

III Circuits électriques en régime variable sinusoïdal

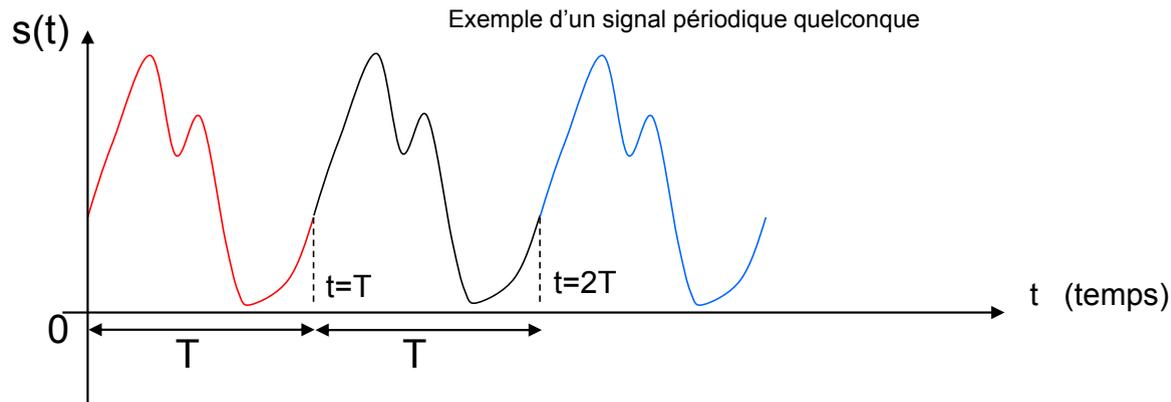
1. Définitions, généralités
2. Dipôles en régime permanent sinusoïdal
3. Analyse de circuits en régime sinusoïdal

1. Définitions, généralités

1.1 Grandeurs périodiques $s(t)$

Une grandeur physique est dite périodique, si elle prend les mêmes valeurs à intervalles de temps réguliers : $s(t+T) = s(t)$ ou T est l'intervalle de temps appelé **période (unité : seconde)**.

On définit la **fréquence $f = 1/T$** qui indique le nombre de cycles par unité de temps. La fréquence a pour unité s^{-1} ou Hz (Hertz).



Exemple: $f=50\text{Hz}$ correspond à 50 cycles par seconde pour une grandeur de période $T=0,02\text{ s}$

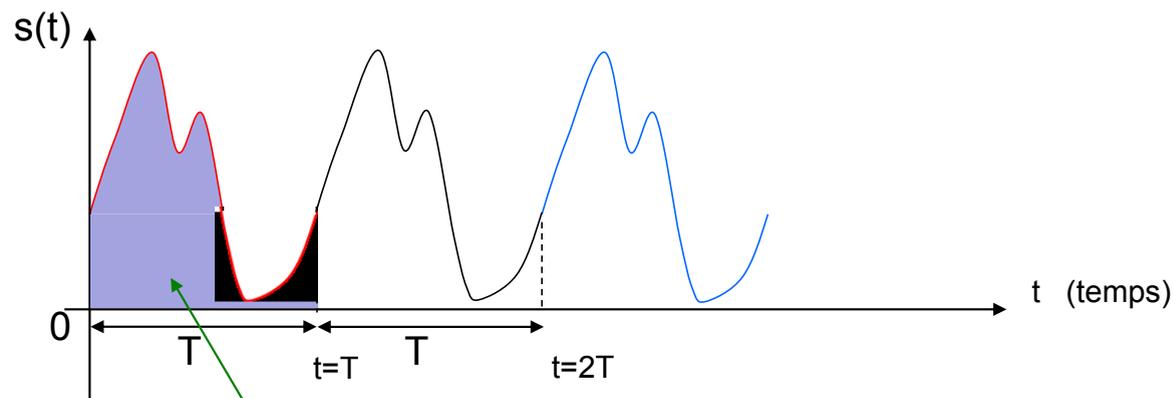
La grandeur physique $s(t)$ est dite monodirectionnelle si $s(t) > 0$ (ou $s(t) < 0$) $\forall t$

La grandeur physique $s(t)$ est dite bidirectionnelle si $s(t)$ **change de signe** pour $t \in [0, T]$

▪ Question : Comment mesurer la valeur de $s(t)$ sachant que celle-ci change tout le temps ?

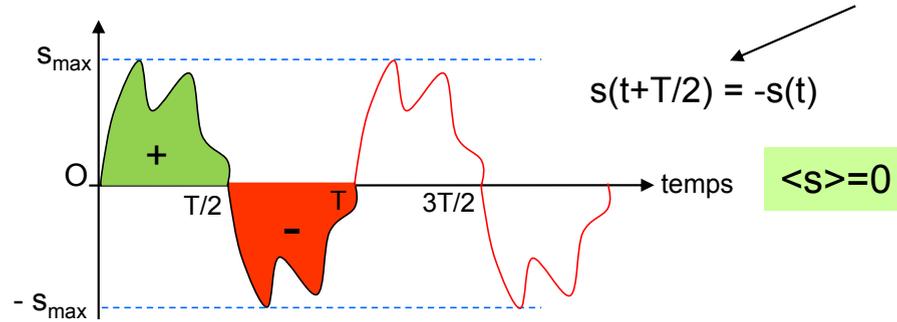
□ On définit la **valeur moyenne** notée $\langle s \rangle$ d'une grandeur périodique de période T par :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$



$\langle s \rangle$ est une constante et représente l'air sous la courbe $s(t)$

- Question : Que se passe-t-il pour un signal $s(t)$ bidirectionnel symétrique ?



