UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies Département de formation Premier cycle	Année 2005/2006 SESSION DE MAI 2006 **ETAPE : PING2, SPC2, CHIM2, 2PREA, MAT2** **Code UE** : PIN 201 **Epreuve de : Mécanique du point** **Date : Lundi 29 Mai 2005** **Durée : 1h 30** **Heure : 11h00 – 12h30** Documents non autorisés

Dans un repère cartésien orthonormé R$(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, on étudie le mouvement d'une particule astreinte à se déplacer **sans frottement** sur la surface interne (S) d'un cône renversé fixe de sommet O et d'axe $(O,\vec{e}_z)$. On assimile cette particule à un point matériel M, de masse m.

On utilise un système de coordonnées cylindriques ρ, φ, z et le repère local orthonormé correspondant R$_l(M,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z)$ (figure 1), de sorte que :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z}$$

Les coordonnées de tout point M ∈ (S) satisfont la relation $\rho = \alpha z$ quelque soit ϕ, (α constante positive, $z > 0$).

La particule est soumise exclusivement à deux forces :

- son poids $\vec{P}$
- et la force de contact ou de réaction $\vec{R}$ exercée par la surface interne (S) du cône.

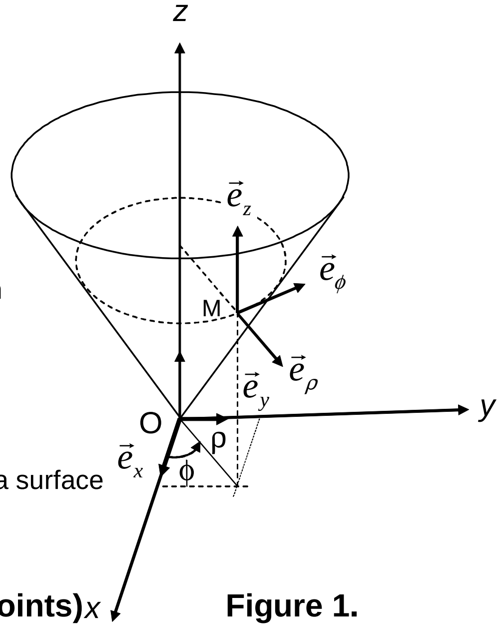

Figure 1.

I- Principe Fondamental de la Dynamique (9 points)

a) Pour tout point se déplaçant sur (S), on utilisera ρ, ϕ et leurs dérivées par rapport au temps comme variables indépendantes : donner l'expressions des vecteurs $\vec{v}_M$ et $\vec{\gamma}_M$.

On sait que $\vec{v}_M = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dfrac{\dot{\rho}}{\alpha}\vec{e}_z = \dot{\rho}(\vec{e}_\rho + \dfrac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi$

$$\boxed{\vec{v}_M = \dot{\rho}(\vec{e}_\rho + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi} \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$\vec{\gamma}_M = \ddot{\rho}(\vec{e}_\rho + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \dot{\rho}\,\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \frac{\ddot{\rho}}{\alpha}\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_M = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \frac{\ddot{\rho}}{\alpha}\vec{e}_z} \quad 0,5 \text{ pt}$$

b) Que peut-on dire du produit scalaire $\vec{R}.\vec{v}_M$? Montrer que l'une des composantes de la réaction $\vec{R}$ satisfait l'équation $R_\phi = 0$, et en déduire une relation entre les composantes R_ρ et R_z.

Sans frottement, la force de réaction $\vec{R}$ est perpendiculaire à la surface (S) du cône. Par ailleurs, on sait que le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire. Comme cette dernière est inscrite sur la surface (S), le vecteur vitesse est donc tangent à (S) en tout point.

Le produit scalaire $\boxed{\vec{R}.\vec{v}_M = \vec{0}. \qquad (1)}$ 0,5 pt

Dans la base locale la réaction $\vec{R}$ s'écrit : $\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\phi \vec{e}_\phi + R_z \vec{e}_z$

Le vecteur unitaire $\vec{e}_\phi$ est tangent à (S) en tout point :

$\vec{R}.\vec{e}_\phi = \vec{0} \Leftrightarrow \left[R_\rho \vec{e}_\rho + R_\phi \vec{e}_\phi + R_z \vec{e}_z\right]\vec{e}_\phi = R_\phi = 0$ 0,5 pt

Revenons à l'équation (1) :

$$\vec{R}.\vec{v}_M = \vec{0}. \Leftrightarrow \left[R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z\right]\left[\dot{\rho}\,(\vec{e}_\rho + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi\right] = \dot{\rho}R_\rho + \frac{\dot{\rho}}{\alpha}R_z = 0$$

Comme cette équation est vraie $\forall \dot{\rho}$, $\boxed{R_\rho + \frac{1}{\alpha}R_z = 0 \qquad (2)}$ 1 pt

c) Écrire sous sa forme vectorielle le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la particule. En déduire, par projection sur la base $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, trois équations différentielles du mouvement en fonction de R_ρ, R_z, ρ, ϕ et de leurs dérivées.

