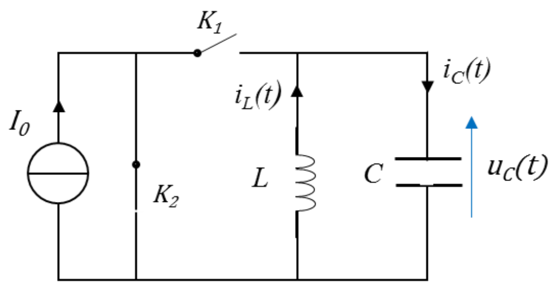
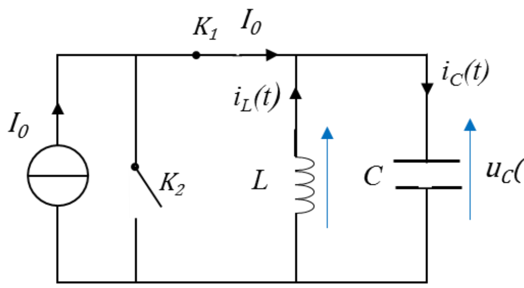
## Exercice 12

Soit le circuit suivant alimenté par un générateur de courant continu $I_0$ et dans lequel les deux interrupteurs $K_1$ et $K_2$ fonctionnent de façon complémentaire : si $K_1$ est ouvert alors $K_2$ est fermé et si $K_1$ est fermé alors $K_2$ est ouvert.
On donne : $I_0$ = 1 mA, C = 10 nF, L = 1 mH
Depuis très longtemps $K_1$ est ouvert et $K_2$ est fermé.

Le condensateur est initialement déchargé. A t = 0 $K_1$ se ferme et $K_2$ s'ouvre simultanément.




Ecrire la loi des nœuds en fonction de $I_0$, $i_c$ et $i_L$.
Rép : compte tenu de l'orientation donnée sur le schéma (qu'il faut conserver) pour le courant $i_L$ , la 1$^{ere}$ loi de Kirshhoff donne : $I_0 + i_L = i_C$

Déterminer les valeurs de $i_c(0_+)$, $i_L(0_+)$, $u_c(0_+)$
Rép : il y a continuité du courant à travers la bobine et continuité de la tension aux bornes du condensateur.
Par conséquent $\quad i_L(0^+) = 0 \;\; et \;\; u_C(0^+) = 0 \;\; \text{puisque} \;\; i_L(0^-) = 0 \;\; et \;\; u_C(0^-) = 0$

Donc d'après la loi des nœuds : $I_0 + i_L(0^+) = i_C(0^+) \qquad \Leftrightarrow i_C(0^+) = I_0 + 0 = I_0$
Donner la relation entre $i_c$ et $u_c$.
Rép : $\quad i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$

Donner la relation entre $i_L$ et $u_c$.
Rép : la bobine et le condensateur sont en dérivation donc

$$u_L(t) = u_C(t) \quad et \;\; u_L(t) = -L\frac{di_L(t)}{dt} \;\; (\text{signe} - \text{ pour tenir compte de l'orientation de } i_L \text{ et } u_L\,)$$

$$u_C(t) = -L\frac{di_L(t)}{dt}$$

En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $u_c(t)$.
Rép : en reprenant l'équation précédente :

$$u_C(t) = -L\frac{di_L(t)}{dt} = -L\frac{d(i_C(t) - I_0)}{dt} = -L\frac{di_C(t)}{dt} - L\frac{d(-I_0)}{dt} = -L\frac{di_C(t)}{dt} - 0 = -L\frac{di_C(t)}{dt}$$

On introduit l'expression de $i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$ dans l'équation ci-dessus :

$$u_C(t) = -L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C(t)}{dt}\right) = -LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0}$$

Question supplémentaire, déterminer l'expression de $u_c(t)$.

C'est bien une équ. diff du second ordre sans second membre. On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

L'équation devient : $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, u_C(t) = 0$

Résolution de l'équa diff : on prend comme sol particulière (revoir le cours)

$$u_C(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = r\,e^{rt} \quad et \quad \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} = r^2\,e^{rt}$$

Equation caractéristique : $(\,r^2 + \omega_0^2\,)\,e^{rt} = 0 \quad or \;\; e^{rt} \neq 0 \quad d'où \;\; r^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow r^2 = -\,\omega_0^2 = i^2\,\omega_0^2$

On peut passer également par le calcul du $\Delta$ (ici $\Delta < 0$) de l'équation du second degré en *r*.

Deux valeurs pour r : $r = \pm\sqrt{i^2\,\omega_0^2} \quad d'où \quad r_1 = i\omega_0 \quad et \quad r_2 = -i\omega_0$

La solution générale est du type : $u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = A\,e^{i\omega_0 t} + B\,e^{-i\omega_0 t} = D\cos(\omega_0 t + \varphi)$

En remplaçant $e^{-i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t \quad et \quad e^{i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t$, on peut montrer que la partie imaginaire s'annule et il ne reste plus que la solution réelle sous la forme : $u_C(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Précisons D et φ avec les conditions initiales :

- $u_C(0) = 0 = D\,cos\varphi \quad$ comme $D \neq 0$ (c'est l'amplitude de la tension) $\quad$ il vient: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- $i_C(0) = I_0 = C\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = -C\,D\,\omega_0\sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = -\,C\,D\,\omega_0\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\,C\,D\,\omega_0$

  $d'où \quad D = -\frac{I_0}{C\omega_0}$

  Il vient : $u_C(t) = -\frac{I_0}{C\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{C\omega_0}\sin\omega_0 t$

$$\boxed{u_C(t) = \frac{I_0}{C\omega_0}\sin\omega_0 t}$$

## Exercice 13

A partir d'un circuit *r-L–C* parallèle nous allons obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension *v(t)*.

