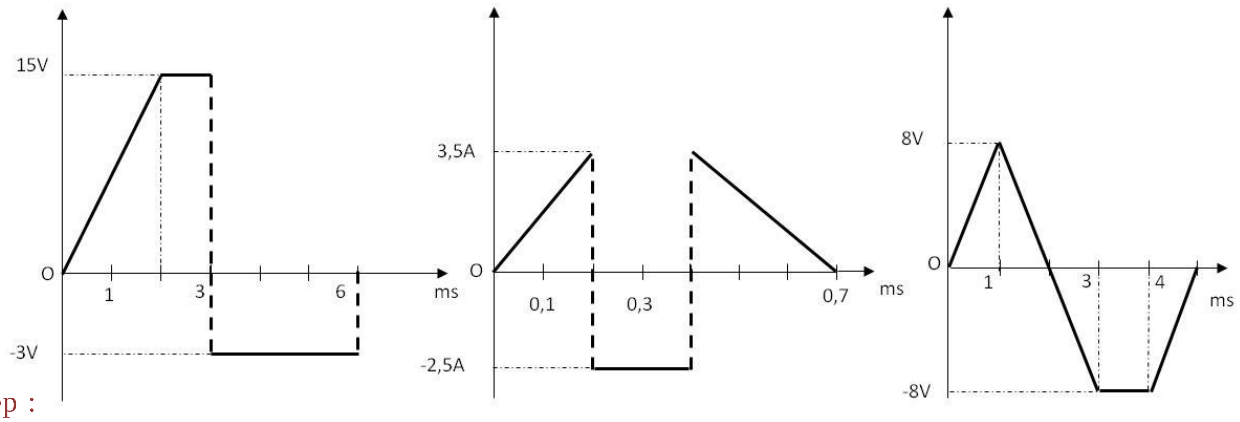
université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013 / 2014** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **PARCOURS / ETAPE : MP** **Code UE : CP4024** **Epreuve : Electrocinétique II** **Date :** 30 mai 2014 **Heure : 11h00** **Durée :** 1h30 Documents : non autorisés Epreuve de M/Mme : M. Aïche	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1 (4 points)

Décomposer les fonctions d'excitation apériodique ci-dessous en une combinaison linéaire de l'échelon unitaire u(t) et de la rampe unitaire r(t).



Rép :

Soit f(t) la fonction d'excitation.

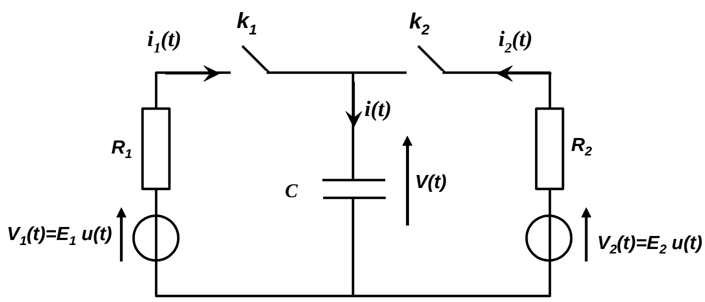
1° $f(t) = \frac{15}{2}r(t) - \frac{15}{2}r(t-2) - 18\,u(t-3) + 3\,u(t-6)$ 1pt

2° $f(t) = \frac{35}{2}r(t) - \frac{35}{2}r(t-0{,}2) - 6\,u(t-0{,}2) + 6\,u(t-0{,}4) - \frac{35}{3}r(t-0{,}4) + \frac{35}{3}r(t-0{,}7)$ 2pt

3° $f(t) = 8\,r(t) - 16\,r(t-1) + 8\,r(t-3) + 8\,r(t-4) - 8\,r(t-5)$ 1pt

Exercice 2 (9,5 points)

On se propose d'étudier un circuit RC avec deux sources de tension échelon. Etant donné le circuit de la figure ci-contre, à l'instant ***t=0***, le condensateur C n'est pas chargé, l'interrupteur k_2 étant ouvert, on ferme l'interrupteur k_1.



1)- Etablir l'équation différentielle donnant la tension *V(t)* au borne du condensateur sous forme littérale.

