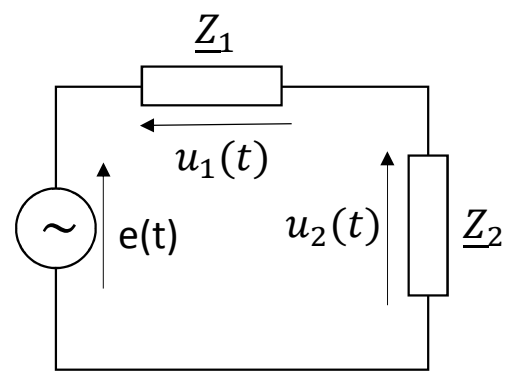


Exercice 14



Le signal $e(t)$ est une tension sinusoïdale de valeur efficace $E=3,7\text{ V}$ et de fréquence 500 Hz .
 Z_1 et Z_2 sont deux impédances aux bornes desquelles sont respectivement mesurées les tensions $u_1(t)$ (valeur efficace $U_1=3\text{ V}$, fréquence 500 Hz , phase $\varphi_1=-36^\circ$) et $u_2(t)$ (valeur efficace $U_2=2,18\text{ V}$, fréquence 500 Hz , phase $\varphi_2=+54^\circ$). La référence de phase est le signal $e(t)$.
a) Exprimez les différents signaux sous leur forme temporelle. La loi des mailles est-elle vérifiée ?
b) Exprimez les différents signaux sous leur forme complexe exponentielle. La loi des mailles est-elle vérifiée ?
c) Exprimez les différents signaux sous leur forme complexe cartésienne. La loi des mailles est-elle vérifiée ?
d) Les valeurs efficaces vérifient-elles la loi des mailles ? Pourquoi ?

a) Calcul de la pulsation : $\omega = 2\pi f = 1000\pi$

tension	Val. eff. (V)	Phase (d°)	Phase (rad)	Express littérale	Expression temporelle
$e(t)$	$E=3,7$	$\varphi_e = 0$	$\varphi_e = 0$	$e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_e)$	$e(t) = 3,7 \sqrt{2} \cos(1000\pi t)$
$u_1(t)$	$U_1=3$	$\varphi_1 = -36$	$\varphi_1 = -\frac{36}{180}\pi$	$u_1(t) = U_1\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1)$	$u_1(t) = 3 \sqrt{2} \cos\left(1000\pi t - \frac{36}{180}\pi\right)$
$u_2(t)$	$U_2=2,18$	$\varphi_2 = 54$	$\varphi_2 = \frac{54}{180}\pi$	$u_2(t) = U_2\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2)$	$u_2(t) = 2,18 \sqrt{2} \cos\left(1000\pi t + \frac{54}{180}\pi\right)$

La loi des mailles est-elle vérifiée ? $\sum tensions = 0 \Leftrightarrow e(t) - u_1(t) - u_2(t) = 0$ càd $e(t) \stackrel{?}{=} u_1(t) + u_2(t)$

$$u_1(t) + u_2(t) = 3 \sqrt{2} \cos\left(1000\pi t - \frac{36}{180}\pi\right) + 2,18 \sqrt{2} \cos\left(1000\pi t + \frac{54}{180}\pi\right)$$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$u_1(t) + u_2(t) = 3 \sqrt{2} \left[\cos(1000\pi t) \cos \frac{36}{180} \pi + \sin(1000\pi t) \sin \frac{36}{180} \pi \right] + 2,18 \sqrt{2} \left[\cos(1000\pi t) \cos \frac{54}{180} \pi - \sin(1000\pi t) \sin \frac{54}{180} \pi \right]$$

$$u_1(t) + u_2(t) = \underbrace{\cos(1000\pi t) \sqrt{2} \left[3 \cos \frac{36}{180} \pi + 2,18 \cos \frac{54}{180} \pi \right]}_{3,708} + \underbrace{\sin(1000\pi t) \sqrt{2} \left[3 \sin \frac{36}{180} \pi - 2,18 \sin \frac{54}{180} \pi \right]}_{3 \cdot 10^{-4}}$$

$u_1(t) + u_2(t) \approx 3,708 \cos(1000\pi t) \sqrt{2}$ ce qui est compatible avec l'expression temporelle de $e(t) = 3,7 \sqrt{2} \cos(1000\pi t)$

b) Forme complexe exponentielle

tension	Val. eff. (V)	Phase (rad)	Express littérale complexe	Expression temporelle complexe	AEC	Express temp avec AEC
e(t)	E=3,7	$\varphi_e = 0$	$\underline{e}(t) = E \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_e)}$	$\underline{e}(t) = 3,7 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$	$\underline{E} = 3,7 e^{j0} = 3,7$	$\underline{e}(t) = \underline{E} \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$
$u_1(t)$	$U_1=3$	$\varphi_1 = -\frac{36}{180} \pi$	$\underline{u}_1(t) = U_1 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_1)}$	$\underline{u}_1(t) = 3 \sqrt{2} e^{j(1000\pi t - \frac{36}{180} \pi)}$	$\underline{U}_1 = 3 e^{-j\frac{36}{180} \pi}$	$\underline{u}_1(t) = \underline{U}_1 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$
$u_2(t)$	$U_2=2,18$	$\varphi_2 = \frac{54}{180} \pi$	$\underline{u}_2(t) = U_2 \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_2)}$	$\underline{u}_2(t) = 2,18 \sqrt{2} e^{j(1000\pi t + \frac{54}{180} \pi)}$	$\underline{U}_2 = 2,18 e^{j\frac{54}{180} \pi}$	$\underline{u}_2(t) = \underline{U}_2 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \underline{U}_1 \sqrt{2} e^{j1000\pi t} + \underline{U}_2 \sqrt{2} e^{j1000\pi t} = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$$