$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} s(t) dt + \int_{T/2}^T s(t) dt \right] = S_+ + S_- = 0$$

Conclusion : il faut définir une autre constante électrique permettant de contourner cette difficulté et qui apporte un complément d'information sur le signal $s(t)$ étudié.

- On définit alors la **valeur efficace** notée S_{eff} d'une grandeur périodique de période T par :

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt$$

Dans ce cas, même si le signal $s(t)$ est bidirectionnel, l'intégrale ainsi défini, sera toujours positive et non nulle

1.2 Grandeurs sinusoïdales

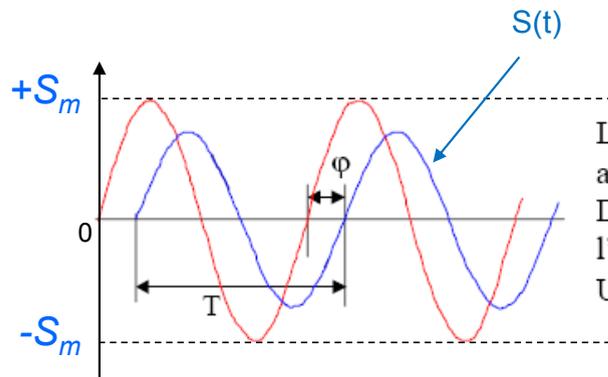
▪ Pourquoi privilégier les grandeurs sinusoïdales ?

On démontre que toute fonction $s(t)$ périodique satisfaisant à certaines conditions de continuité et de dérivabilité, peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales dite "série de Fourier".

Si $s(t)$ est une fonction sinusoïdale alors elle aura pour expression :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec}$$

- $s(t)$ la valeur instantanée
- S_m la valeur maximum ou valeur crête ou encore amplitude de $s(t)$
- ω la pulsation, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (radian \cdot s⁻¹) avec T la période et f la fréquence de $s(t)$
- φ la phase à l'origine (c'est-à-dire au temps $t=0$) de $s(t)$ définie par rapport à une référence.



La phase est définie par rapport à une référence arbitraire.

Dans le cas de plusieurs signaux de même fréquence, l'un d'eux est utilisé comme origine pour les phases.

Une période entière correspond à un déphasage de 2π .

Constantes caractéristiques

La valeur moyenne $\langle s \rangle$ pour une grandeur sinusoïdale est toujours **nulle**

La valeur efficace S_{eff} pour une grandeur sinusoïdale est égale à $\frac{S_m}{\sqrt{2}}$

démonstration

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$\text{Rappel: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{S_m^2}{T} \left[\int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt \right]$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{T} \left[\left[\frac{t}{2} \right]_0^T + \left[\frac{-2\omega \sin 2(\omega t + \varphi)}{2} \right]_0^T \right] = \frac{S_m^2}{T} \left[\frac{T}{2} - \omega (\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi) \right]$$

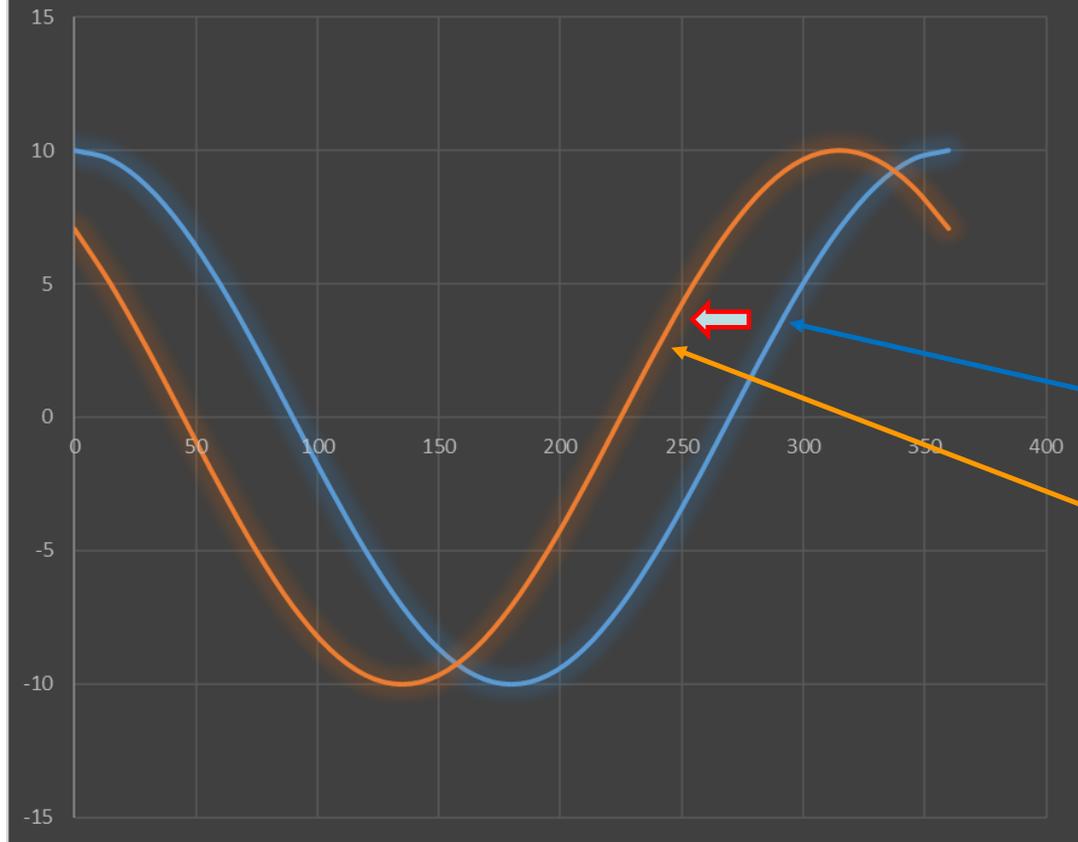
$$\Leftrightarrow S_{\text{eff}}^2 = \frac{S_m^2}{2} \quad \text{la deuxième intégrale est nulle puisque } \omega T = 2\pi \quad \text{et } \sin(4\pi + 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

