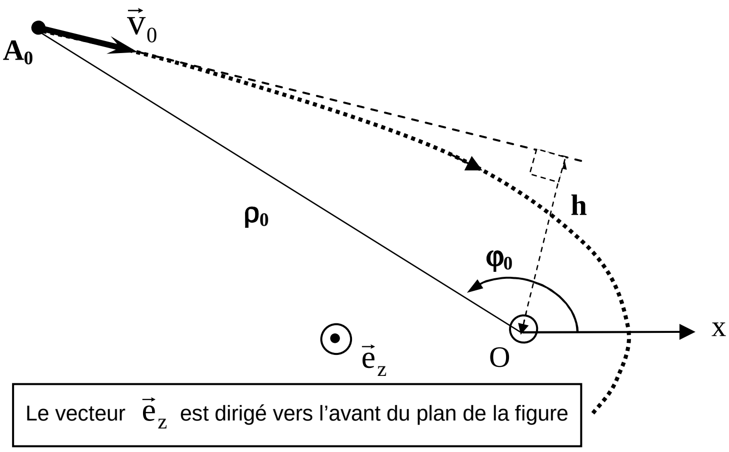
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies Département de formation Premier cycle	Année 2004/2005 ETAPE : PING2, SPC2, CHIM2, 2PREA, MAT2 Epreuve de : Mécanique du point Date : Mercredi 18 Mai 2005 Documents non autorisés	SESSION DE MAI 2005 UE : PIN 201 Durée : 1h 30

Corrigé de l'épreuve

Problème 1 : Astéroïde



Valeurs numériques :

$G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$,

$m = 10$ tonnes, $M_{Terre} = 6 \cdot 10^{24}$ kg ,

$OA(t_0) = 10^6$ km, $v_0 = 1$ km/s,

h = 150.000 km

---

1) *Donner, dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par la Terre sur l'astéroïde.*

1 pt

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{\rho^2}\vec{e}_\rho$$

---

2) *Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle E_p. Déterminer l'expression de E_p (on prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini).*

Montrer que la force F dérive d'une énergie potentielle.

On peut aussi bien dire que le critère est que le travail de F est une différentielle, ce qui se traduit par les égalités traitées en γ

1 pt

Le critère à appliquer est : $\vec{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

Nous effectuons le calcul en coordonnées cartésiennes :

α- Composantes de $\vec{F}$: $\vec{F} = -(G\mu m/r^3)\,\vec{r}$ donc $F_x = -(G\mu m/r^3)\,x$ etc...

β- Les composantes du rotationnel en coordonnées cartésiennes sont :

composante sur l'axe $O\vec{x}$: $\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}$

les autres composantes se déduisent de celle-ci par permutation circulaire sur les lettres x, y, z.

noté en sur - barême.

γ- Il faut donc vérifier que ces trois composantes sont nulles :

2 pts

Calcul de $\dfrac{\partial F_z}{\partial y}$: $\dfrac{\partial F_z}{\partial y} = -(G\mu m)\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{z}{r^3}\right] = -(G\mu m)\,z\,\dfrac{\partial r^{-3}}{\partial y}$ **(1)** où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Calcul de $\frac{\partial F_y}{\partial z}$: $\frac{\partial F_y}{\partial z} = -(G\mu m)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{y}{r^3}\right] = -(G\mu m)\, y \frac{\partial r^{-3}}{\partial z}$ **(2)** où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Calcul de $\frac{\partial r^{-3}}{\partial y}$ et de $\frac{\partial r^{-3}}{\partial z}$: $\frac{\partial r^{-3}}{\partial y} = \frac{\partial r^{-3}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -3r^{-6}y$ (car $\frac{\partial r}{\partial y} = 2y \,.\, \frac{1}{2r^{-2}}$)

de même : $\frac{\partial r^{-3}}{\partial z} = -3r^{-6}z$ (car $\frac{\partial r}{\partial z} = 2z \,.\, \frac{1}{2r^{-2}}$)

Compte tenu de (1) et (2), on vérifie bien que $\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$

Les deux autres composantes du rotationnel sont alors également nulles, car leurs expressions se déduisent de la composante en x par permutation circulaire sur les lettres x, y, z. CQFD

Déterminer l'expression de E_p.

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\rho_0}^{\rho_1} + \frac{GmM}{\rho^2} \cdot d\rho$$

Résultat :

0,5

$E_p = -\frac{GmM_T}{\rho}$

---

3) *En déduire que l'énergie mécanique de A dans le champ de force de gravitation terrestre est une constante du mouvement, que l'on notera* $\boldsymbol{E_0}$ *et que l'on exprimera en fonction des conditions initiales.*

A.N. *: Calculer* $\boldsymbol{E_0}$*.*

1 pt

L'énergie mécanique de A dans le champ de gravitation terrestre, $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\rho}$ ne varie pas car la seule force agissant sur A est la force de gravitation terrestre.