Deux forces sont appliquées au point M, tel que :

$\vec{\mathrm{P}} + \overline{\mathrm{R}} = \mathrm{m}\vec{\gamma}_\mathrm{M}$ 0,5 pt

Dans la base $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$:

$$-mg\vec{e}_z + R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z = m\left((\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \frac{\ddot{\rho}}{\alpha}\vec{e}_z\right)$$ 0,5 pt

$$\begin{cases} R_\rho = m\,(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) & (3) \\ 0 = m\,(2\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) & (4) \\ R_z - mg = m\dfrac{\ddot{\rho}}{\alpha} & (5) \end{cases}$$ 1 pt

d) Montrer que $\rho^2\dot{\phi}$ est une grandeur qui ne dépend pas du temps. On appelle K cette grandeur dans la suite du problème.

Montrons que la dérivée par rapport au temps de $\rho^2\dot{\phi}$ est nulle :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\rho^2\dot{\phi}) = 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi} = \rho(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) = 0$ d'après (4).

$\rho^2\dot{\phi} = K$ 1 pt

e) À l'aide de la relation entre R_ρ et R_z obtenue en b), éliminer R_ρ et R_z des équations du mouvement obtenues en c) et trouver l'équation différentielle du mouvement en fonction de ρ, ϕ, et de leurs dérivées (premières et secondes) par rapport au temps.

D'après la relation (2) : $R_\rho + \frac{1}{\alpha} R_z = 0$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}_M$

En utilisant le système d'équation (4) et (5) :

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) + \frac{1}{\alpha}\left(m\frac{\ddot{\rho}}{\alpha} + mg\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot{\rho}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - \rho\,\dot{\phi}^2 + \frac{g}{\alpha} = 0 \qquad (6)}$$

1 pt

f) En utilisant le résultat trouvé en d), exprimer l'équation précédente uniquement en fonction de ρ et de ses dérivées (premières et secondes).

On sait que $\rho^2\dot{\phi} = K$ en remplaçant dans (6) :

$$\boxed{\ddot{\rho}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{K^2}{\rho^3} + \frac{g}{\alpha} = 0 \qquad (7)}$$

1 pt

g) À quelles conditions peut on obtenir une trajectoire circulaire. Montrer alors, que le module de la vitesse reste constant, et le calculer. On appelle v_C cette valeur.

Si la trajectoire du mobite est circulaire cela signifie que $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. L'équation (7) devient :

$$-\frac{K^2}{\rho^3} + \frac{g}{\alpha} = 0 \Rightarrow \rho^3 = \frac{\alpha K^2}{g} \Rightarrow \boxed{\rho = \text{constante} = \sqrt[3]{\frac{\alpha K^2}{g}}}$$

0,5 pt

D'autre part $\vec{v}_M = \dot{\rho}(\vec{e}_\rho + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi$ qui devient :

$$\vec{v}_M = \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi \Rightarrow \|\vec{v}_M\| = \rho\dot{\phi} = \rho\frac{K}{\rho^2} = \frac{K}{\rho} = K\sqrt[3]{\frac{g}{\alpha K^2}} \Rightarrow \boxed{v_C = \|\vec{v}_M\| = \sqrt[3]{\frac{gK}{\alpha}}}$$

0,5 pt

II- Etude énergétique (5 points)

a) Exprimer l'énergie cinétique E_C en fonction de ρ, ϕ, et de leurs dérivées par rapport au temps.

$$E_C = \frac{1}{2}m\vec{v}_M^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}(\vec{e}_\rho + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \rho^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \rho^2\dot{\phi}^2\right) \qquad (7)}$$

1 pt

b) Exprimer l'énergie potentielle E_P en fonction de ρ (on prendra l'origine de l'énergie potentielle au sommet du cône O).

L'énergie potentielle gravitationnelle pour $\vec{g}$ constant a pour expression :
$\mathrm{E_P} = mgz + \text{constante}$. Au point O, $z = 0$ et $\mathrm{E_P} = 0 \Rightarrow \text{constante} = 0$

$$\boxed{E_P = mg\frac{\rho}{\alpha} \qquad (8)}$$

1 pt

c) L'énergie mécanique totale $E_C + E_P = E$ du point M se conserve-t-elle ? Le justifier.

La seule force qui travaille est une force qui dérive d'une énergie potentielle. Cette force étant conservative, le système est donc conservatif. Par conséquent l'énergie totale E est une constante du mouvement

1 pt

d) En introduisant la relation trouvée en I-d), exprimer l'énergie totale en fonction de ρ et de sa dérivée.