$$\text{finalement } S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad \text{ou bien } S_m = S_{\text{eff}} \sqrt{2}$$

Remarque importante : pour faire apparaître la constante caractéristique S_{eff} dans $s(t)$ on écrira dorénavant :

$$s(t) = S_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Comparaison de deux sinusoïdes déphasées de 45°

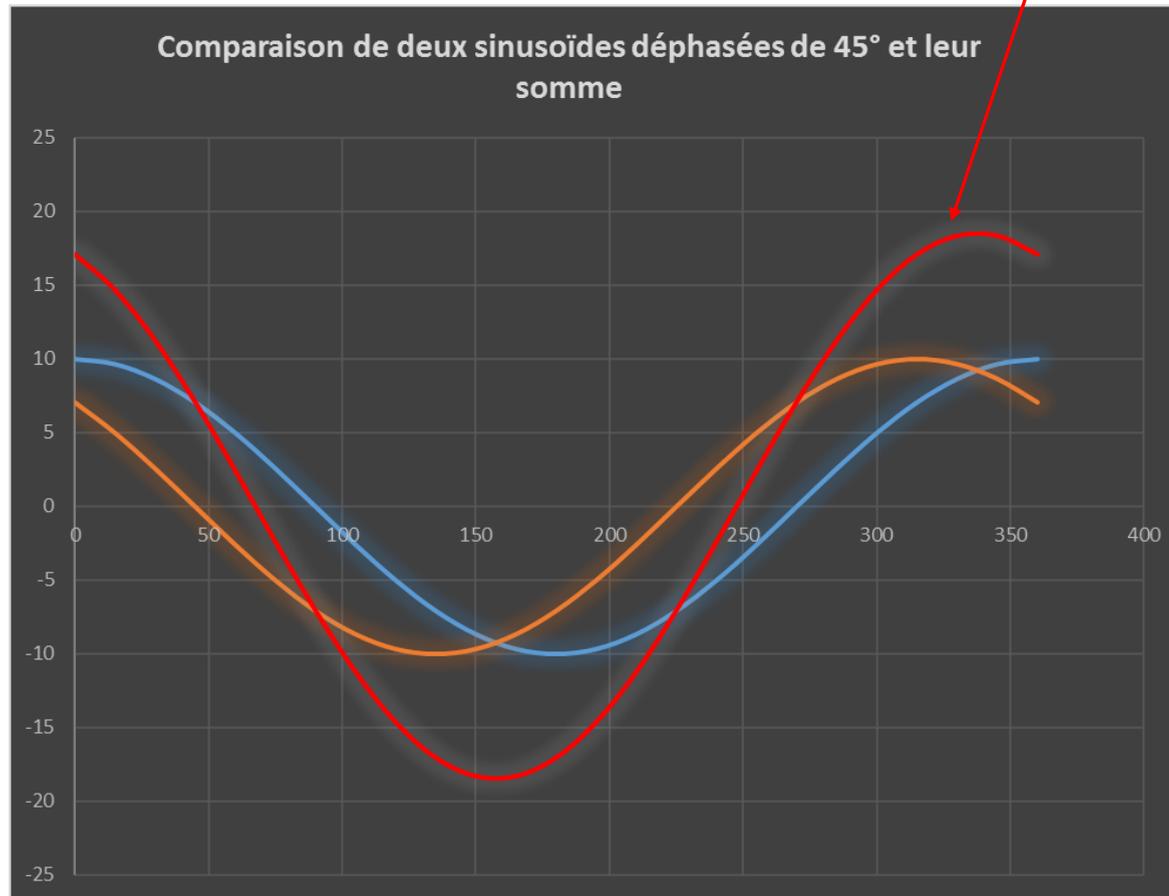


$$s(t) = 10 \cos \omega t$$

$$s(t) = 10 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$s(t)$ est en avance de $+\frac{\pi}{4}$ par rapport à $s(t)$

