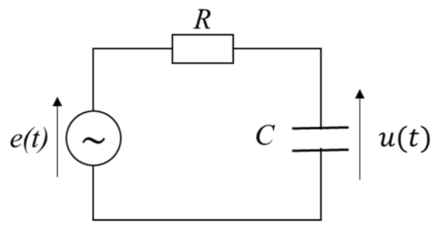
<u>Exercice</u> 15

Considérons le montage suivant :



Le signal *e(t)* est une tension sinusoïdale de valeur maximale $E_m=5\ V$ et de fréquence 20 *Hz*. $\underline{Z}_1$ (R=50 Ω) et $\underline{Z}_2$ (C=15 µF) sont deux impédances. La référence de phase est le signal *e(t)*.
Déterminez la forme temporelle de la tension *u(t)*.

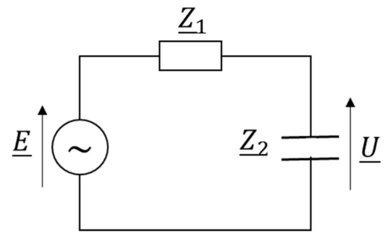
<u>Réponse</u> :

La pulsation électrique dans le circuit vaut : $\omega = 2\pi f = 40\pi\ s^{-1}$

Le symbole utilisé pour représenter le générateur de tension, indique qu'on a à faire à une source de type sinusoïdale délivrant une tension de la forme: $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_e)$. Si on fait attention à l'énoncé, ce qui est donné égale à 5V n'est pas la valeur efficace E de *e(t)* mais l'amplitude maximale E_m. Cette dernière est reliée à la valeur efficace par : $E_m = E\sqrt{2} \Rightarrow$ la valeur efficace $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\ V$. D'autre part, on nous indique, toujours dans l'énoncé, que la référence des phases est le signal e(t), d'où $\varphi_e = 0$.
Finalement, $e(t) = 5\cos 40\pi\, t\ \ (V)$

Nous allons maintenant redessiner ce montage en faisant apparaitre les grandeurs électriques en représentation complexe. Pour cela nous devons d'abord définir les impédances (ou admittances) et les amplitudes efficaces complexes (AEC) des courants et tensions dans le circuit :

Dipôle	Impédances	Module	Phase
R	$\underline{Z}_1 = R$	$\lvert\underline{Z}_1\rvert = R$	$\varphi_R = 0$
C	$\underline{Z}_2 = \frac{-j}{C\omega} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{C\omega}$	$\lvert\underline{Z}_2\rvert = \frac{1}{C\omega}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$
Tension	AEC	Module (V)	Phase
$e(t)$	$\underline{E} = Ee^{j0}$	$\lvert\underline{E}\rvert = E = \frac{5}{\sqrt{2}}\ V$	$\varphi_e = 0$
$u(t)$	$\underline{U} = Ue^{j\varphi_U}$	$\lvert\underline{U}\rvert = U = ?$	$\varphi_U = ?$



Pour déterminer la tension u(t), il suffit d'appliquer la loi des mailles. Cependant, on peut aussi faire remarquer qu'on peut obtenir le même résultat mais plus rapidement en appliquant la méthode du pont diviseur (ou diviseur de tension). Il vient : $\underline{U} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{E}$

$$\underline{U} = \frac{\frac{-j}{C\omega}}{R+\frac{-j}{C\omega}}\underline{E} \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{-j}{RC\omega-j}\underline{E} \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{-j\,(RC\omega+j)}{(RC\omega-j)\cdot(RC\omega+j)}\underline{E} \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{-j\,[RC\omega+j]}{(RC\omega)^2+1}\underline{E} \Leftrightarrow \underline{U} = \underline{E}\,\frac{1-jRC\omega}{(RC\omega)^2+1}$$

- Déterminons la valeur efficace de la tension u(t) (on utilise ici les propriétés mathématiques des variables complexes)

  $$U = \lvert\underline{U}\rvert = \frac{\lvert\underline{E}\rvert}{(RC\omega)^2+1}\lvert 1 - jRC\omega\rvert = \frac{E}{(RC\omega)^2+1}\sqrt{(RC\omega)^2+1} \Rightarrow U = \frac{E}{\sqrt{(RC\omega)^2+1}}$$

  $$Application\ numérique: U = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(50\cdot 15\cdot 10^{-6}\cdot 40\cdot\pi)^2+1}} = 3{,}514\ V$$

