Département de formation
Premier cycle

Année 2006/2007 SESSION DE JUIN 2007

ETAPE : PING2, SPC2, CHIM2, PRE2, MAT2

UE : PIN 201

Epreuve de : Mécanique du point

Date : 27 Juin 2007 **Durée : 1h 30**

Documents non autorisés

Une particule de masse m, assimilée à un point matériel M est soumise de la part de l'origine O d'un repère galiléen à une force centrale de la forme :

$$\vec{f} = Km\frac{\overrightarrow{OM}}{\rho^3}$$

ou $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position, ρ la distance du point M au point O et K une constante. A grande distance de l'origine O, la particule incidente est en mouvement rectiligne uniforme et se déplace à la vitesse $\vec{v}_0$ sur une droite parallèle à l'axe Ox et coupant Oy à l'ordonnée b (b>0) (Figure 1).

On traitera le problème en coodonnées polaires (ρ,ϕ) avec $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et ϕ désigne l'angle polaire compris entre l'axe Ox et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Dans tout le problème, on négligera la force de pesanteur et les éventuels frottements.

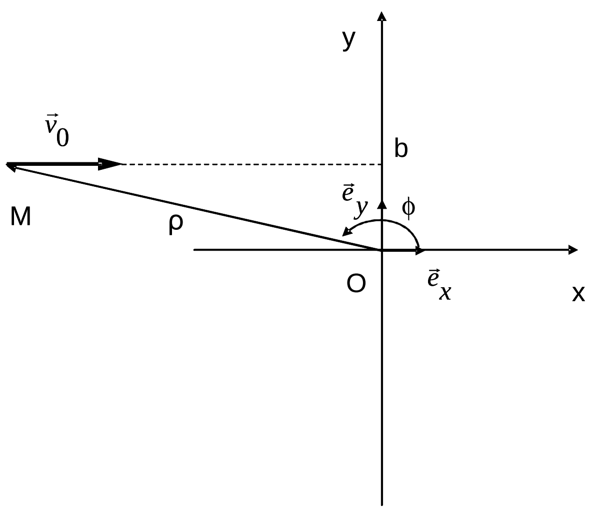

Fig.1

1) Quel doit être le signe de K pour que cette force soit répulsive ?

2) En supposant que cette force dérive d'une énergie potentielle E_p, donnez l'expression de cette énergie sachant que E_p tend vers 0 à grande distance.

3) Donnez l'expression de l'énergie mécanique E de la particule en fonction de la distance OM= ρ et de sa vitesse v. Pour quelle raison E est-elle constante ? Donner la valeur de E en utilisant les conditions initiales de la particule.

4) Montrer que le produit vectoriel $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ par rapport à O, où $\vec{v}$ désigne la vitesse de la particule, est une constante du mouvement. En utilisant les conditions initiales, montrer que le vecteur $\vec{C}$ se met sous la forme $\vec{C} = C\,\vec{e}_z$ avec $C = -b\,v_0$ et $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy.

5) Donnez l'expression des vecteurs positions et vitesse, $\overrightarrow{OM}\ et\ \vec{v}$, dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$.

6) Donner l'expression générale du moment cinétique σ de M par rapport à O en fonction de m, $\rho\ et\ \dot{\phi}$.

7) En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que ρ vérifie l'équation suivante : $v_0^2 - 2\,\dfrac{K}{\rho} - \dfrac{v_0^2\,b^2}{\rho^2} = \dot{\rho}^2$

8) En supposant K > 0, déterminer la distance minimale d'approche $\rho = \rho_m$ entre la particule incidente et le point O. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\phi}_m$ au point correspondant à $\rho = \rho_m$?

9) En examinant le cas particulier ou b=0, monter que la particule incidente à une vitesse nulle à la distance $\rho = \rho_m$. On pourra utiliser la conservation de l'énergie mécanique. Décrire dans ce cas le mouvement de la particule incidente.

- Fin -