

Corrigé

- 1) Quel doit être le signe de K pour que cette force soit répulsive ?

Rép : $K > 0$ (0,5 pt)

- 2) En supposant que cette force dérive d'une énergie potentielle E_p , donnez l'expression de cette énergie sachant que E_p tend vers 0 à l'infini.

Rép : $\vec{f} = -\text{grad } E_p \Rightarrow K \frac{m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$ ($\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$) $E_p = \frac{Km}{r} + C$ (1 pt)

Or $r \rightarrow \infty \Rightarrow E_p \rightarrow 0 \Rightarrow C=0$ d'où $E_p = \frac{Km}{r}$ (1 pt)

- 3) Donnez l'expression de l'énergie mécanique E de la particule en fonction de la distance $OM=r$ et de sa vitesse v . Pour quelle raison E est-elle constante ? Donner la valeur de E en utilisant les conditions initiales de la particule.

Rép : $E = E_p + E_c = \frac{Km}{r} + \frac{1}{2}mv^2$ (1 pt)

La force exercée dérive d'une énergie potentielle et il y a absence de frottements : E est donc une constante du mouvement. (1 pt)

Loin de l'origine O :

($r \rightarrow \infty$) $\Rightarrow E_p \rightarrow 0$ et la vitesse $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_0$ d'où $E = \frac{1}{2}m v_0^2$ (1 pt)

- 4) Montrer que le produit vectoriel $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ par rapport à O , est une constante du mouvement. En utilisant les conditions initiales, montrer que le vecteur \vec{C} se met sous la forme $\vec{C} = C \vec{e}_z$ avec $C = -b v_0$ et \vec{e}_z un vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy .

Rép : $\vec{C} = C \vec{e}_z$ est un vecteur constant revient à montrer que $\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{0}$

$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \wedge \frac{\vec{f}}{m} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C}$ est un vecteur constant (1 pt)

Loin de l'origine O , la vitesse du point matériel M est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et son vecteur position à pour expression : $\vec{r} = x \vec{e}_x + b \vec{e}_y$ (l'ordonnée $y=b$ car à l'infini le mvt de M est rectiligne uniforme parallèle à l'axe Ox). (1 pt)

D'où $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = bv_0 (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x) = -bv_0 \vec{e}_z$ (1 pt)

- 5) Donnez l'expression des vecteurs positions et vitesse, \vec{r} et \vec{v} , dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$.

Rép : $\vec{r} = r \vec{e}_r$ (1 pt) et $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$ (1 pt)

- 6) Donner l'expression générale du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de M par rapport à O en fonction de m, r et $\dot{\phi}$.

Rép : $\vec{\sigma} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi) = m r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z = \vec{\sigma} \vec{e}_z$ (1 pt)

- 7) En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que r vérifie l'équation

suivante : $v_0^2 - 2 \frac{K}{r} - \frac{v_0^2 b^2}{r^2} = \dot{r}^2$

Rép :

La conservation de l'énergie mécanique donne l'expression vu précédemment :

$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{Km}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{2K}{r} \Rightarrow v_0^2 - \frac{2K}{r} = v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2$ (1 pt)

d'autre part : $\vec{\sigma} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z = m \vec{C} = -m b v_0 \vec{e}_z \Rightarrow r \dot{\phi} = -\frac{bv_0}{r}$ (2) (1 pt)

en remplaçant (2) dans (1) on obtient : $v_0^2 - \frac{2K}{r} - \left(\frac{bv_0}{r}\right)^2 = \dot{r}^2$ (3) (1 pt)

- 8) En supposant $K > 0$, déterminer la distance minimale d'approche $r = r_m$ entre la particule incidente et le point O. On cherchera à résoudre l'équation $\frac{dr}{dt} = 0$. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\phi}_m$ au point correspondant à $r = r_m$.

Rép : La particule incidente vient de l'infini, s'approche du centre de force O puis est diffusée vers l'infini. Il existe donc une distance minimale d'approche r_m au cours du temps qui se traduit mathématiquement par la résolution de l'équation : $\frac{dr}{dt} = 0$.

L'équation (3) devient : $v_0^2 - \frac{2K}{r} - \left(\frac{bv_0}{r}\right)^2 = 0$ (1 pt)

en multipliant par r^2 : $v_0^2 r^2 - 2Kr - b^2 v_0^2 = 0$ (1 pt)

on arrive à une équation du second degré dans la solution unique (car r doit nécessairement être positif) :

$r_m = \frac{K}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$ (1 pt)

Nous avons montré en (2) que $r \dot{\phi} = -\frac{bv_0}{r}$ pour $r = r_m$ on obtient : $\dot{\phi}_m = -\frac{bv_0}{r_m^2}$ (0,5 pt)

D'où $\dot{\phi}_m = -\frac{bv_0}{\left(\frac{K}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{v_0^2}\right)^2 + b^2}\right)^2}$ (0,5 pt)

9) En examinant le cas particulier où $b=0$, montrer que la particule incidente à une vitesse nulle à la distance $r = r_m$. On pourra utiliser la conservation de l'énergie mécanique. Décrire brièvement le mouvement de la particule incidente.

D'après la relation obtenue en (1) résultant de la conservation de l'énergie mécanique, nous avons : $v_0^2 = v^2 + \frac{2K}{r} \Rightarrow v^2 = v_0^2 - \frac{2K}{r}$, ceci $\forall r$. En particulier, pour $b=0$ et $r = r_m$ on a :

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2K}{r_m} = v_0^2 - \frac{2K}{\left(\frac{K}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{v_0^2} \right)^2 + b^2} \right)} = v_0^2 - \frac{2K}{\left(\frac{K+K}{v_0^2} \right)} = v_0^2 - v_0^2 = 0$$

d'où

$$v = 0$$

1 pt

la particule à une trajectoire rectiligne, elle se rapproche du centre attractif O jusqu'à une distance minimale r_m , où sa vitesse s'annule puis rebrousse chemin en mvt accéléré jusqu'à l'infini où le mvt redevient uniforme. (l'action de la force f s'annule à l'infini).

0,5 pt