0,5

$E_0 = m(5.\ 10^5 - 4{,}00\ .\ 10^5) = 10^9$ J

---

4) *Montrer que le moment cinétique de l'astéroïde en O est une constante du mouvement que l'on notera* $\vec{\sigma}_O$ *.*
Préciser la direction, le sens de $\vec{\sigma}_O$

1,5

Le théorème du moment cinétique dit que la dérivée du moment cinétique dans le temps est égale au moment de la force totale agissant sur le point matériel étudié. Ici le support de la force passant par O à tt instant, « la force est centrale, de centre O », son moment en O est nul. Le moment cinétique de A en O est donc un vecteur constant.

Il est orthogonal au plan ($\overrightarrow{OA}_0, \vec{v}_0$) [*non demandé* : qui a donc une direction constante (mouvement plan)].
Il est orienté selon $\vec{e}_z$

1 pt

Exprimer sa norme $\boldsymbol{\sigma_0}$ *en fonction des données du problème.* $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OA} \times m\vec{v}$ $\boldsymbol{\sigma_0 = mv_0h}$

A.N. *: Calculer* $\boldsymbol{\sigma_0}$*. Quelle est l'unité de* $\boldsymbol{\sigma_0}$ *(on justifiera la réponse) ?*

0,5

$\boldsymbol{\sigma_0 /m = 1{,}5.10^{11}\ m^2/s}$ $\boldsymbol{\sigma_0 = 1{,}5.10^{15}\ kgm^2/s}$

---

5) *Rappeler l'expression de la vitesse $\vec{v}$ de A en coordonnées cylindriques dans la base cylindrique locale. Que peut-on dire de la vitesse radiale de A au passage en A_1 ? En déduire la valeur de l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\overrightarrow{OA_1}$.*

1,5

Relation donnant $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques...

En A_1, la distance OA_1 est minimale, donc $\dot{\rho} = 0$ et $v_\rho = 0$. Le vecteur vitesse est donc dirigé selon $\vec{e}_\varphi$, il est orthogonal à $\overrightarrow{OA_1}$.

6) *En exploitant les résultats des questions précédentes, trouvez une relation liant* $\boldsymbol{\rho_1}$, $\boldsymbol{E_0}$, $\boldsymbol{\sigma_0}$ *, les masses et la constante de gravitation* ***G****.*

2 pt

Constance de l'énergie mécanique $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2} m v_1^2 - GMm/\rho_1 = E_0 \quad (e)}$

Constance du moment cinétique $\Rightarrow$ $\boxed{m\,\rho_1 v_1 = \sigma_0 \qquad (s)}$

En exprimant v_1 à l'aide de (s) et en reportant son expression dans (e), on obtient l'équation :

$$\sigma_0^2/m\rho_1^2 - 2GMm/\rho_1 - 2E_0 = 0$$

En multipliant les deux membres par ρ_1^2, on obtient :

$$\boxed{2E_0\rho_1^2 + 2GMm\,\rho_1 - \sigma_0^2/m = 0 \quad .(r)}$$

---

7) *Déterminer la distance minimale d'approche* $\boldsymbol{\rho_1}$ *en résolvant l'équation obtenue à la question précédente.*

A.N. *: Calculer* $\boldsymbol{\rho_1}$*, la Terre risque-t-elle un cataclysme ?*

1,5

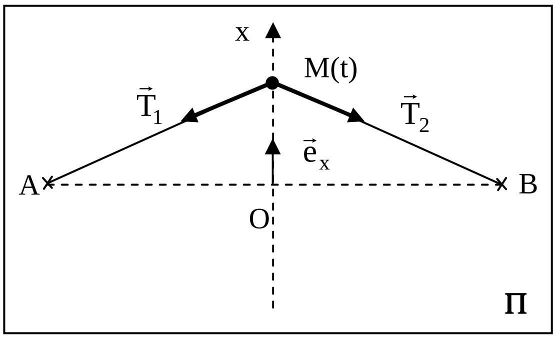
L'équation (r) admet deux solutions. Seule la solution positive convient :

$\rho_1 = (- GMm + \sqrt{\Delta})/2E_0$ où $\Delta = G^2M^2 m^2 + 2E_0\sigma_0^2/m$, soit : $\rho_1 = 2{,}8\ 10^7$ m $= 28000$ km

Donc pas de collision (rayon terrestre = 6400 km) . Enfin, L'atmosphère terrestre ne joue aucun rôle.