Rép :

Lois des mailles : $v_1(t) - R_1 i_1 - v(t) = 0$ 0,5pt $\quad d'autrepart :\ i_1 = C\frac{dv}{dt}$ 0,5pt

$v_1(t) - R_1 C\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = 0$ càd $\boxed{R_1 C\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = v_1(t)}$ 1pt

2)- Résoudre cette équation et donner l'expression de $V(t)$ et $i(t)$.

rép :

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{R_1C}\,v(t)=\frac{v_1(t)}{R_1C}$$

$$\text{à } t=0+\quad v_1(t)=E\qquad et\ v(0+)=0\qquad d'ou\qquad \boxed{v(t)=-E_1e^{-\frac{t}{R_1C}}+E1=E_1\left(1-e^{-\frac{t}{R_1C}}\right)}\quad 1pt$$

on en déduit : $\boxed{i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}=\frac{E_1}{R_1}\,e^{-\frac{t}{R_1C}}}$ 0,5pt

L'interrupteur k_1 étant maintenu fermé, on décide longtemps après, de fermer l'interrupteur k_2 à un instant qui de nouveau sera pris comme **origine des temps *t=0***. Par rapport à cette nouvelle origine des temps déterminer :

3a)- les comportements asymptotiques suivants :

- $i_1(0^-)$, $i(0^-)$, $i_2(0^-)$ et $V(0^-)$ à l'instant $t=0^-$.
- $i_1(0^+)$, $i(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $V(0+)$ à l'instant $t=0^+$.

Rép : $t=0^-$ *correspond à* $t\to+\infty$ *pour les solutions de la question* 2)

$i_1(0^-)=0$,	$i(0^-)=0$,	$i_2(0^-)=0$	et	$v(0^-)=E$

1pt

dans la maille II :

$$v_2(t)+R_2i_2-v(t)=0$$

$$\text{à } t=0^+\ \ l'équation\ \ devient:\qquad E_2-R_2\ i_2(t=0^+)-E_1=0$$

$i_1(0^+)=0$,	$i(0^+)=0$,	$i_2(0^+)=\frac{E_1-E_2}{R_2}$	et	$v(0+)=E_1$

1,5pt

3b)- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $V(t)$. En déduire $V(t)$ et l'expression de la constante de temps τ.

$$maille\ (1):\quad v_1(t)-R_1i_1-v(t)=0\qquad maille(2):v_2(t)-R_2i_2-v(t)=0\quad et\quad i=i_1+i_2$$

$$maille\ (1):\quad i_1=\frac{v_1(t)-v(t)}{R_1}\qquad maille(2):i_2=\frac{v_2(t)-v(t)}{R_2}$$

$$i=\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_2}{R_2}-v(t)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=C\,\frac{dv(t)}{dt}\qquad\Leftrightarrow\quad\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v(t)=\frac{1}{C}\left(\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_2}{R_2}\right)\quad avec\quad R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$\boxed{Solution:\qquad v(t)=E_1e^{-\frac{t}{\tau}}+R\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\qquad avec\ \ \tau=RC=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}}\quad 1,5pts$$

3c)- Donner les expressions de $i_1(t)$, $i(t)$ et $i_2(t)$.

$$rép:\qquad i(t)=-\frac{E_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}+\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=-E_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+\left(\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

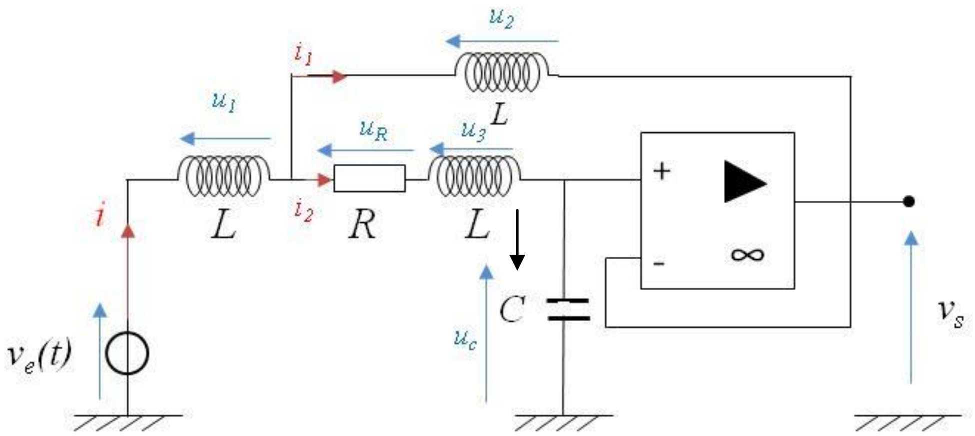
$$\boxed{i(t) = \left(\frac{E_2 - E_1}{R_2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}}$$ 1pt

$$\boxed{i_1(t) = \frac{1}{R_1}\left[E_1 - R\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)\right]\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$ 0,5pt

$$\boxed{i_2(t) = \frac{1}{R_2}\left[E_2 - E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} - R\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)\right]\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$ 0,5pt