La somme de deux ou plusieurs sinusoïdes est encore **une sinusoïde**



1.3 Représentations pratiques de grandeurs sinusoïdales

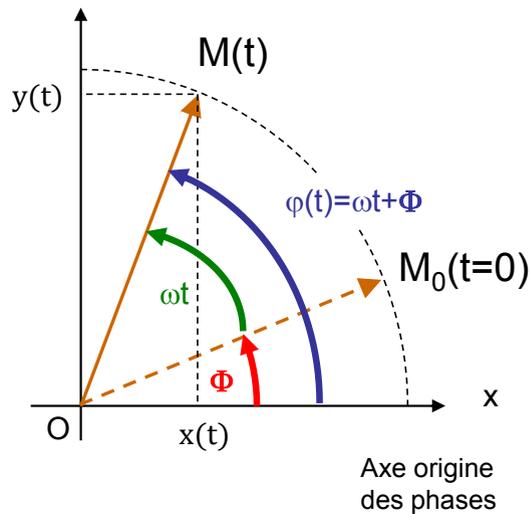
Soit le vecteur \vec{OM} de module constant et M un point de coordonnées polaires $(\rho(t), \varphi(t))$ animé d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'origine O à la vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (rad.s⁻¹).

On suppose que le point M se trouve à M_0 à l'instant $t=0$ ($\vec{OM}(t=0) = \vec{OM}_0$) et fait un angle Φ avec l'axe Horizontale ($\varphi(t=0) = \Phi$). Les coordonnées du vecteur \vec{OM} en polaires sont données par :

$$\vec{OM} = \rho \cos(\varphi) \vec{e}_x + \rho \sin(\varphi) \vec{e}_y \quad \text{or ici} \quad \rho = \|\vec{OM}\| \quad \text{et} \quad d\varphi = \omega dt \Leftrightarrow \varphi(t) = \int \omega dt = \omega t + \Phi$$

$$d'où \quad \vec{OM} = \|\vec{OM}\| \cos(\omega t + \Phi) \vec{e}_x + \|\vec{OM}\| \sin(\omega t + \Phi) \vec{e}_y$$

En coord cartésiennes on écrira: $\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y$ ce qui conduit aux équations :



$$\begin{cases} x(t) = \|\vec{OM}\| \cos(\omega t + \Phi) & s(t) = S_m \cos(\omega t + \Phi) \\ y(t) = \|\vec{OM}\| \sin(\omega t + \Phi) & s(t) = S_m \sin(\omega t + \Phi) \end{cases}$$

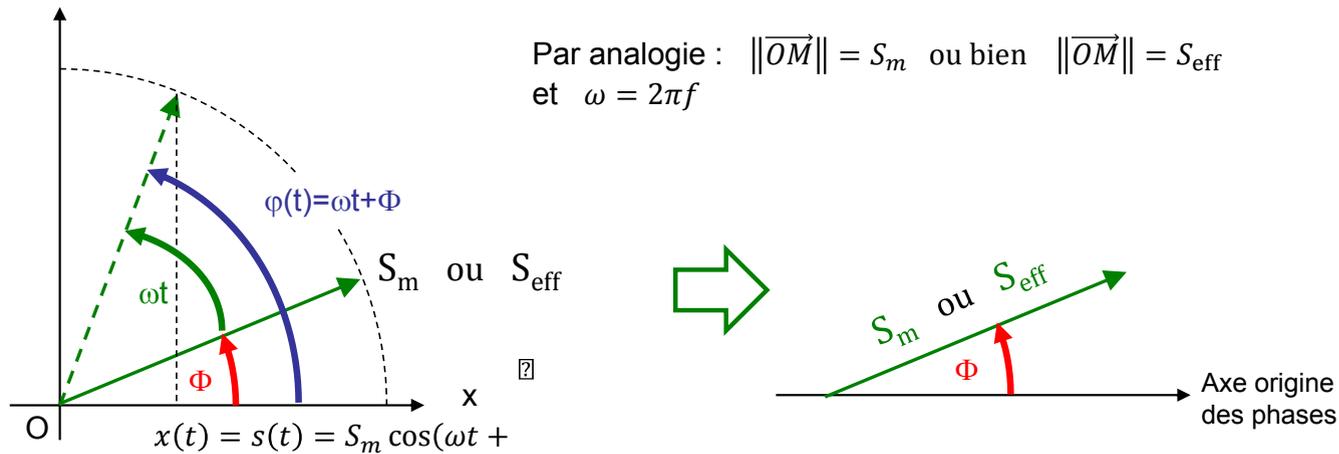
Conclusion

L'abscisse $x(t)$ ou l'ordonnée $y(t)$ d'un vecteur tournant \vec{OM} à vitesse angulaire constante ω sont des fonctions sinusoïdales, d'amplitude la longueur $\|\vec{OM}\|$ et de phase à l'origine Φ à $t=0$.

