Département de formation
Premier cycle

Année 2007/2008 **samedi 15 mars 2008**

ETAPE : PNG2A ,PNG2B, KHI2A

UE : PNG 205

Epreuve de : Mécanique du point

Documents non autorisés

Il sera tenu compte de la présentation 1pt

Exercice I 7pts

Les équations paramétriques de la courbe représentative de la trajectoire d'un mobile M supposé ponctuel dans un repère fixe orthonormé $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$, sont données en coordonnées polaires (ρ,ϕ)

par $\rho = \mathrm{a}$, $\phi = \frac{1}{2}\mathrm{bt}^2$

où a est b sont des constantes positives et t le temps.

1) Ecrire l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ dans la base locale polaire $(\mathrm{M},\vec{\mathrm{e}}_\rho,\vec{e}_\phi)$. Caractériser, en quelques mots, la trajectoire du point M.

Rép : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho = a\,\vec{e}_\rho$ 1pt *La trajectoire est un cercle de rayon* a 0,5pt

2) Déterminer l'expression des vecteur vitesse et accélération dans la base $(\vec{\mathrm{e}}_\rho,\vec{e}_\phi)$. La norme du vecteur vitesse est-elle constante ? Même question pour le vecteur accélération.

Rép : $\vec{v} = a\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi = a\,bt\,\vec{e}_\phi$ 0,5pt et $\|\vec{v}\| = a\,bt$ *dépendante du temps* 0,5pt

$\vec{\gamma} = ab\,\vec{e}_\phi - ab^2t^2\vec{e}_\rho$ 0,5pt et $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{a^2b^2 + a^2b^4t^4}$ *dépendante du temps* 0,5pt

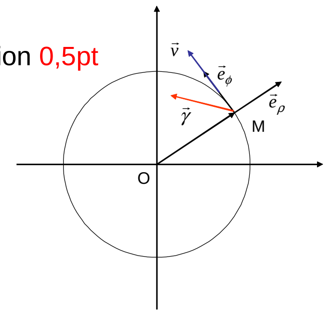
3) Montrer que le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur $\vec{OM}$.

Rép : $\overrightarrow{OM}\,.\,\vec{v} = a\,\vec{e}_\rho\,.\,abt\vec{e}_\phi = \vec{0}$ 0,5pt

4) Faire un schéma de la trajectoire du mobile M en faisant apparaître la base $(\vec{\mathrm{e}}_\rho,\vec{e}_\phi)$ et les vecteurs vitesse et accélération à un instant t donnée. Donner l'expression des composantes normale et tangentielle de l'accélération.

Rép : dessin : base $(\vec{\mathrm{e}}_\rho,\vec{e}_\phi)$ 0,5pt ; vecteur vitesse 0,5pt ; vect accélération 0,5pt

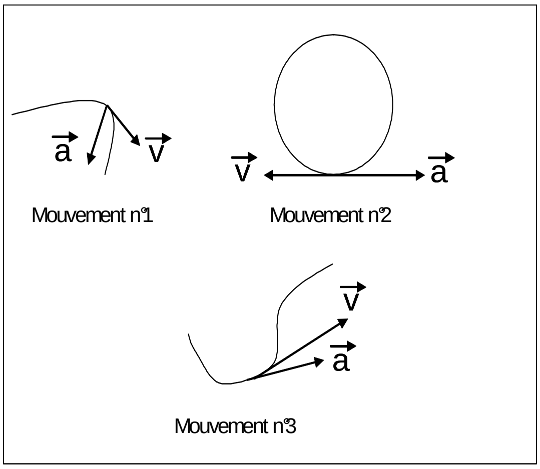
$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = ab$ 0,5pt $\gamma_n = ab^2t^2$ 0,5pt



5) Quelle est la nature du mouvement ?
Mouvement circulaire accéléré. 0,5pt

Exercice II 3 pts

On a représenté ci-contre les trajectoires correspondant à trois mouvements ainsi que les vecteurs vitesse et accélération à un instant donné.



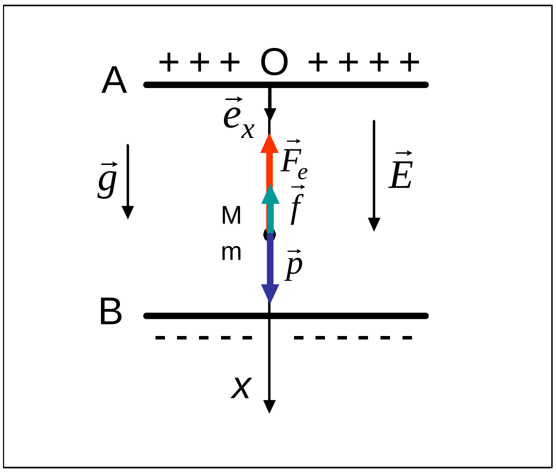
Dans certains mouvements, les tracés de vecteurs sont non physiques : lesquels ? Justifiez votre réponse.