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \left(3 e^{-j\frac{36}{180}\pi} + 2,18 e^{j\frac{54}{180}\pi} \right) \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$$

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \left(3 \left[\cos\left(-\frac{36}{180}\pi\right) + j \sin\left(-\frac{36}{180}\pi\right) \right] + 2,18 \left[\cos\left(\frac{54}{180}\pi\right) + j \sin\left(\frac{54}{180}\pi\right) \right] \right) \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$$

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \left(\underbrace{\left[3 \cos\left(-\frac{36}{180}\pi\right) + 2,18 \cos\left(\frac{54}{180}\pi\right) \right]}_{3,708} + j \underbrace{\left[3 \sin\left(-\frac{36}{180}\pi\right) + 2,18 \sin\left(\frac{54}{180}\pi\right) \right]}_{-3 \cdot 10^{-4}} \right) \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$$

$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) \approx 3,708 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$ ce qui est compatible avec l'expression temporelle de $\underline{e}(t) = 3,7 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$

c) Forme complexe cartésienne

tension	Val. eff. (V)	Phase (rad)	Expression temporelle complexe	AEC en cartésien	Express temp avec AEC
e(t)	E=3,7	$\varphi_e = 0$	$\underline{e}(t) = 3,7 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$	$\underline{E} = 3,7$	$\underline{e}(t) = \underline{E} \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$
$u_1(t)$	U ₁ =3	$\varphi_1 = -\frac{36}{180}\pi$	$\underline{u}_1(t) = 3 \sqrt{2} e^{j\left(1000\pi t - \frac{36}{180}\pi\right)}$	$\underline{U}_1 = 2,427 - j 1,763$	$\underline{u}_1(t) = \underline{U}_1 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$
$u_2(t)$	U ₂ =2,18	$\varphi_2 = \frac{54}{180}\pi$	$\underline{u}_2(t) = 2,18 \sqrt{2} e^{j\left(1000\pi t + \frac{54}{180}\pi\right)}$	$\underline{U}_2 = 1,281 + j 1,763$	$\underline{u}_2(t) = \underline{U}_2 \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \underline{U}_1 \sqrt{2} e^{j1000\pi t} + \underline{U}_2 \sqrt{2} e^{j1000\pi t} = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$$

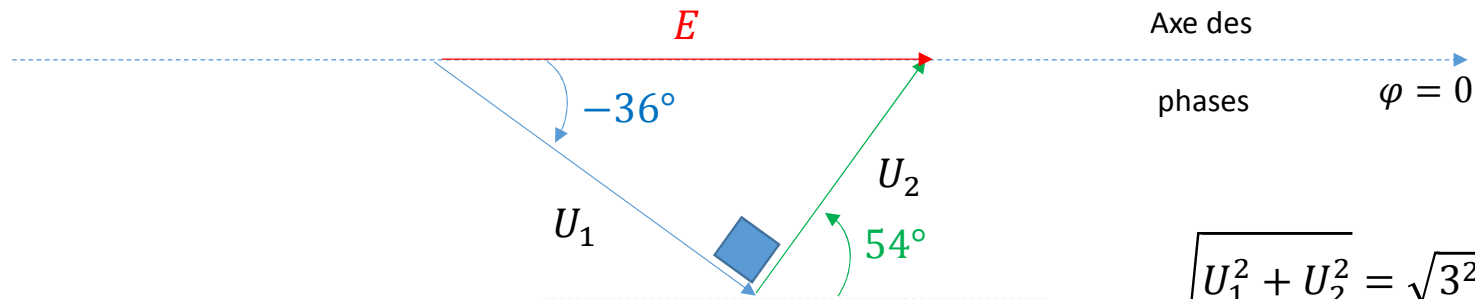
$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = (2,427 - j 1,763 + 1,281 + j 1,763) \sqrt{2} e^{j1000\pi t}$$

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = (3,708) \sqrt{2} e^{j1000\pi t} \quad \text{On vérifie bien que } (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) = \underline{E}$$

d) Loi des mailles avec les valeurs efficaces

$$U_1 + U_2 = 3 + 2,18 = 5,18 \quad \text{donc} \quad U_1 + U_2 \neq 3,7$$

Preuve par le diagramme de Fresnel



$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{3^2 + 2,18^2} = \sqrt{13,75} \approx 3,708$$