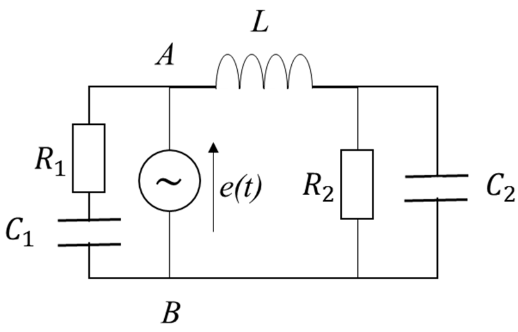
- Déterminons la phase de u(t)

  $$\varphi_U = arctan\left[\frac{Im(\underline{U})}{Re(\underline{U})}\right] = arctan\left[\frac{-RC\omega}{1}\right] = arctan[-RC\omega]$$

  Application numérique : $\varphi_U = arctan[-50\cdot 15\cdot 10^{-6}\cdot 40\cdot\pi] = -5{,}38°$

  La forme temporaire de u(t) est donc : $u(t) = 3{,}514\,\sqrt{2}\cos\left(40\pi\, t - \frac{5{,}38}{180}\pi\right)$

Exercice 16



Dans le réseau de la figure ci-contre, la source de tension, d'impédance interne nulle, délivre une force électromotrice $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ *avec E=1V et ω=4 rad s*$^{-1}$ *,* ***L= 0,05 H ,*** ***R_1=R_2 = 2 Ω et C_1=C_2 = 0,125 F****.*

1) Calculer les modules des impédances des éléments réactifs.

2) Calculer l'admittance complexe du circuit **(*R_2,C_2*)**.

3) Calculer l'impédance complexe du circuit **(*R_1,C_1*)**.

4) Calculer l'admittance complexe équivalente dans laquelle débite la source.Détailler les calculs intermédiaires.

5) En déduire l'expression complexe du courant débité par la source et son expression temporelle.

1) Calculer les impédances des éléments réactifs.

Rép : On rappelle que l'expression de l'impédance $\underline{Z} = R + jX$, comporte une partie réelle R désignée par résistance et une partie imaginaire X désignée par réactance. Les dipôles réactifs sont des dipôles pour lesquels la résistance est nulle. Ce sont des éléments réactifs. On en connait deux : C et L.

$$\underline{Z}_{C_2} = \frac{-j}{C_2\omega} = \frac{-j}{0{,}125\cdot 4} = -2j \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_{C_2} = -2j$$

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{-j}{C_1\omega} = \frac{-j}{0{,}125\cdot 4} = -2j \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_{C_1} = -2j$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega = j\cdot 0{,}05\cdot 4 = 0{,}2j \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_L = 0{,}2j = \frac{j}{5}$$ (pour éviter l'écriture décimale)

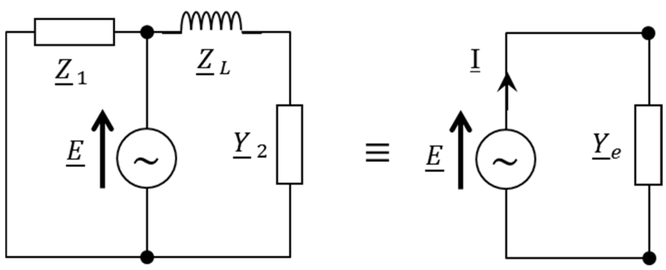
2) Calculer l'admittance complexe du circuit (*R_2, C_2*).

(R_2, C_2) *sont en parallèle:* $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_{R_2} + \underline{Y}_{C_2}$ $\quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$ $\quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{-2j} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}$ $\quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{2}(1+j)$

3) Calculer l'impédance complexe du circuit (*R_1, C_1*).

(R_1, C_1) *sont en série:* $\underline{Z}_1 = R_1 + \underline{Z}_{C_1}$ $\quad \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{-j}{C_1\omega}$ $\quad \underline{Z}_1 = 2 - 2j$ $\quad \underline{Z}_1 = 2(1-j)$

4) Calculer l'admittance complexe équivalente dans laquelle débite la source. Détailler .



La source est montée en parallèle avec la branche de gauche contenant l'admittance $\underline{Z}_1$et avec la branche de droite contenant l'impédance $\underline{Z}_L$en série avec l'impédance $\frac{1}{\underline{Y}_2}$. On désigne par $\underline{Y}_e$ l'impédance équivalente aux deux branches :

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_L + \frac{1}{\underline{Y}_2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{Y}_e = \frac{1}{2(1-j)} + \frac{1}{\frac{j}{5} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1+j)}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_e = \frac{(1+j)}{4} + \frac{5(5+4j)}{41} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_e = \frac{141}{164} + j\frac{121}{164}$$

