Département de formation Premier cycle

Année 2006/2007 SESSION DE JUIN 2007

ETAPE : PING2, SPC2, CHIM2, 2PREA, MAT2

UE : PIN 201

Epreuve de : Mécanique du point

Date : Mercredi 27 juin 2007 **Durée : 1h 30**

Documents non autorisés

Corrigé

1) Quel doit être le signe de K pour que cette force soit répulsive ?

Rép : $K > 0$ 0,5 pt

2) En supposant que cette force dérive d'une énergie potentielle E_p, donnez l'expression de cette énergie sachant que E_p tend vers 0 à l'infini.

Rép : $\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, Ep \Rightarrow K\dfrac{m}{\rho^2}\vec{e}_\rho = -\dfrac{dEp}{d\rho}\vec{e}_\rho \quad (\vec{e}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|})$ $\boxed{Ep = \dfrac{Km}{\rho} + C}$ 1 pt

Or $\rho \to \infty \Rightarrow Ep \to 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$ d'où $\boxed{Ep = \dfrac{Km}{\rho}}$ 1 pt

3) Donnez l'expression de l'énergie mécanique E de la particule en fonction de la distance OM=ρ et de sa vitesse v. Pour quelle raison E est-elle constante ? Donner la valeur de E en utilisant les conditions initiales de la particule.

Rép : $\boxed{E = Ep + Ec = \dfrac{Km}{\rho} + \dfrac{1}{2}mv^2}$ 1 pt

La force exercée dérive d'une énergie potentielle et il y a absence de frottements : E est donc une constante du mouvement. 1 pt

Loin de l'origine O :

$(\rho \to \infty) \Rightarrow Ep \to 0$ *et la vitesse* $\vec{v} \to \vec{v}_0$ d'où $\boxed{E = \dfrac{1}{2}m\,v_0^2}$ 1 pt

4) Montrer que le produit vectoriel $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ par rapport à O, est une constante du mouvement. En utilisant les conditions initiales, montrer que le vecteur $\vec{C}$ se met sous la forme $\vec{C} = C\,\vec{e}_z$ avec $C = -b\,v_0$ et $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire perpendiculaire au plan xOy.

Rép : $\vec{C} = C\,\vec{e}_z$ *est un vecteur constant revient à montrer que* $\dfrac{d\vec{C}}{dt} = \vec{0}$

$\dfrac{d\vec{C}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0 + \overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{\vec{f}}{m} = \vec{0} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{C} \text{ est un vecteur constant}}$ 1 pt

Loin de l'origine O, la vitesse dupoint matériel M est $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$ *et son vecteur position à pour expression :* $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y$ *(l'ordonnée y=b car à l'infini le mvt de M est rectiligne uniforme parallèle à l'axe Ox).* 1 pt

D'où $\boxed{\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = bv_0\ (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x) = -bv_0\,\vec{e}_z}$ 1 pt

5) Donnez l'expression des vecteurs positions et vitesse, $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{v}$, dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$.

<u>*Rép*</u> : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho}$ 1 pt et $\boxed{\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_\phi = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi}$ 1 pt

6) Donner l'expression générale du moment cinétique σ de M par rapport à O en fonction de m, ρ *et* $\dot{\phi}$.

<u>*Rép*</u> : $\boxed{\vec{\sigma} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m\,\rho\,\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi) = m\,\rho^2\,\dot{\phi}\,\vec{e}_z = \sigma\,\vec{e}_z}$ 1 pt

7) En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que r vérifie l'équation suivante : $v_0^2 - 2\dfrac{K}{\rho} - \dfrac{v_0^2\,b^2}{\rho^2} = \dot{\rho}^2$

<u>*Rép*</u> :

La conservation de l'énergie mécanique donne l'expression vu précédemment :

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{Km}{\rho} = \frac{1}{2}m\,v_0^2 \quad \Rightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{2K}{\rho} \quad \Rightarrow v_0^2 - \frac{2K}{\rho} = v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 \quad (1)$$ 1 pt

d'autre part : $\vec{\sigma} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m\,\rho^2\,\dot{\phi}\,\vec{e}_z = m\vec{C} = -m\,b\,v_0\,\vec{e}_z \quad \Rightarrow \rho\dot{\phi} = -\dfrac{bv_0}{\rho}$ (2) 1 pt

en remplaçant (2) *dans* (1) *on obtient* : $\boxed{v_0^2 - \dfrac{2K}{\rho} - (\dfrac{bv_0}{\rho})^2 = \dot{\rho}^2}$ (3) 1 pt

8) En supposant K > 0, déterminer la distance minimale d'approche $\rho = \rho_m$ entre la particule incidente et le point O. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\phi}_m$ au point correspondant à $\rho = \rho_m$.

<u>*Rép*</u> : *La particule incidente vient de l'infini, s'approche du centre de force O puis est diffusée vers l'infini. Il existe donc une distance minimale d'approche* ρ_m *au cours du temps qui se traduit mathématiquement par la résolution de l'équation :* $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$.

L'équation (3) devient : $v_0^2 - \dfrac{2K}{\rho} - (\dfrac{bv_0}{\rho})^2 = 0$ 1 pt

en multipliant par r^2 *:* $v_0^2\rho^2 - 2K\rho - b^2\,v_0^2 = 0$ 1 pt

on arrive à une équation du second degré dans la solution unique (car r doit nécessairement être positif) :

$$\rho_m = \frac{K}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$$ 1 pt

Nous avons montré en (2) *que* $\rho\dot{\phi} = -\dfrac{bv_0}{\rho}$ *pour* $\rho = \rho_m$ *on obtient :* $\dot{\phi}_m = -\dfrac{bv_0}{\rho_m^2}$ 0,5 pt

D'où $\boxed{\dot{\phi}_m = -\dfrac{bv_0}{\left(\dfrac{K}{v_0^2} + \sqrt{\left(\dfrac{K}{v_0^2}\right)^2 + b^2}\right)^2}}$ 0,5 pt

9) En examinant le cas particulier ou b=0, monter que la particule incidente à une vitesse nulle à la distance $\rho = \rho_m$. On pourra utiliser la conservation de l'énergie mécanique. Décrire brièvement le mouvement de la particule incidente.

D'après la relation obtenue en (1) *résultant de la conservation de l'énergie mécanique, nous avons :* $v_0^2 = v^2 + \dfrac{2K}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - \dfrac{2K}{\rho}$, *ceci* $\forall \rho$. *En particulier, pour b=0 et* $\rho = \rho_m$ *on a :*

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2K}{\rho_m} = v_0^2 - \frac{2K}{\left(\dfrac{K}{v_0^2} + \sqrt{\left(\dfrac{K}{v_0^2}\right)^2 + b^2}\right)} = v_0^2 - \frac{2K}{\left(\dfrac{K}{v_0^2} + \dfrac{K}{v_0^2}\right)} = v_0^2 - v_0^2 = 0$$

d'ou $\boxed{v = 0}$ **1 pt**

la particule à une trajectoire rectiligne, elle se rapproche du centre attractif O jusqu'à une distance minimale ρ_m*, ou sa vitesse s'annule puis rebrousse chemin en mvt accéléré j'usqu'à l'infini ou le mvt redevient uniforme. (l'action de la force f s'annule à l'infini).*

0,5 pt