Problème 2 : Oscillations amorties [8 pts]

Valeurs numériques : m = 200 g , g = 10 ms^{-2} , k = 10 N/m, l_v = 5 cm, AB = 1 m, x_0 = 20 cm.



Vue depuis un point situé au-dessus de la table

1) *Faire un bilan de toutes les forces s'exerçant sur M. Donner leurs expressions et les représenter sur deux schémas (un dans le plan horizontal* ***Π*** *et l'autre dans le plan vertical contenant l'axe Ox).*

2

Le poids : $m\vec{g}$

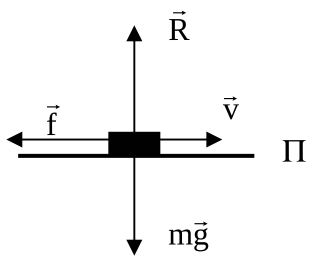
La force de contact : $\vec{R}$

La force de frottement : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

Les tensions des ressorts :

$$\vec{T}_1 = -k(AM - l_v)\frac{\overrightarrow{AM}}{AM}$$

$$\vec{T}_2 = -k(BM - l_v)\frac{\overrightarrow{BM}}{BM}$$



---

2) ***En admettant que*** l_v ***est négligeable devant AM(t) et BM(t)***, *montrer que la force élastique totale* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}$ *agissant sur M est :* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = \mathbf{-2kx}\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}$.

0,5

Si $l_v << AM$ $\quad \vec{T}_1 = -k(AM - l_v)\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM} = -k\,\overrightarrow{AM}$. De même : $\vec{T}_2 = -k\,\overrightarrow{BM}$,

donc $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$. Or, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{OM} = 2\,x\,\vec{e}_x$ d'où : $\vec{F}_e = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -2kx\vec{e}_x$

3) *Ecrire la relation fondamentale de la dynamique. En la projetant suivant l'axe Ox, montrer que l'équation différentielle du mouvement de M peut se mettre sous la forme suivante :*

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

1

$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F}_e = m\vec{a}$, soit : $m\vec{g} + \vec{R} - \alpha\vec{v} - 2kx\vec{e}_x = m\vec{a}$.

Project. sur $\vec{e}_x$: $-\alpha\dot{x} - 2kx = m\ddot{x}$, soit $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (d) en posant $\omega_0^2 = 2k/m$ et $\lambda = \alpha/2m$

0,5

Quelle est la signification physique de $\boldsymbol{\omega_0}$ *?* C'est la pulsation de l'oscillateur sans amortissement associé.

A.N. *: Calculer* $\boldsymbol{\omega_0}$ *:* $\omega_0 = 10\ s^{-1}$.

---

4) *On constate que M oscille avec un mouvement oscillatoire amorti. Quelle est alors la relation existant entre* $\boldsymbol{\lambda}$ *et* $\boldsymbol{\omega_0}$.

0,5

Pour que M oscille, il faut que le frottement ne soit pas trop grand, plus précisément, $\boxed{\lambda < \omega_0}$.
Alors l'équation caractéristique associée $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$
admet 2 racines complexes conjuguées $-\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Exprimer ***x(t)*** *en fonction de* $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ *et des conditions initiales.*

0,5

La solution générale de l'équation différentielle (d) est $x(t) = A\ e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$ où A et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

1

Ici, $v(t=0) = 0$, soit $\dot{x}(0) = 0$, et $x(0) = x_0$.

$\dot{x} = A\,e^{-\lambda t}\,[-\lambda\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi)]$

0,5

On trouve alors : $\tan\varphi = -\lambda/\omega$ et $x_0 = A\cos\varphi$

0,5

Quelle est la signification physique de $\mathbf{T = 2\pi/\omega}$ *? Représenter qualitativement l'allure de la courbe* ***x(t)***.

---

5) *L'expérience montre que* $T = 0{,}630$ *s. En déduire* $\boldsymbol{\lambda}$ *et* $\boldsymbol{\alpha}$.

1

$\omega = 2\pi/T$ $\quad \omega = 9{,}973\ s^{-1}$, $\omega^2 = 99{,}46\ s^{-2}$. Or $\omega_0^2 = 100\ s^{-2}$ et $\lambda^2 = \omega_0^2 - \omega^2$ $\quad \lambda^2 = 0{,}539\ s^{-2}$ $\quad \lambda = 0{,}734\ s^{-1}$

$\alpha = 0{,}293$ kg/s

-- FIN --