Précisons le module est la phase (argument) de l'admittance équivalente $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\varphi}}$

$$Y_e = |\underline{Y}_e| = \sqrt{\left(\frac{141}{164}\right)^2 + \left(\frac{121}{164}\right)^2} \cong \mathbf{1,133\ \Omega^{-1}}$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{121}{141}\right) = 40{,}63°$$

D'où $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{e}} = \mathbf{1,133\ \Omega^{-1}}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\mathbf{40,63\ \pi}}{\mathbf{180}}}$

5) Expression complexe du courant délivré par la source ainsi que son expression temporelle

la source de tension à pour expression : $e(t) = \sqrt{2}\cos 4t$ de la forme: $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$
Par identification: valeur efficace $E = 1V$, $pulsation\ \omega = 4s^{-1}$ $et\ de\ phase\ \varphi = 0$

En représentation complexe : l'AEC de la source est donc: $\underline{E} = E e^{j\varphi} = 1e^{j0} = 1V$

Dans le schéma équivalent (une maille) on a donc : $\underline{E} = \frac{1}{\underline{Y_e}}\underline{I} \iff \underline{I} = \underline{Y_e}\underline{E}$ $\quad \underline{I} = 1{,}133\ \boldsymbol{\Omega}^{-1}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\mathbf{40,63\ \pi}}{\mathbf{180}}} \cdot 1V$

Finalement: $\underline{I} = 1{,}133\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\mathbf{40,63\ \pi}}{\mathbf{180}}}\ (\boldsymbol{A})$

Expression temporelle complexe du courant : $\underline{i}(t) = \underline{I}\sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \underline{i}(t) = 1{,}133\ \sqrt{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\left(\mathbf{4t}+\frac{\mathbf{40,63\ \pi}}{\mathbf{180}}\right)}$

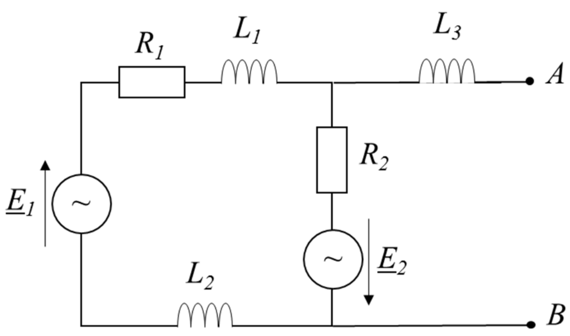
Expression temporelle du courant : $i(t) = Re\left(\underline{i}(t)\right) = 1{,}133\ \sqrt{\mathbf{2}}\cos\left(\mathbf{4t} + \frac{\mathbf{40,63\ \pi}}{\mathbf{180}}\right)\ (\boldsymbol{A})$

Exercice 17

Déterminer :

- le générateur équivalent de Thévenin $(\underline{E}_0 = \underline{E}_{Th},\ \underline{Z}_0 = \underline{Z}_{Th})$
- le générateur équivalent de Norton, $(\underline{I}_0 = \underline{I}_N,\ \underline{Z}_0 = \underline{Z}_N)$

correspondant au réseau actif ci-dessous entre les **points A et B**.



On branche entre **A** et **B** un condensateur *C* tel que $\frac{1}{C\omega} = 2\Omega$,

déterminer le courant traversant ce condensateur.

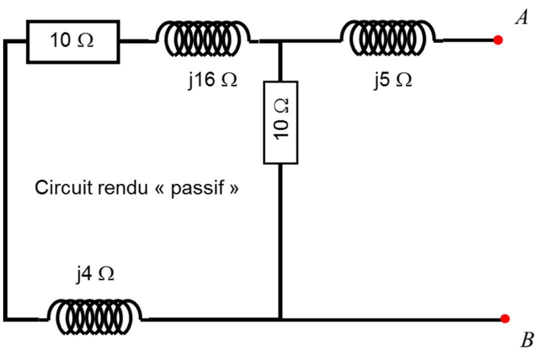
On donne : $L_1\omega = 16\Omega,\ L_2\omega = 4\Omega,\ L_3\omega = 5\Omega,\ R_1 = R_2 = 10\Omega,\ \underline{E}_1 = 10V\angle 0°\ et\ \underline{E}_2 = 10V\angle 90$

Générateur équivalent de Thévenin $(\underline{E}_{Th}, \underline{Z}_{Th})$

Il correspond au réseau actif ci-contre entre les points A et B alimenté par des sources de tensions sinusoïdales de pulsation ω.
Comme nous l'avions vu au cours du premier semestre, il s'agit d'abord de déterminer

- l'impédance équivalente au circuit $\underline{Z}_{AB}$ entre A et B après avoir éteint les sources de tensions et débranché les sources de courants et l'identifier comme étant $\underline{Z}_{Th}$.
- Ensuite il faut déterminer la tension à vide $\underline{U}_{AB}$ du circuit actif et l'identifier comme étant $\underline{E}_{Th}$.

a) Détermination de $\underline{Z}_{Th}$ càd $\underline{Z}_{AB}$



On redessine le schéma du montage en faisant apparaître les impédances de chaque dipôle.

