PNG 205 / DS du 11 Mars 2010 / séries KHI2A & PNG2B / durée 1h

1er exercice

On considère un repère orthonormé en coordonnées cartésiennes $O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$. Le mouvement d'un point M dans ce référentiel est décrit par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dépendant du temps :

$$\overrightarrow{OM} = R(\omega t - \sin\omega t)\vec{e}_x + R(1-\cos\omega t)\vec{e}_y$$

où les paramètres R et ω sont des constantes positives.

a) Exprimer la vitesse $\vec{v}_M(t)$ du point M.

$$\vec{v}_M(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = R\omega\left[(1-\cos\omega t)\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y\right]$$

b) Calculer le module de la vitesse $v_M(t) = \left\|\vec{v}_M(t)\right\|$

$$\begin{aligned}\left\|\vec{v}_M(t)\right\| &= R\omega\sqrt{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t}\\ &= R\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)}\\ &= 2R\omega\left|\sin{}^{\omega t}\!/_{2}\right|\end{aligned}$$

c) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}_M(t)$ du point M et montrer que $\left\|\vec{\gamma}_M(t)\right\|$ est constante.

$$\vec{\gamma}_M(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{v_M} = R\omega^2\left[\sin\omega t\vec{e}_x + \cos\omega t\,\vec{e}_y\right] \text{ et } \left\|\vec{\gamma}_M(t)\right\| = R\omega^2$$

d) Calculer le produit scalaire $\vec{\gamma}_M(t).\vec{v}_M(t)$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_M.\vec{v}_M &= R^2\omega^3\left[(1-\cos\omega t)\sin\omega t + \sin\omega t\cos\omega t\right]\\ &= R^2\omega^3\sin\omega t\end{aligned}$$

e) Quand le mouvement est-il accéléré, et quand est-il ralenti (décéléré) ?
Quand la vitesse est-elle minimale, et quelle est alors sa valeur ?
Quand la vitesse est-elle maximale, et quelle est alors sa valeur ?

Le mouvement est accéléré quand $\vec{\gamma}_M(t).\vec{v}_M(t)$ est positif, c'est-à-dire pour $0<\omega t<\pi$, et ralenti quand $\vec{\gamma}_M(t).\vec{v}_M(t)$ est négatif, c'est-à-dire pour $\pi<\omega t<2\pi$ (et ainsi de suite). La vitesse est minimale (et nulle) à $\omega t = 0$ $(+2n\pi)$, maximale à $\omega t=\pi$ $(+2n\pi)$ où elle vaut $2R\omega$.

f) Quelle est la distance parcourue par le point M entre $t=0$ et $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$?

La distance parcourue est l'intégrale $I = \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega}\left\|\vec{v}_M(t)\right\|dt = \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega}2R\omega\sin{}^{\omega t}\!/_{2}\,dt$ ($\sin{}^{\omega t}\!/_{2}$ est positif pour $0\le t\le\dfrac{2\pi}{\omega}$).

En introduisant $\vartheta = {}^{\omega t}\!/_{2}$, il vient $I = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}4R\sin\vartheta\,d\vartheta = 4R\left[-\cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}$, soit $I = 8R$

Rappels utiles : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$; $2\sin\alpha.\cos\alpha = \sin 2\alpha$

g) Représenter graphiquement la trajectoire du point M, ainsi que les vecteurs vitesse et accélération pour $t = \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$.

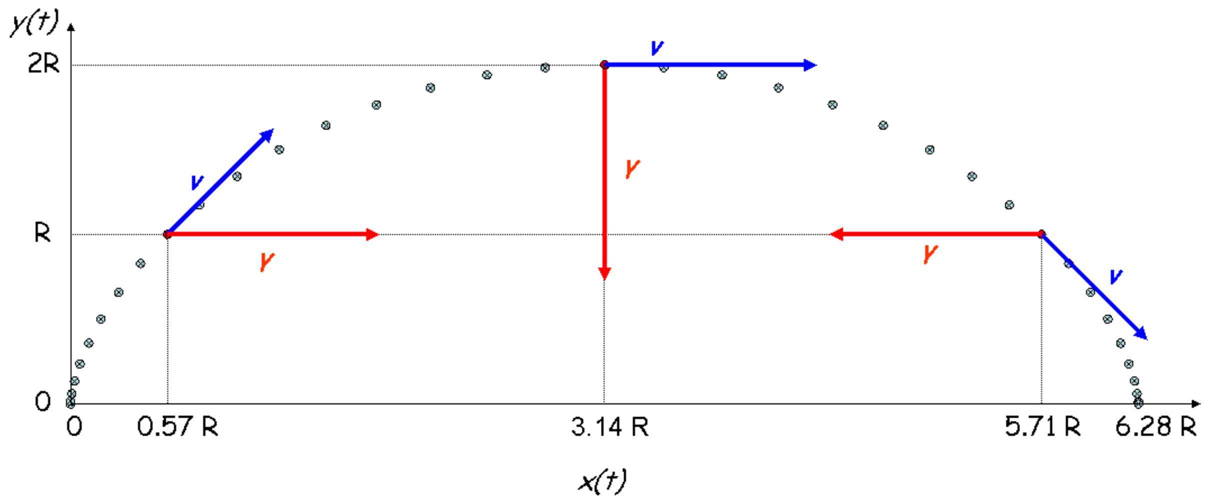
$x(t) = R(\omega t - \sin\omega t)$ $\quad$ $y(t) = R(1-\cos\omega t)$

