} = \left(\frac{\mathrm{mA}}{\rho} - Bm\rho\right)\vec{e}_{\rho}$$

ou ρ est la distance du point M à l'origine O et A , B deux constantes positives.

A l'instant *t=0*, la particule incidente se trouve à une distance $\rho = \rho_0$ et a une vitesse $\vec{v}_0$ de direction parallèle à l'axe Ox et coupant Oy à l'ordonnée *b* (*b*>0) (Figure 1).

On traitera le problème en coordonnées polaires (ρ,ϕ) avec $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et ϕ désigne l'angle polaire compris entre l'axe Ox et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Dans tout le problème, on négligera la force de pesanteur et les éventuels frottements.

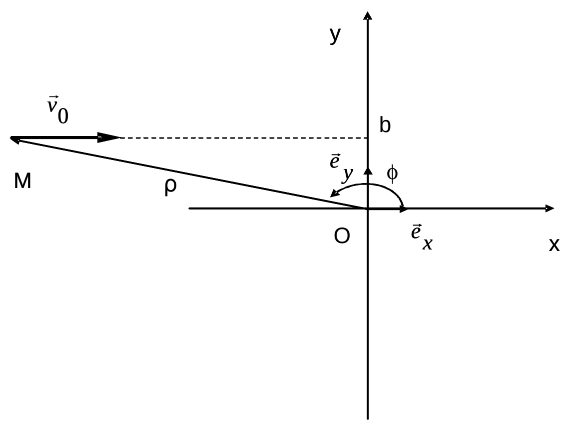

Fig.1

1°- Quelles conditions doit satisfaire la force $\vec{f}$ pour que celle-ci soit répulsive ? attractive ?

2°- Comment définit-on une position d'équilibre ? Donner l'expression de la position d'équilibre $\rho = \rho_E$ de la particule.

3°- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_p dont dérive cette force. Par convention, on prendra $E_p = 0$ pour $\rho = \rho_E$.

4°- Le système est-il conservatif ?

Donner alors l'expression de l'énergie mécanique E de la particule en fonction de la distance ρ et de la vitesse v de la particule. Donner la valeur de E en utilisant les conditions initiales de la particule.

5°- Montrer que le produit vectoriel $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse de la particule, est une constante du mouvement. En utilisant les conditions initiales, montrer que le vecteur $\vec{C}$ se met sous la forme $\vec{C} = C\,\vec{e}_z$ avec $C = -b\,v_0$ et $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy.

On rappelle que : $\frac{d}{dt}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$

En déduire que le moment $M_O(\vec{f})$ de la force $\vec{f}$ par rapport à O est nul.

6°- Donner l'expression des vecteurs position et vitesse, $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{v}$, dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$.

7°- Donner l'expression générale du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de M par rapport à O en fonction de m, ρ *et* $\dot{\phi}$.

8°- Si on suppose que dans l'expression de la force $\vec{f}$ la constante *A=0*, montrer que ρ vérifie l'équation ci-dessous : (On pourra utiliser la conservation de l'énergie mécanique et les résultats des questions précédentes)

$$v_0^2 - \frac{v_0^2\, b^2}{\rho^2} + \mathrm{B}(\rho_0^2 - \rho^2) = \dot{\rho}^2$$

9°- Déterminer alors l'expression de la distance minimale d'approche $\rho = \rho_m$ entre la particule incidente et le point O.

- Fin -