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\rho^2\dot{\phi}^2\right)+mg\frac{\rho}{\alpha}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\frac{K^2}{\rho^2}\right)+mg\frac{\rho}{\alpha} \qquad (9)}$$

1 pt

e) En dérivant l'énergie totale par rapport au temps, retrouver l'équation différentielle satisfaite par ρ et ses dérivées obtenue en I-f).

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\frac{K^2}{\rho^2}\right)+mg\frac{\rho}{\alpha}\right] = 0 \quad (\text{système conservatif})$$

$$\frac{1}{2}m\left(2\dot{\rho}\ddot{\rho}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{2K^2}{\rho^3}\dot{\rho}\right)+mg\frac{\dot{\rho}}{\alpha} = 0$$

$$\forall\dot{\rho},\quad \dot{\rho}\left[\ddot{\rho}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{K^2}{\rho^3}+g\frac{1}{\alpha}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\rho}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{K^2}{\rho^3}+\frac{g}{\alpha} = 0 \qquad \text{cqfd}}$$

1 pt

III- Etude du Moment cinétique (6 points)

On considère un point C situé sur l'axe du cône $(O,\vec{e}_z)$ à une hauteur h, c'est à dire que $\overrightarrow{OC} = h\vec{e}_z$.

a) Écrire les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$ dans la base $\left(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z\right)$.

$$\overrightarrow{CM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z - h\,\vec{e}_z = \rho\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{CM} = \rho\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\vec{e}_z$$

1 pt

b) Rappeler la définition du moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ par rapport à C du point M, animé d'une vitesse $\vec{v}$.

$$\vec{\sigma}_C = \overrightarrow{CM} \wedge m\,\vec{v}$$

1 pt

c) Exprimer les composantes du moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ en fonction de ρ, $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$, α et h.

$$\vec{\sigma}_C = \overrightarrow{CM} \wedge m\,\vec{v} = \left(\rho\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\vec{e}_z\right) \wedge m\left(\dot{\rho}\,(\vec{e}_\rho + \frac{1}{\alpha}\vec{e}_z) + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi\right)$$

$$\vec{\sigma}_C = m\rho^2\dot{\phi}(\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\phi) + m\frac{\rho\dot{\rho}}{\alpha}(\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_z) + m\left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\dot{\rho}(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho) + m\left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\rho\dot{\phi}(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\phi)$$

$$\vec{\sigma}_C = m\rho^2\dot{\phi}\vec{e}_z - m\frac{\rho\dot{\rho}}{\alpha}\vec{e}_\phi + m\left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\dot{\rho}\vec{e}_\phi - m\left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\rho\dot{\phi}\vec{e}_\rho$$

1,5 pt

$$\boxed{\vec{\sigma}_C = m\rho^2\dot{\phi}\,\vec{e}_z - m\,h\dot{\rho}\,\vec{e}_\phi - m\left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\rho}$$

d) Montrer que la projection du moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ sur l'axe $(O,\vec{e}_z)$ est une constante du mouvement. Que peut-on dire de la projection sur l'axe $(O,\vec{e}_z)$ du Moment de la résultante des forces appliquées au point M ?

La projection du moment cinétique sur l'axe $(O,\vec{e}_z)$ est donnée par :

$$\sigma_{CZ} = \vec{\sigma}_C.\vec{e}_z = \left(m\rho^2\dot{\phi}\,\vec{e}_z - m\,h\dot{\rho}\,\vec{e}_\phi - m\left(\frac{\rho}{\alpha} - h\right)\rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\rho\right).\vec{e}_z = m\rho^2\dot{\phi} = m\,K = \text{constante}$$

1 pt

$\sigma_{CZ} = m\,K,$ la composante en z du moment cinétique est une constante du mouvement.

Par application du théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_C}{\mathrm{dt}} = \textit{Moment des forces appliquées par rapport au}\ \text{point}\ C = \vec{M}_{(\vec{P}+\vec{R})/C}$$

0,5 pt

Compte tenu de ce qui précède, on a : $\dfrac{d\sigma_{CZ}}{dt} = 0 = \dfrac{\mathrm{d}(\vec{\sigma}_C.\vec{e}_z)}{\mathrm{dt}} = \dfrac{d\vec{\sigma}_C}{dt}.\vec{e}_z$

$Or\ \dfrac{d\vec{\sigma}_C}{dt}.\vec{e}_z = 0 \Rightarrow \vec{M}_{(\vec{P}+\vec{R})/C}.\vec{e}_z = 0,$ la projection sur l'axe z du moment de la résultante des forces appliquées est une <u>constante du mouvement</u>.

1 pt

- Fin -