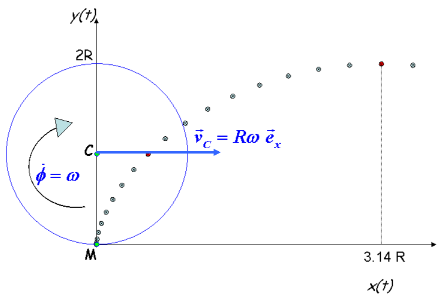
$\dot{x}(t) = R\omega(1-\cos\omega t)$ $\quad$ $\dot{y}(t) = R\omega \sin\omega t$

$\ddot{x}(t) = R\omega^2 \sin\omega t$ $\quad$ $\ddot{y}(t) = R\omega^2 \cos\omega t$

Soit pour $\omega t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ les valeurs suivantes :

	position $/R$		vitesse $/R\omega$		accélération $/R\omega^2$	
	$x(t)$	$y(t)$	$\dot{x}(t)$	$\dot{y}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$\ddot{y}(t)$
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	**0.57**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
$\omega t = \pi$	**3.14**	**2**	**2**	**0**	**0**	**-1**
-1 $\omega t = \frac{3\pi}{2}$	**5.71**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**0**





Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ peut s'écrire comme la somme de deux vecteurs: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{OM} = R(\omega t - \sin\omega t)\vec{e}_x + R(1-\cos\omega t)\vec{e}_y$$
$$= \left[R\omega t\,\vec{e}_x + R\,\vec{e}_y\right] - R\left[\sin\omega t\,\vec{e}_x + \cos\omega t\,\vec{e}_y\right]$$
$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

Le point C effectue un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_C = R\omega\,\vec{e}_x$. Le point M lui tourne autour à vitesse angulaire constante $-\omega$. En faisant rouler un palet circulaire le long d'une réglette, par exemple, la trajectoire obtenue est appelée cycloïde (étudiée en TP il y a quelques années…).

PNG 205 / DS du 11 Mars 2010 / séries KHI2A & PNG2B / durée 1h

2ème exercice

On considère le mouvement d'un point P dont les coordonnées polaires par rapport au centre O sont décrites par les équations horaires suivantes:

$$\rho(t) = R\left(1+\frac{1}{2}\cos\phi(t)\right) \text{ et } \phi(t) = \omega t$$

où les paramètres R et ω sont des constantes positives.

a) Donner l'expression de la position du point P, $\overrightarrow{OP}$ dans la base locale $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$.

$$\overrightarrow{OP} = \rho(t)\vec{e}_\rho = R\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)\vec{e}_\rho$$

b) Exprimer la vitesse $\vec{v}_P(t)$ du point P.

$$\vec{v}_P(t) = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\dot{\phi}(t)\vec{e}_\phi$$

avec $\dot{\rho}(t) = -\frac{R\omega}{2}\sin\omega t$ et $\dot{\phi}(t) = \omega$, soit $\vec{v}_P(t) = -\frac{R\omega}{2}\sin\omega t\,\vec{e}_\rho + R\omega(1+\frac{1}{2}\cos\omega t)\vec{e}_\phi$

c) Calculer le module de la vitesse $v_P(t) = \|\vec{v}_P(t)\|$

$$\|\vec{v}_P(t)\| = R\omega\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\omega t + (1+\frac{1}{2}\cos\omega t)^2} = R\omega\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\omega t}$$

d) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}_P(t)$ du point P.

$$\vec{\gamma}_P(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi$$

Avec $\ddot{\rho}(t) = -\frac{R\omega^2}{2}\cos\omega t$ et $\ddot{\phi}(t) = 0$, soit $\vec{\gamma}_P(t) = -R\omega^2\left[(1+\cos\omega t)\vec{e}_\rho + \sin\omega t\,\vec{e}_\phi\right]$

e) Calculer le produit scalaire $\vec{\gamma}_P(t).\vec{v}_P(t)$

$$\vec{\gamma}_P(t).\vec{v}_P(t) = R^2\omega^3\left[(1+\cos\omega t)\frac{\sin\omega t}{2} - \sin\omega t\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)\right] = -\frac{R^2\omega^3}{2}\sin\omega t$$

f) Quand le mouvement est-il accéléré, et quand est-il ralenti (décéléré)?
Quand la vitesse est-elle maximale, et quelle est alors sa valeur ?
Quand la vitesse est-elle minimale, et quelle est alors sa valeur ?

Le mouvement est accéléré quand $\vec{\gamma}_M(t).\vec{v}_M(t)$ est positif, c'est-à-dire pour $\pi < \omega t < 2\pi$, et ralenti quand $\vec{\gamma}_M(t).\vec{v}_M(t)$ est négatif, c'est-à-dire pour $0 < \omega t < \pi$ (et ainsi de suite).

La vitesse est minimale à $\omega t = \pi \ (+2n\pi)$ où elle vaut $\frac{R\omega}{2}$

et maximale pour $\omega t = 0 \ (+2n\pi)$, où elle vaut $\frac{3R\omega}{2}$.

g) Représenter graphiquement la trajectoire du point P, ainsi que les vecteurs vitesse et accélération pour $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{\omega}$.

	distance au centre	vitesse		accélération	
	$\rho(t)/R$	$v_\rho(t)/R\omega$	$v_\phi(t)/R\omega$	$\gamma_\rho(t)/R\omega^2$	$\gamma_\phi(t)/R\omega^2$
$\phi = \omega t = 0$	**1.5**	**0**	**1.5**	**-2**	**0**
$\phi = \omega t = \frac{\pi}{2}$	**1**	**-0.5**	**1**	**-1**	**-1**
$\phi = \omega t = \pi$	**0.5**	**0**	**0.5**	**0**	**0**
$\phi = \omega t = \frac{3\pi}{2}$	**1**	**0.5**	**1**	**-1**	**1**
$\phi = \omega t = 2\pi$	**1.5**	**0**	**1.5**	**-2**	**0**