On considère le circuit de la figure 1 dans lequel la résistance *r* symbolise la globalité des pertes par effet Joule dues aux différents éléments du circuit (condensateur, bobine, fils de connexion).

En utilisant la loi au nœud, écrire une relation entre les trois intensités $i_C(t)$, $i_L(t)$ et $i_R(t)$.

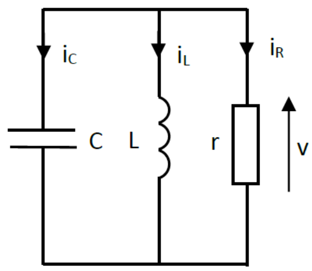



Figure 1

Rép : ne sachant pas quels sont les courants qui arrivent et ceux qui partent aux deux nœuds du circuit de la figure 1, on va écrire la loi des nœuds en faisant intervenir des courants algébriques $\sum i_k = 0$ (ils auront une valeur numérique positive s'ils arrivent au nœud et négative s'ils en partent) :

$$i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) = 0$$

En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par *v(t)*.

Rép : les 3 dipôles sont en dérivation, ils ont donc la même tension v(t) à leurs bornes.

On a donc : $i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ et $v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ et $v(t) = r\, i_R(t)$

A partir des relations : $v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ et $i_L(t) = -i_C(t) - i_R(t)$ et $i_R(t) = \frac{v(t)}{r}$

et de ce qui précède, on en déduit : $i_L(t) = -C\frac{dv(t)}{dt} - \frac{v(t)}{r}$ et $v(t) = L\frac{d}{dt}\left[-C\frac{dv(t)}{dt} - \frac{v(t)}{r}\right]$

c'est-à-dire : $v(t) = -LC\frac{d}{dt}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] - L\frac{d}{dt}\left[\frac{v(t)}{r}\right] = -LC\frac{d^2v(t)}{dt^2} - \frac{L}{r}\frac{dv(t)}{dt}$

soit : $LC\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{L}{r}\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{rC}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = 0}$

L'écrire sous la forme canonique : $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2\, v(t) = 0$ ; on donnera les expressions de *m* et $\omega_0$ en fonction de *r*, *L* et *C*.

Rép : on pose $2m\omega_0 = \frac{1}{rC}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\Rightarrow m = \frac{1}{2\omega_0 rC} = \frac{\sqrt{LC}}{2rC}$

On a relevé le chronogramme de *v(t)* (figure 2) sans aucune information sur les échelles :

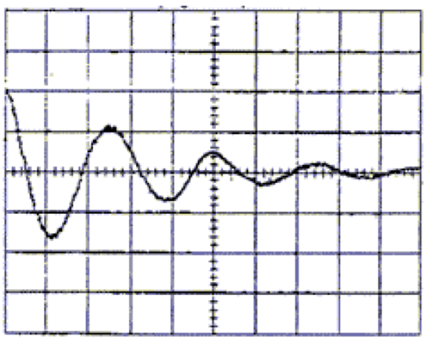


Figure 2 : Chronogramme de *v(t)*

Indiquer le type de régime transitoire et dans quel intervalle se situe le coefficient d'amortissement *m*.

Rép : On observe sur le chronogramme de la figure 2 une sinusoïde amortie qui correspond au régime pseudo-périodique valable si le discriminant de l'équ. diff est négatif, c'est-à-dire $\Delta < 0$ pour l'équation caractéristique.

Calculons le discriminant de l'équ. caractéristique :

$r^2 + 2m\omega_0\, r + \omega_0^2 = 0 \qquad \Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$

$donc\ \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\omega_0^2(m^2-1) < 0 \quad càd \quad m^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < m < 1$

Comme m représente des grandeurs positives, $m = \frac{\sqrt{LC}}{2rC}$, on restreint l'intervalle à $0 \le m < 1$

Proposer une interprétation énergétique pour expliquer la forme de *v(t)*.

Rép : même si le point de départ n'est pas précisé ici, pour notre raisonnement, on peut supposer que l'énergie électrique provient soit du condensateur initialement chargé soit de la bobine. Ensuite cette énergie fournit par L (ou C) (jouant le rôle de générateur) se retrouve en partie emmagasinée dans C (ou L) et en partie dans la résistance r. Sauf que r en chauffant (par effet joule) fait perdre de l'énergie au circuit, par conséquent l'énergie totale diminue après chaque cycle de charge et décharge de L (ou C) et tend ainsi avec le temps vers 0.

Le graphe de la figure 2 a pour axe vertical la tension v(t) et pour axe horizontal le temps.