Rép : n°2 0,5pt il n'y a pas d'accélération normale 1pt
n°3 0,5pt l'accélération n'est pas dirigée vers la concavité de la trajectoire 1pt

Exercice III 9 pts

Dans l'expérience de Millikan (qui permet de montrer l'existence d'une charge électrique élémentaire et d'en calculer sa valeur), on observe des gouttelettes d'huile portant des charges électriques diverses, entre les armatures horizontales d'un condensateur.

On assimile la gouttelette d'huile à un point matériel M de masse m et portant une charge q se déplaçant suivant un demi-axe vertical Ox dirigé vers le bas et portant le vecteur unitaire $\vec{e}_x$.



Entre les armatures A et B, la gouttelette est soumise en permanence à 2 forces :

- champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme : $\vec{P} = m\vec{g}$
- champ électrique $\vec{E} = E\ \vec{e}_x$ uniforme et vertical : $\vec{F}_e = q\vec{E}$

Lorsque la gouttelette est animée d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'air qui l'entoure, elle est de plus soumise à une force de freinage $\vec{f} = -k\vec{v}$ avec k une constante positive.

1) A partir de l'expression du vecteur position $\vec{OM} = x\vec{e}_x$, donnez celle des vecteurs vitesse et accélération $\vec{v}$ *et* $\vec{a}$.

Rép : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ 0,5pt $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x$ 0,5pt

2) Représenter graphiquement les forces appliquées au point M, sachant que la charge q est négative (q<0) et que la gouttelette se déplace de l'armature A vers l'armature B.

Rép : poids correct 0,5pt ; F_e correcte 0,5pt ; f correcte 0,5pt

3) Ecrire l'équation vectorielle exprimant le principe fondamental de la dynamique et en déduire que l'équation différentielle du mouvement obtenue par projection sur le repère $(o, \vec{e}_x)$ est

de la forme $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=C$, où $v=\frac{dx}{dt}$ et C une constante à déterminer, qui s'exprime en fonction de $q, E, m\ et\ g$. Déterminer la solution de cette équation en admettant qu'à l'instant *t=0,* la gouttelette part de l'origine O sans vitesse initiale.

Rép : $\vec{p}+\vec{f}+\vec{F}_e=m\vec{a}$ 1pt $mg\vec{e}_x-k\dot{x}\vec{e}_x+qE\vec{e}_x=m\ddot{x}\vec{e}_x$ 0,5pt $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g+\frac{q}{m}E=C$ 0,5pt

$v(t)=Ae^{-\frac{k}{m}t}+\frac{m}{k}\left(g+\frac{q}{m}E\right)$ 1pt ; $v(t)=\left(\frac{m}{k}g+\frac{q}{k}E\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ 0,5pt *Cond init v(t=0) = 0*

4) Montrer que le vecteur vitesse du point M tend vers une valeur limite v_ℓ que l'on précisera. En déduire la vitesse limite de la gouttelette en absence du champ électrique ($\vec{E}=\vec{0}$) . On notera cette vitesse $v_{\ell 0}$.

Rép : $t\to\infty$ $\lim v(t)=\left(\frac{m}{k}g+\frac{q}{k}E\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)=V_\ell=\frac{m}{k}g+\frac{q}{k}E$ 1pt

$V_{\ell 0}=\frac{m}{k}g$ 0,5pt

5) Montrer que $v=(v_\ell-v_{\ell 0})$ est proportionnelle à la charge q.

Rép : $V_\ell=\frac{m}{k}g+\frac{q}{k}E=V_{\ell 0}+\frac{q}{k}E \quad\Rightarrow\quad V_\ell-V_{\ell 0}=q\left(\frac{E}{k}\right)$ 0,5pt

6) Dans son exposé en 1923, Millikan conclut « j'ai observé exactement deux fois cette vitesse v , trois fois, etc. …, bref un nombre entier de fois » Comment interpréter ce résultat ?

Rép : la charge électrique est une grandeur discontinue. La charge totale est un multiple entier de la charge élémentaire e. 1pt

- Fin -