Exercice 3 **(6,5 points)**

On considère le montage représenté ci-dessous. L'amplificateur est supposé parfait. Le condensateur C étant initialement déchargé, on applique à l'entrée du montage la tension échelon $V_e(t) = E\,u(t)$. Les inductances sont supposées pures (résistance interne nulle).



1° Déterminer l'équation différentielle qui régit la tension de sortie $v_s(t)$.

$$\begin{cases} v_e - u_1 - u_R - u_3 - u_c = 0 & \text{0,5pt} \\ i = i_1 + i_2 \quad (i^- = i^+ = 0) & \text{0,5pt} \\ u_c = u_s \qquad (v^- = v^+) & \text{0,5pt} \\ v_e - u_1 - u_2 - v_s = 0 & \text{0,5pt} \\ i_2 = c\dfrac{du_c}{dt} = c\dfrac{dv_s}{dt} & \text{0,5pt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_e - L\dfrac{di}{dt} - Ri_2 - L\dfrac{di_2}{dt} - v_s = 0 \\ v_e - L\dfrac{d(i_1+i_2)}{dt} - RC\dfrac{dv_s}{dt} - LC\dfrac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = 0 \\ v_e - L\dfrac{di_1}{dt} - L\dfrac{di_2}{dt} - RC\dfrac{dv_s}{dt} - LC\dfrac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = 0 \\ v_e - L\dfrac{di_1}{dt} - RC\dfrac{dv_s}{dt} - 2LC\dfrac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = 0 \\ v_e - RC\dfrac{dv_s}{dt} - 2LC\dfrac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = L\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

D'autre part :

$$\begin{cases} v_e - u_1 - u_2 - v_s = v_e - L\dfrac{di}{dt} - L\dfrac{di_1}{dt} - v_s = 0 \\ v_e - L\dfrac{d(i_1+i_2)}{dt} - L\dfrac{di_1}{dt} - v_s = 0 \\ v_e - 2L\dfrac{di_1}{dt} - L\dfrac{di_2}{dt} - v_s = 0 \\ v_e - 2L\dfrac{di_1}{dt} - LC\dfrac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = 0 \\ v_e - LC\dfrac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = 2L\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

D'où : $v_e - LC\frac{d^2v_s}{dt^2} - v_s = 2\,v_e - 2RC\frac{dv_s}{dt} - 4LC\frac{d^2v_s}{dt^2} - 2v_s$

$$3LC\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$

$$3\frac{L}{R}RC\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{3\tau_2\tau_1\frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\tau_1\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e}$$ 2,5 pts

2° Examiner en fonction des valeurs des constantes de temps $\tau_1=RC$ et $\tau_2=L/R$ les trois cas suivants: $\tau_1 < 3\tau_2$; $\tau_1 = 3\tau_2$ et $\tau_1 > 3\tau_2$ et **donner sans calculs** la forme de la solution $V_S(t)$ de l'équation différentielle.

$$\Delta = \boldsymbol{\tau_1^2 - 3\tau_1\tau_2}$$

a) $\Delta < 0$: $\tau_1 < 3\,\tau_2$ $\quad v_s(t) = A\,e^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $r_1 = \frac{-\tau_1 + i\sqrt{-\Delta}}{3\tau_1\tau_2}$ et $r_2 = \frac{-\tau_1 - i\sqrt{-\Delta}}{3\tau_1\tau_2}$ 0,5pt

b) $\Delta = 0$: $\tau_1 = 3\,\tau_2$ $\quad v_s(t) = (A + B\,t)\,e^{r\,t}$ avec $r = -\frac{1}{3\tau_2}$ 0,5pt

c) $\Delta > 0$: $\tau_1 > 3\,\tau_2$ $\quad v_s(t) = A\,e^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $r_1 = \frac{-\tau_1 + \sqrt{\Delta}}{3\tau_1\tau_2}$ et $r_2 = \frac{-\tau_1 - \sqrt{\Delta}}{3\tau_1\tau_2}$ 0,5pt