PNG 205 / DS du 11 Mars 2010 / séries KHI2A & PNG2B / durée 1h

Quelques remarques préalables…

Cette épreuve comprend deux exercices : le premier en coordonnées cartésiennes, le second en coordonnées polaires. Les mouvements décrits ont lieu dans un plan. La coordonnée $z(t)$ est constamment nulle, ainsi que ses dérivées.

La question ***g*** de chaque exercice consiste en une représentation graphique du mouvement traité. Une figure claire sera autrement appréciée qu'un infâme gribouillis…
La remarque vaut bien sur pour les calculs (la plupart des étourderies sont dues à une présentation mal soignée, les étudiants s'embrouillant alors dans leurs propres calculs…).
Le calcul intégral de la question ***f*** du premier exercice nécessite un petit changement de variable, pour lequel quelques pistes vous sont fournies.
L'énoncé ne comporte strictement aucune subtilité maligne. Les seuls pièges seront donc ceux que vous aurez vous-mêmes semés.

1^er^ exercice

On considère un repère orthonormé en coordonnées cartésiennes $O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$. Le mouvement d'un point M dans ce référentiel est décrit par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dépendant du temps :

$$\overrightarrow{OM} = R\left(\omega t - \sin\omega t\right)\vec{e}_x + R\left(1-\cos\omega t\right)\vec{e}_y$$

où les paramètres R et ω sont des constantes positives.

a) Exprimer la vitesse $\vec{v}_M(t)$ du point M.

b) Calculer le module de la vitesse $v_M(t) = \left\|\vec{v}_M(t)\right\|$

c) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}_M(t)$ du point M, et montrer que $\left\|\vec{\gamma}_M(t)\right\|$ est constante.

d) Calculer le produit scalaire $\vec{\gamma}_M(t).\vec{v}_M(t)$

e) Quand le mouvement est-il accéléré, et quand est-il ralenti (décéléré)?
Quand la vitesse est-elle minimale, et quelle est alors sa valeur ?
Quand la vitesse est-elle maximale, et quelle est alors sa valeur ?

f) Quelle est la distance parcourue par le point M entre $t=0$ et $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$?

Rappels utiles : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$; $2\sin\alpha.\cos\alpha=\sin 2\alpha$

g) Représenter graphiquement la trajectoire du point M, ainsi que les vecteurs vitesse et accélération pour $t=\dfrac{\pi}{2\omega},\dfrac{\pi}{\omega},\dfrac{3\pi}{2\omega}$.

2ème exercice

On considère le mouvement d'un point P dont les coordonnées polaires par rapport au centre O sont décrites par les équations horaires suivantes:

$$\rho(t) = R\left(1+\frac{1}{2}\cos\phi(t)\right) \text{ et } \phi(t) = \omega t$$

où les paramètres R et ω sont des constantes positives.

a) Donner l'expression de la position du point P, $\overrightarrow{OP}$ dans la base locale $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$.

b) Exprimer la vitesse $\vec{v}_P(t)$ du point P.

c) Calculer le module de la vitesse $v_P(t) = \|\vec{v}_P(t)\|$

d) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}_P(t)$ du point P.

e) Calculer le produit scalaire $\vec{\gamma}_P(t).\vec{v}_P(t)$

f) Quand le mouvement est-il accéléré, et quand est-il ralenti (décéléré) ?
Quand la vitesse est-elle maximale, et quelle est alors sa valeur ?
Quand la vitesse est-elle minimale, et quelle est alors sa valeur ?

g) Représenter graphiquement la trajectoire du point P, ainsi que les vecteurs vitesse et accélération pour $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{\omega}$.