Vecteur de Fresnel tournant

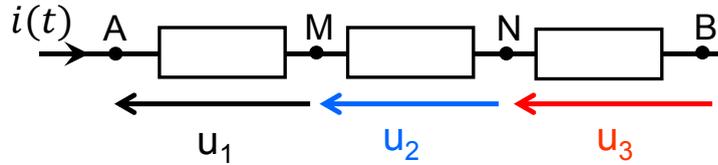
Partant de ce constat, **A.J Fresnel** propose de représenter toute fonction sinusoïdale par un vecteur tournant. La **représentation de Fresnel** ou **diagramme de Fresnel** est un outil graphique permettant d'ajouter, de soustraire, de dériver et d'intégrer des fonctions sinusoïdales de même fréquence.

En physique, de nombreuses grandeurs peuvent être des fonctions sinusoïdales du temps (ou de l'espace) : courants $i(t)$, tensions $u(t)$, puissance $p(t)$.



- si $s(t)$ représente une tension sinusoïdale on écrira alors $u(t) = U_m \cos(\omega t + \Phi) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi)$
- si $s(t)$ représente un courant sinusoïdal on écrira alors $i(t) = I_m \cos(\omega t + \Phi) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \Phi)$

Exemple pour montrer l'utilité de la représentation de Fresnel



		Val. eff	Phase
$u_1(t) = 5\sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$	$u_1(t)$	$U_1 = 5V$	$\varphi_1 = 90^\circ$
$u_2(t) = 3\sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$	$u_2(t)$	$U_2 = 3V$	$\varphi_2 = -45^\circ$
$u_3(t) = \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$	$u_3(t)$	$U_3 = 1V$	$\varphi_3 = -30^\circ$

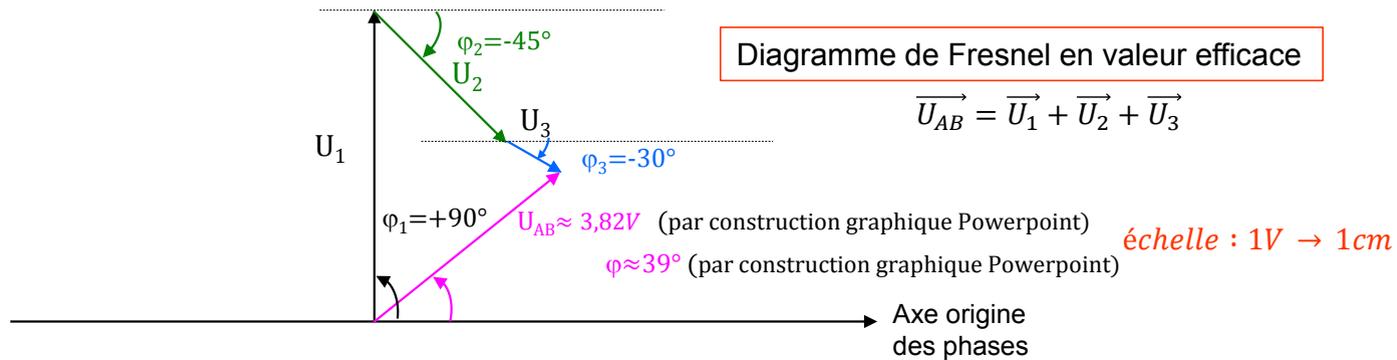
La loi d'Ohm et la 2^e loi de Kirshhoff portant sur l'additivité des tensions, sont toutes les deux vérifiées pour des tensions variables.

$$u_{AB}(t) = u_{AM}(t) + u_{MN}(t) + u_{NB}(t)$$

$$u_{AB}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

On sait que la somme de deux ou plusieurs sinusoïdes et **encore une sinusoïde** : $u_{AB}(t) = U_{AB} \sqrt{2} \cos(3t + \varphi)$

- En représentation de Fresnel chaque tension est représentée par un vecteur tournant du même nom. La tension entre A et B s'écrira vectoriellement : $\vec{u}_{AB} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$



❖ Si on devait passer par un calcul analytique ...

$$U_{AB} \sqrt{2} \cos(3t + \varphi) = 5\sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow U_{AB} \cdot \sqrt{2} [\cos 3t \cdot \cos \varphi - \sin 3t \cdot \sin \varphi] = 5\sqrt{2} \left[\cos 3t \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin 3t \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right] + 3\sqrt{2} \left[\cos 3t \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin 3t \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] + \sqrt{2} \left[\cos 3t \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin 3t \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow U_{AB} \cdot [\cos 3t \cdot \cos \varphi - \sin 3t \cdot \sin \varphi] = 5[-\sin 3t] + 3 \left[\cos 3t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 3t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \left[\cos 3t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 3t \cdot \frac{1}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t \cdot \cos \varphi \cdot U_{AB} - \sin 3t \cdot \sin \varphi \cdot U_{AB} = \cos 3t \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sin 3t \left(-5 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot U_{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \right) \\ -\sin \varphi \cdot U_{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2} - 9}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \varphi \cdot U_{AB}^2 = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{4} \\ (-\sin \varphi)^2 \cdot U_{AB}^2 = \frac{(3\sqrt{2} - 9)^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow U_{AB}^2 = \frac{1}{4} [(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2} - 9)^2]$$

