Mouvement d'une goutte d'eau

1) La goutte est soumise à son poids $m_0\vec{g}$ et à la force résistante $\vec{f} = -a m_0 \vec{v}$

a)

$$\vec{P} + \vec{f} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0\vec{g} - a m_0 \vec{v}.$$

d'où $\rightarrow$ $\dfrac{dv}{dt} = -av + g$ (projection sur axe Oz descendant)

La vitesse limite de la goutte est atteinte lorsque

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad V_l = \frac{g}{a}$$

le mouvement devient alors rectiligne uniforme

A.N $\quad V_l = 0.25\ m/s$

b)

$$\frac{dv}{dt} + av = +g$$

solution sans second membre

$$\frac{dv}{dt} = -av \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -a\,dt$$

$$d(\ln v) = -a\,dt$$

$$\ln v = -at + c$$

$$\rightarrow \quad v_1 = e^{-at+c} = K e^{-at} \qquad (K = e^c)$$

solution particulière

$$\rightarrow \quad v_2 = \frac{g}{a} = V_l$$

d'où $\quad v = v_1 + v_2 = V_l + K e^{-at}$

à $t = 0 \qquad v(t=0) = 0 = V_l + K$

donc $\quad K = -V_l$

$$\rightarrow \quad v(t) = V_l\left(1 - e^{-at}\right)$$

c) La vitesse limite est atteinte avec une précision de 1‰ lorsque $\dfrac{V_l - v(T)}{V_l} = \dfrac{1}{1000} \rightarrow v(T) = \dfrac{999}{1000} V_l$

$$\frac{V_l - V_l\left(1 - e^{-aT}\right)}{V_l} = 10^{-3}$$

$$1 - \left(1 - e^{-aT}\right) = 10^{-3}$$

$$e^{-aT} = 10^{-3} = e^{-3\ln 10}$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{3}{a} \ln 10$$

A.N $\qquad T = 0.17\,s$

2) rayon de la goutte $r = r_0(1+kt)$

a)

Si l'on désigne par ρ la masse volumique de l'eau $\rightarrow$ $\rho = \dfrac{m}{v} = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

$$\rightarrow \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \rho \cdot r_0 k = r_0 k \rho S$$

$\dfrac{dm}{dt}$: taux d'accroissement de masse proportionnel à la surface de la goutte

b)

$$m\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$ (projection sur la trajectoire descendante)

or $\dfrac{dm}{dt} = r_0 k \rho S = r_0 k \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} 4\pi r^2 = \dfrac{3 r_0 k m}{r}$

$$\rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + 3k\frac{r_0}{r}v = g$$

c) $$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = r_0 k \frac{dv}{dr}$$

donc $$r_0 k \frac{dv}{dr} + \frac{3 k r_0 v}{r} = g$$

$$\longrightarrow \frac{dv}{dr} + 3\frac{v}{r} = \frac{g}{k r_0}$$

solution sans second membre

$$\frac{dv}{dr} = -3\frac{v}{r}$$

$$\frac{dv}{v} = -3\frac{dr}{r}$$

$$d(\ln v) = -3\, d(\ln r)$$

$$\ln v = -3 \ln r + c = \ln r^{-3} + c$$

$$\longrightarrow v = \frac{K}{r^3}$$

méthode de variation des constantes

$$\frac{d(K r^{-3})}{dr} + 3\frac{K r^{-3}}{r} = \frac{g}{k r_0}$$

$$\cancel{-3K r^{-4}} + r^{-3}\frac{dK}{dr} + \cancel{3K r^{-4}} = \frac{g}{k r_0}$$

$$\frac{dK}{dr} = \frac{g r^3}{r_0 f}$$

$$K = \int \frac{g r^3}{r_0 f} dr = \frac{g r^4}{4 r_0 f} + c$$

d'où $\longrightarrow$ $$v = \frac{c}{r^3} + \frac{g r}{4 f r_0}$$

à l'instant $T = 0$ on a $v = V_\ell$ et $r = r_0$

$$v(r_0) = \frac{c}{r_0^3} + \frac{g}{4f} = V_\ell = \frac{g}{a}$$

$$\frac{c}{r_0^3} = V_\ell - \frac{g}{4f}$$

$$c = V_\ell r_0^3 - \frac{g r_0^3}{4f}$$

donc $$v(t) = \frac{V_\ell r_0^3}{r^3} + \frac{g}{4f}\left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0^3}{r^3}\right)$$

$$\longrightarrow \quad v(t) = \frac{g}{4f}\frac{r}{r_0} + \left(V_\ell - \frac{g}{4f}\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^3$$

en fonction de r et (V_ℓ, f, r_0, g)

En tenant compte de $r = r_0(1 + kt)$

$$\rightarrow v(t) = \frac{g(1+kt)}{4k} + \left(V_\ell - \frac{g}{4k}\right)\left(\frac{1}{1+kt}\right)^3$$

1)

l'accélération s'écrit :

$$\rightarrow \gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{g}{4} - 3k\left(V_\ell - \frac{g}{4k}\right)(1+kt)^{-4}$$

Lorsque le temps augmente indéfiniment, l'accélération atteint une valeur limite γ_ℓ :

$$\rightarrow \gamma_\ell = \frac{g}{4}$$