Exemple pour la bobine L_1 : $\underline{Z}_{L_1} = jL_1\omega = 16j\ \Omega$

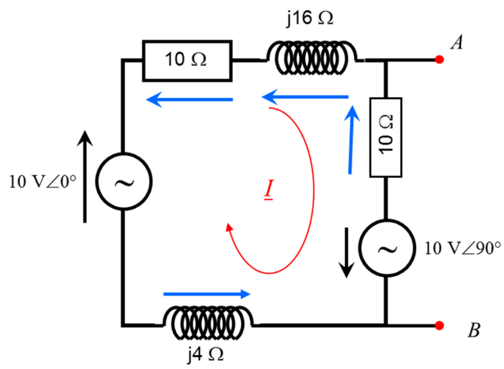
Dans le circuit ci-contre (rendu passif), on identifie deux branches en dérivation (parallèle) : la première regroupant les dipôles j4Ω, 10Ω et j16 Ω montés en série et la deuxième branche centrale contenant la résistance de 10Ω. L'impédance équivalente à ces deux branches est en série avec la bobine de j5 Ω.

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{10\cdot(10+j20)}{10+(10+j20)} + j5 = \frac{5}{2}(1+j2)(1-j) + J5 = \frac{15}{2}\ (1+j)$$

D'où $\underline{Z}_{Th} = \frac{15}{2}\ (1+j)$

b) Détermination de $\underline{E}_{Th}$ càd $\underline{U}_{AB}$

On revient au **circuit actif**, on constate que la bobine j5 Ω n'est traversée par aucun courant, puisque le circuit est ouvert entre A et B. La tension $\underline{U}_{AB}$ est alors la même que celle aux bornes de la branche regroupant la résistance de 10 Ω et le générateur d'AEC 10V ∠90°.



Parmi les différentes méthodes, on retiendra celle des mailles, puisque nous n'avons ici qu'une seule.

En parcourant la maille dans le sens trigonométrique, on obtient :

$$-10j + 10\cdot\ \underline{I} + j16\cdot\underline{I} + 10\cdot\ \underline{I} - 10 + j4\cdot\underline{I} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (10 + j16 + 10 + j4)\cdot\underline{I} = 10j + 10$$

$$\Leftrightarrow\ (20 + j20)\cdot\underline{I} = 10j + 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = \frac{1+j}{2(1+j)} = 0{,}5\ A$$

Calculons maintenant la tension entre A et B comme la somme des tensions aux bornes de la résistance de 10 Ω et du générateur de tension 10V ∠90°.

La tension $\underline{U}_{AB}$ est représentée par une flèche allant de B vers A. On remarquera quelle est dans le même sens que celle de la résistance de 10 Ω mais de sens opposée à celle du générateur la tension 10V ∠90°. On écrira alors

$$\underline{U}_{AB} = 10\cdot\underline{I} - 10j = 10\cdot 0{,}5 - 10j = 5\ (1-2j)$$

$$d'où \qquad \underline{E}_{Th} = 5\ (1-2j)$$

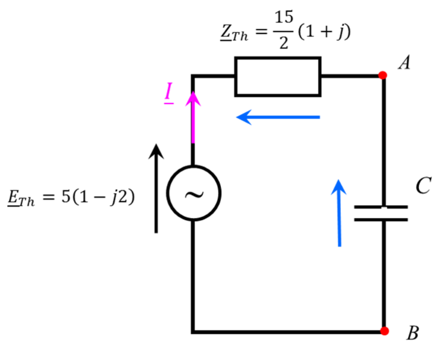
Courant traversant le condensateur

Comme on peut le voir ici, on va utiliser l'expression cartésienne pour tension du générateur

Le montage ci-contre montre le générateur de Thévenin en série avec l'impédance du condensateur. Il est*

Facile d'établir que l'AEC du courant dans le circuit est donnée par l'expression :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{Th}}{\underline{Z}_{Th}+\underline{Z}_C} = \frac{5(1-j2)}{\frac{15}{2}(1+j)-2j} = \frac{10(1-j2)}{15+11j} = \frac{10}{346}(1-2j)(15-11j) = \frac{5}{173}(-7-41j)$$



- valeur efficace : $I = |\underline{I}| = \frac{5}{173}\sqrt{7^2+41^2} = 1{,}20\ A$
- phase ou argument: $\varphi = arctan\left(\frac{-41}{-7}\right) = 80{,}3°$ cependant, on sait que la fonction tangente admet deux solutions à π près.