$$\Leftrightarrow U_{AB}^2 = \frac{1}{4} [120 + 6\sqrt{6} - 54\sqrt{2}]$$

Pour la phase :

$$\cos \varphi \cdot U_{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \right)}{3,818} = 0,782 \Rightarrow \varphi = \arccos 0,782 = 38,51^\circ$$

$$\Leftrightarrow U_{AB} = \sqrt{\frac{58,33}{4}} = 3,818 \text{ V}$$

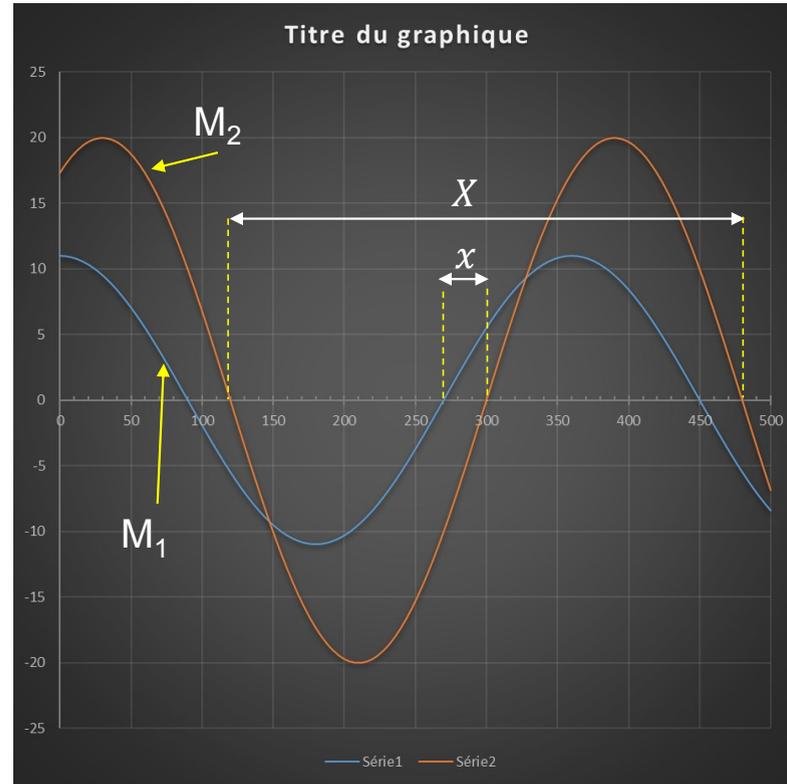
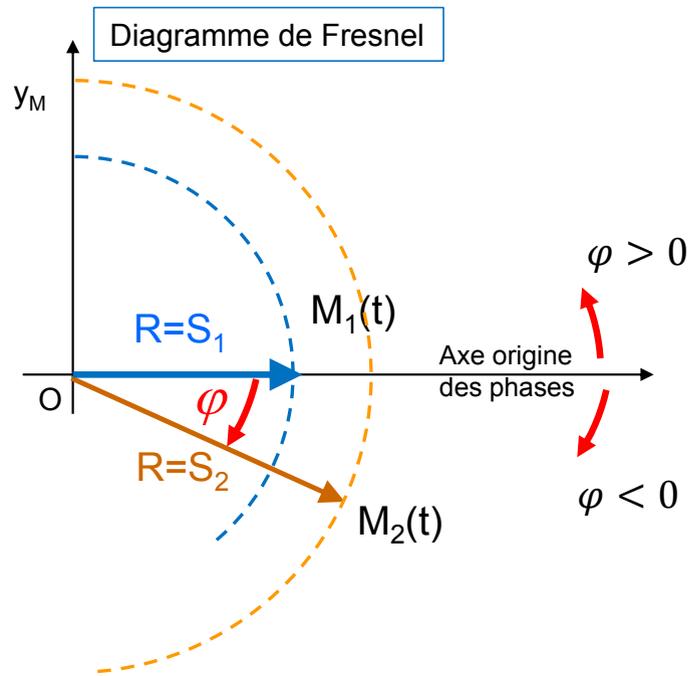
Conclusion

Après un calcul long et fastidieux on arrive, certes à des résultats certainement plus précis que l'extraction graphique de Fresnel mais l'écart n'est que de 0,5° par rapport au calcul et la valeur efficace est quasiment identique à 0,002 V près.

