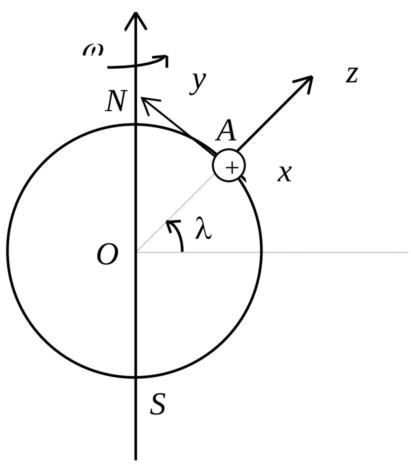
4 – Changement de référentiel

Exercice 16 : Déviation vers l'est

On étudie le mouvement d'une particule de masse *m* qui tombe librement à partir du point *A* (de latitude λ) situé à une hauteur *h* au-dessus du sol. On choisira le référentiel *Axyz* (*Ax* tangent au parallèle dirigé vers l'Est ; *Ay* tangent au méridien dirigé vers le nord ; *Az* verticale dirigée vers le haut) pour repérer la position de la particule (voir figure ci-dessous). On désigne par ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre. On rappelle que le poids est la résultante de l'attraction terrestre et de la force d'inertie d'entraînement.



1) Montrer que dans le référentiel non galiléen *Axyz*, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $\vec{g} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\gamma}$

Rép : Par définition l'accélération dans un repère absolu s'écrit : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$

Le PFD dans ce même repère a pour expression :
$\sum \vec{f}_{appliquées} = m \cdot \overrightarrow{a_a}$ soit $\vec{F} = \sum \vec{f}_{appliquées}$ d'où $\vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_a}$

Dans le repère relatif Axyz l'accélération s'écrit : $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_a} - \overrightarrow{a_e} - \overrightarrow{a_c}$

On multiplie par m: $m \cdot \overrightarrow{a_r} = m\,\overrightarrow{a_a} - m\,\overrightarrow{a_e} - m\,\overrightarrow{a_c} \Rightarrow m \cdot \overrightarrow{a_r} = \vec{F} - m\,\overrightarrow{a_e} - m\,\overrightarrow{a_c}$

$$\boxed{m \cdot \overrightarrow{a_r} = \vec{F} - m\,\overrightarrow{a_e} - m\,\overrightarrow{a_c} \qquad (1)}$$

Or dans le repère Axyz appelé également le repère de laboratoire l'objet étant en chute libre, il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ qui compte tenu de l'entrainement du repère Axyz s'écrit comme : $\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F} - m\overrightarrow{a_e}$ ($m\overrightarrow{a_e}$ force d'inertie d'entrainement)
La relation (1) s'écrit alors : $\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - \overrightarrow{a_c}$ d'où $\boxed{\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$

2) Donner les équations obtenues en projetant la relation précédente sur les trois axes.

Rép : Expression des vecteurs dans le repère Axyz :

$$\vec{a_r}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}; \qquad \vec{g}\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}; \qquad \vec{\omega}\begin{pmatrix}0\\ \omega\, sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)=\omega\, cos\lambda\\ \omega\, cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)=\ \omega\, sin\lambda\end{pmatrix} \quad et \quad \vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}-2\left|\begin{matrix}0\\ \omega\, cos\lambda\\ \omega\, sin\lambda\end{matrix}\ \wedge\ \begin{matrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{matrix}\right| = \begin{pmatrix}-2(\omega\cos\lambda\,\dot{z}-\omega\sin\lambda\,\dot{y})\\ -2\omega\sin\lambda\,\dot{x}\\ -g+2\omega\, cos\lambda\,\dot{x}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases}\ddot{x}=-2\omega\cos\lambda\,\dot{z}+2\,\omega\sin\lambda\,\dot{y}\\ \ddot{y}=-2\omega\sin\lambda\,\dot{x}\\ \ddot{z}=-g+2\omega\, cos\lambda\,\dot{x}\end{cases}}$$

3) Intégrer les deux relations projetées sur y et z sachant qu'à $t=0$ la masse m est immobile au point de coordonnées $(0{,}0,h)$.

Rép :

$$\begin{cases}\ddot{y}=-2\omega\sin\lambda\,\dot{x}\\ \ddot{z}=-g+2\omega\, cos\lambda\,\dot{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{y}=-2\omega\sin\lambda\ x+D\\ \dot{z}=-g\ t+2\omega\, cos\lambda\, x+C\end{cases}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases}0=-2\omega\sin\lambda\ 0+D\\ 0=-g\ 0+2\omega\, cos\lambda\ 0+C\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0=D\\ 0=C\end{cases} \qquad \boxed{d'où\ \begin{cases}\dot{y}=-2\omega\sin\lambda\ x\\ \dot{z}=-g\ t+2\omega\, cos\lambda\, x\end{cases}}$$

4) En déduire l'équation différentielle satisfaite par x.