L'expression de $\underline{I}$ montre une partie réelle $négative$ $(cos\varphi < 0)$ et une partie imaginaire également négative $(sin\varphi < 0)$. L'angle φ se situe donc dans le quart 3 du cercle trigonométrique. La solution est donc $\varphi = 80{,}3° - 180° = -99{,}7°$

En résumé : en notation phaseur : $I = 1{,}20\ A\ \angle -99{,}7°$

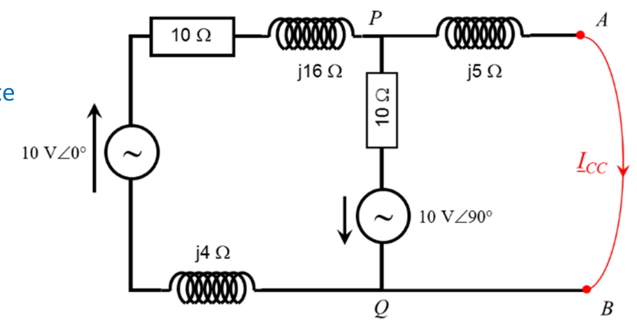
Générateur équivalent de Norton $(\underline{I}_N, \underline{Z}_N)$

Comme nous l'avions vu au cours du premier semestre, il s'agit d'abord de déterminer l'impédance équivalente au circuit $\underline{Z}_{AB}$

entre A et B après avoir éteint les sources de tensions et débranché les source de courants et l'identifier comme étant $\underline{Z}_N$ .Ensuite il faut déterminer le courant de court-circuit I_{AB} en reliant A et B par un fil et l'identifier comme étant I_N.

a) Détermination de $\underline{Z}_N$ càd $\underline{Z}_{AB}$
On applique la même méthode que celle de Thévenin d'où $\underline{Z}_N = \frac{15}{2}(1+j)$

b) Détermination de $\underline{I}_N$ càd $\underline{I}_{AB}$ ou bien $\underline{I}_{CC}$



Appliquons la méthode des nœuds pour obtenir la tension $\underline{U}_{PQ}$ et ensuite

on pourra en déduire le courant à partir de la loi d'Ohm : $\underline{U}_{PQ} = 5j \cdot \underline{I}_{CC}$

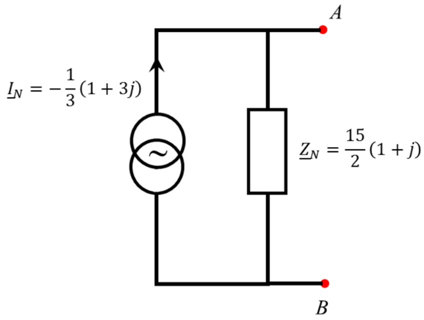
Au nœud P :

$$\frac{10+\underline{U}_{QP}}{10+20j} + \frac{-10j+\underline{U}_{QP}}{10} + \frac{\underline{U}_{QP}}{5j} = 0 \Leftrightarrow \underline{U}_{PQ}\left(\frac{1}{10+20j}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5j}\right) = \frac{10}{10+20j} - \frac{10j}{10}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_{PQ}\left(\frac{1-2j}{10}+\frac{1}{2}-\frac{j}{1}\right) = \frac{5}{1+2j} - 5j \Leftrightarrow \underline{U}_{PQ} = \frac{5}{3}\frac{(1-7j)}{(1-2j)} \Leftrightarrow \underline{U}_{PQ} = \frac{5}{3}(3-j)$$

D'où $\underline{I}_{CC} = \frac{\underline{U}_{PQ}}{5j} = \frac{5}{3\cdot 5j}(3-j) \Leftrightarrow \underline{I}_{CC} = -\frac{1}{3}(1+3j)$

D'où $\underline{I}_N = -\frac{1}{3}(1+3j)$



<u>Bonus</u> : montrons par transformation g.t ↔ g.c que les deux générateurs de Thévenin et de Norton obtenus, sont équivalents. En partant par exemple de ce dernier résultat, on sait que le générateur de tension équivalent àla même impédance interne et une tension $\underline{E}_0 = \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$ et comparons ensuite $\underline{E}_0$ à $\underline{E}_{Th}$.

$\underline{E}_0 = -\frac{15}{2}(1+j) \cdot \frac{1}{3}(1+3j) = 5\,(1-2j)$ CQFD