1.4 Mesures à l'oscilloscope du déphasage entre 2 grandeurs sinusoïdales de même périodes

$$s_1(t) = S_{1\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t = S_1 \sqrt{2} \cos \omega t \quad \text{avec } (S_1 = S_{1\text{eff}})$$

$$s_2(t) = S_{2\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = S_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } (S_2 = S_{2\text{eff}})$$

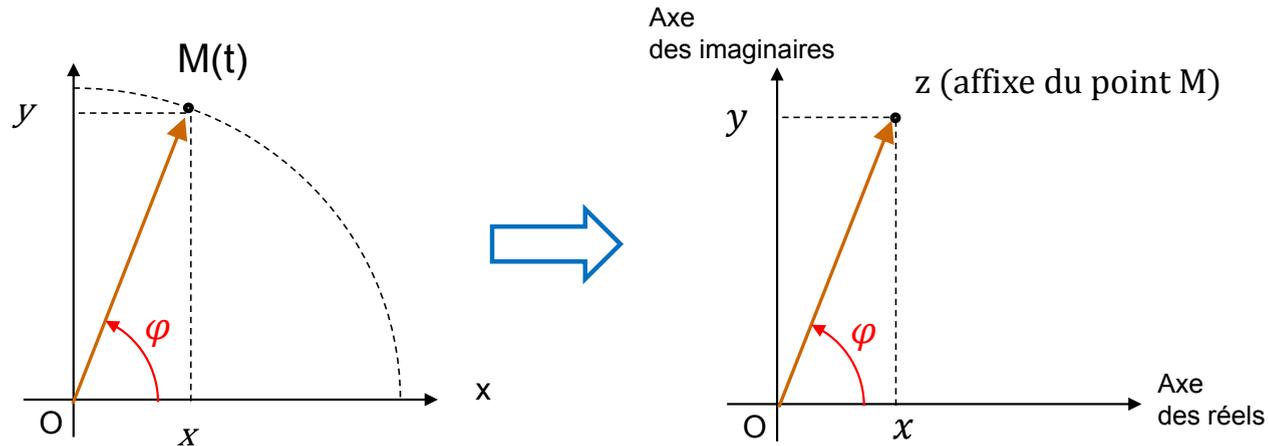


A l'aide d'un oscilloscope, le déphasage du point M_2 par rapport à M_1 s'écrit :

$$\varphi = 2\pi \frac{x}{X} \text{ (radian) } \text{ ou bien } \varphi = 360^\circ \frac{x}{X} ; \text{ on peut déterminer le signe de } \varphi$$

1.5 Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

□ Comment revenir à un calcul analytique avec des fonctions sinusoïdales ?



▪ si z est l'affixe du point $M(x, y)$ dans le plan complexe on écrira : $z = x + i y$ avec $i^2 = -1$ imaginaire pure

▪ on écrira aussi : $z = OM \cos \varphi + i OM \sin \varphi$ avec OM la longueur du vecteur \overrightarrow{OM}

▪ Le vecteur de Fresnel \overrightarrow{OM} précédent, représenté dans l'espace complexe, est l'image du nombre complexe :

$$z = OM \cos \varphi + i OM \sin \varphi = OM [\cos(\omega t + \Phi) + i \sin(\omega t + \Phi)] \quad \text{avec} \quad \varphi = \omega t + \Phi$$

▪ Si $OM = S_m$ alors $z = S_m [\cos(\omega t + \Phi) + i \sin(\omega t + \Phi)]$ et donc $s(t) = \text{Re}(z) = S_m \cos(\omega t + \Phi)$

Notation en électricité

✓ pour éviter la confusion avec le courant i , on remplace le nombre imaginaire i par j avec $j^2 = -1$

✓ on remplace le nombre complexe z par $\underline{s}(t)$ avec une barre en dessous pour éviter la confusion avec $s(t)$

En résumé

$$\underline{s}(t) = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)] \text{ partie réelle de } \underline{s}(t) \longrightarrow \text{Re}[\underline{s}(t)] = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$S_m = |\underline{s}(t)| \text{ module de } \underline{s}(t) \longrightarrow |\underline{s}(t)| = \sqrt{S_m^2 [\cos(\omega t + \varphi)^2 + \sin(\omega t + \varphi)^2]} = S_m$$

$$\varphi = \arg(\underline{S}) = \text{argument de } \underline{S} \longrightarrow \tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{S})}{\text{Re}(\underline{S})} \text{ et } \varphi = \arctan \left[\frac{\text{Im}(\underline{S})}{\text{Re}(\underline{S})} \right]$$

Voir le définition de \underline{S} plus bas

- D'autre part, on sait aussi que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\underline{s}(t) = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{s}(t) = [S_m e^{j\varphi}] \cdot e^{j\omega t} = [S_{\text{eff}} e^{j\varphi}] \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

- On définit deux nouvelles caractéristiques de $s(t)$: \underline{S}_m et \underline{S}

➤ $\underline{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe et on écrira : $\underline{s}(t) = \underline{S}_m e^{j\omega t}$

➤ $\underline{S} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi}$ l'amplitude efficace complexe et on écrira : $\underline{s}(t) = \underline{S} \sqrt{2} e^{j\omega t}$

□ En pratique on utilisera plutôt les Amplitudes Efficaces Complexes (AEC) associées

$$\underline{S} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi} \text{ et on écrira également: } \underline{S} = S_{\text{eff}} \angle \varphi \text{ en notation phaseur}$$