Rép : en remplaçant $\dot{y}\ \ et\ \ \dot{z}$

$$\ddot{x}=-2\omega\cos\lambda\,(-g\ t+2\omega\, cos\lambda\, x)+2\ \omega\sin\lambda\,(-2\omega\sin\lambda\ x)$$

$$\ddot{x}=2\omega\cos\lambda\, g\ t-4\omega^2\cos\lambda^2\, x-4\ \omega^2\sin\lambda^2\, x=\ 2\omega\cos\lambda\, g\ t-4\omega^2 x$$

$$\boxed{\text{D'où }\ \ddot{x}+4\omega^2 x=2\omega\cos\lambda\, g\ t}$$

5) Calculer numériquement ω et en déduire que l'on peut négliger le terme en ω^2 dans l'équation différentielle précédente.

Rép :

Par définition $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24\cdot 3600}=7{,}3\ 10^{-5}\, rad/s$ avec *T=1 tour complet = 24 heures*

ω petit, on peut négliger $\omega^2 x$ dans l'équation différentielle : $\ddot{x}\approx 2\omega\cos\lambda\, g\ t$

6) Montrer que, dans l'hémisphère Nord, la particule est déviée par rapport à la verticale d 'une quantité y vers le Sud et d'une quantité x vers l'Est. Exprimer les déviations x et y en fonction de ω, h, λ et g.

Rép : $\ddot{x}=2\omega\cos\lambda\, g\ t \Rightarrow \dot{x}=\omega\cos\lambda\, g\ t^2+C \qquad à\ t=0\ \ \dot{x}=0\ \Rightarrow\ C=0$

$$\dot{x}=\omega\cos\lambda\, g\ t^2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\ t^3+C \qquad à\ t=0\ \ x=0\ \Rightarrow\ C=0$$

$$\boxed{x=\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, g\ t^3}$$

D'autre part : $\dot{y} = -2\omega \sin\lambda\ x = -2\omega \sin\lambda\ \frac{1}{3}\omega \cos\lambda\, g\ t^3 = -\frac{2}{3}\omega^2 \text{ g} \sin\lambda\ \cos\lambda\ t^3$

en intégrant: $y = -\frac{2}{12}\omega^2 \text{ g} \sin\lambda\ \cos\lambda\ t^4 + C\ \ (C = 0 \text{ à } t = 0)$

d'où $\boxed{y = -\frac{1}{12}\omega^2 \text{ g} \sin 2\lambda\ t^4}$ $(\sin 2\lambda = 2\sin\lambda\ \cos\lambda\ )$

on remarque que dans l'expression de y apparait ω^2, y est donc très petit.

Pour la coordonnée z on obtient à partir de : $\dot{z} = -g\ t + 2\omega\ cos\lambda\ x$

$$\dot{z} = -g\ t + 2\omega\ cos\lambda \cdot \frac{1}{3}\omega \cos\lambda\, g\ t^3 == -g\ t + \frac{2}{3}\ \omega^2 g\ \cos\lambda^2\ t^3 \approx -gt$$

$$(\text{approximation justifiée en considérant } \omega^2\ petit\ )$$

$$par\ intégration : \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + C \quad (\text{à } t = 0\ \ z = H = C)$$

D'où

$$\boxed{z = h - \frac{1}{2}gt^2}$$

Pour comparer les coordonnées du point d'impact sur le sol d'un objet lâché d'une hauteur h dans le repère Axyz on procède de la façon suivante :

a) Supposons que la Terre ne tourne plus, le repère Axyz devient absolu et la chute de l'objet devient verticale les coordonnées du point d'impact seront (0,0,0).
La durée de la chute t_f est calculée pour z=0 (l'objet touche le sol) :

$$0 = h - \frac{1}{2}g{t_f}^2 \ \Rightarrow\ t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

b) Revenant maintenant au repère Axyz en rotation et calculons les coordonnées du point de chute Après le temps t_f:

$$x = \frac{1}{3}\omega \cos\lambda\, g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 \quad y = -\frac{1}{12}\omega^2 \text{ g} \sin 2\lambda \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^4 \quad et \qquad z = 0$$

On voit bien que x et y sont non nuls avec :

$x > 0$ c'est donc une déviation vers l'est (direction de l'axe Ox)
$y < 0$ c'est donc une déviation vers le sud (opposé à la direction de l'axe Oy)

7) Comment sont modifiés les résultats précédents dans l'hémisphère Sud.
Rép : on change l'angle orienté λ en -λ. On obtient exactement les mêmes équations différentielles du mouvement au signe près des fonctions sinus et cosinus respectivement impaire et paire. Le résultat sera donc une déviation toujours vers l'est pour la coordonnée en x et une déviation vers le nord pour y.