Conventions d'écriture adoptées pour la suite

Écriture temporelle (valeur instantanée)	$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) = S_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude ou valeur maximale	S_m
Valeur efficace	S_{eff}
Amplitude efficace complexe	$\underline{S} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi}$
Notation phaseur	$\underline{S} = S_{\text{eff}} \angle \varphi$
Amplitude efficace complexe conjuguée	$\overline{S} = S_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$
Vecteur de Fresnel associé	\vec{S}_m ou \vec{S}_{eff}

Exemples

$$u(t) = 100 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V} = 70,71 \sqrt{2} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Cette tension a pour amplitude maximale 100V, une valeur efficace de 70,71V et une phase de 90°

en représentation complexe on écrira : $\underline{u}(t) = 70,71 \sqrt{2} e^{j(5t + \frac{\pi}{2})}$

Elle a pour AEC : $\underline{U} = 70,71 e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ V}$ ou $\underline{U} = 70,71 \text{ V} \angle +\frac{\pi}{2}$ en notation phaseur

1.6 . Additivité des tensions et des courants

Toutes les lois vues dans le cadre des circuits en courant continu sont applicables au régime variable.

- Additivité des d.d.p (mailles)
- Additivité des courants (Lois aux noeuds)
- Méthodes d'analyse de circuit : Théorème de superposition, Théorème de Thévenin et Norton ...

Les opérations sur les valeurs instantanées des grandeurs électriques sont remplacées par des opérations soit vectorielles en représentation de Fresnel soit algébriques en représentation complexe.

❖ Additivité des d.d.p

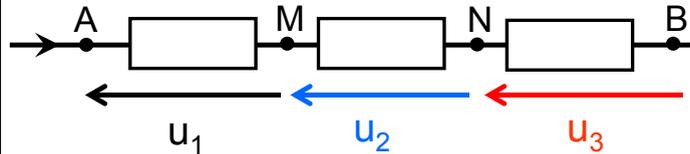
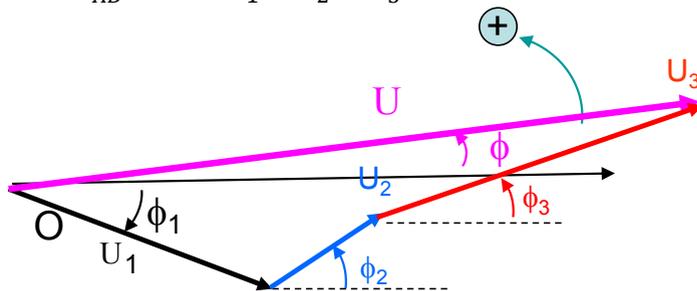


Diagramme de Fresnel en valeur efficace

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3$$



Cas : $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$ et $\phi_3 > 0$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ u_2(t) &= U_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ u_3(t) &= U_3 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_3) \end{aligned}$$

$$u_{AB}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

En représentation complexe des AEC

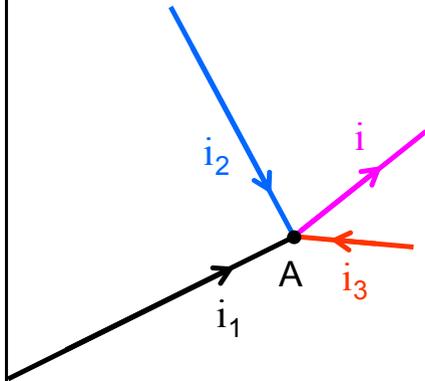
$$\underline{u}_{AB}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \underline{u}_3(t) = U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 \quad \text{notation AEC}$$

$$U e^{j\varphi} = U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2} + U_3 e^{j\varphi_3} \quad \text{notation AEC}$$

$$U \angle \varphi = U_1 \angle \varphi_1 + U_2 \angle \varphi_2 + U_3 \angle \varphi_3$$

❖ Additivité des courants



$$i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2(t) = I_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$i_3(t) = I_3 \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_3)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$$

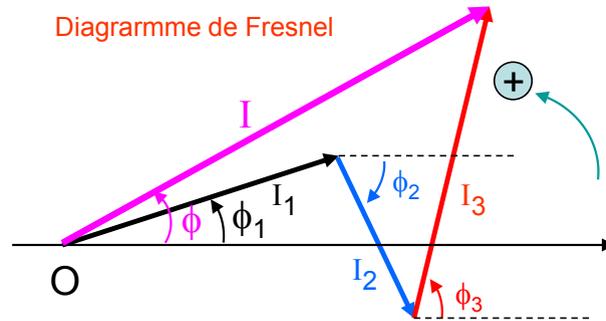
Au nœud A: $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$ (Fresnel)

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad (\text{AEC})$$

soit : $I e^{j\phi} = I_1 e^{j\phi_1} + I_2 e^{j\phi_2} + I_3 e^{j\phi_3}$

ou : $I \angle \phi = I_1 \angle \phi_1 + I_2 \angle \phi_2 + I_3 \angle \phi_3$

Diagramme de Fresnel



Cas : $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$ et $\phi_3 > 0$