D4 – DIFFRACTION PAR DES OUVERTURES CIRCULAIRES

On reprend le montage du problème D3, mais en disposant dans le plan focal de la lentille L_1 une source ponctuelle monochromatique (de longueur d'onde $\lambda = 0{,}55\ \mu$). L_2 est toujours une lentille convergente de 10 dioptries, dont on observera le plan focal avec un oculaire; on se propose d'observer les figures de diffraction d'ouvertures circulaires disposées dans le plan (D).

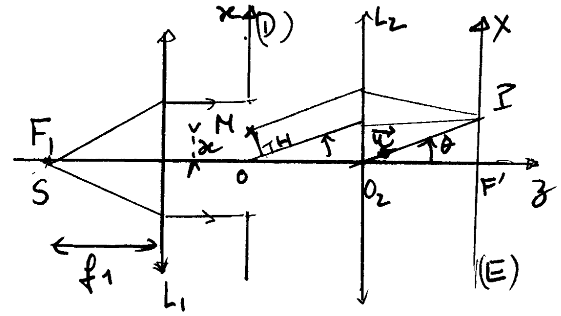
1° (D) est un écran percé d'un trou de diamètre $2R = 0{,}1$ mm centré sur l'axe optique du système.

Déterminer avec précision la position du premier minimum nul; on rappelle que le premier minimum nul de l'intégrale $Q = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \cos mu \, du$ est obtenu pour $m = 3{,}83$. Expliquer brièvement ce qu'on doit observer si le trou source est remplacé par une fente source.

2° Qu'observe-t-on si (D) est un écran percé de deux trous de même diamètre $2R = 0{,}1$ mm dont les centres sont distants de $e = 0{,}5$ mm?

3° Le diaphragme (D) est enfin constitué par un écran percé de N trous identiques aux précédents et répartis au hasard. Aspect de la figure de diffraction.

D4 - Diffraction par des ouvertures circulaires



Le diaphragme = pupille entrée de l'observateur

(D) est circulaire $\phi = 2R = 0{,}1$ mm centré sur axe optique –

S = source ponctuelle ds plan focal de L_1 ; L_2 = lentille convergente de foyer image F' ($\frac{1}{f'} = 10\delta$) ; $\lambda = 0{,}55\,\mu m$; Ecran (E) ds plan focal image de L_2.

$\vec{u}$ = vecteur unitaire de la diffraction en P { il a pour cosinus directeurs $\alpha = \sin\theta$; $\beta = 0$; $\gamma = \cos\theta$; OR symetrie revol. /à Oz on travaillera simplement avec α.

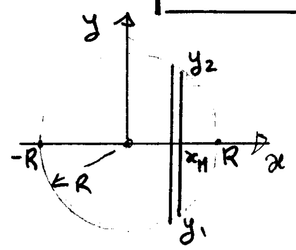
Les vibrations diffractées sont proportionnelles à la surface élémentaire dx dy autour de M.

On peut noter l'amplitude élémentaire $d^2s = \cos(\omega t + \varphi)\,dx\,dy$ [au lieu de $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{OM}}$] ; φ = déphasage $= k\,OH = \frac{2\pi}{\lambda} OH$ (autre forme présentation diffraction)

$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{OM}\cdot\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} x\sin\theta \sim \frac{2\pi}{\lambda} x\theta$

En supposant transmittance $t(x,y) = 1$ sur le trou de (D)

on a $$\Psi(P) = \iint_D \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x\theta}{\lambda}\right) dx\,dy$$ (= autre méthode présentation)



Soit R = rayon du diaphragme

à $x_M = c^te \Rightarrow \varphi = c^te$

Décomposition intégrale double

$$\Psi(P) = \int_{x=-R}^{+R} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x\theta}{\lambda}\right) dy \right\} dx$$

$$\Psi(P) = \int_{x=-R}^{+R} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x\theta}{\lambda}\right)(y_2 - y_1)\,dx$$

$y_2 = (R^2 - x^2)^{1/2}$ et $y_1 = -y_2 \Rightarrow y_2 - y_1 = 2y_2$

D_{4_2}

$$\Psi(P) = S = 2\int_{x=-R}^{+R} (R^2-x^2)^{1/2} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{d} x\theta\right) dx$$

$(\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$

$$S = 2(\cos\omega t)\int_{x=-R}^{+R} (R^2-x^2)^{1/2} \cos\frac{2\pi x\theta}{d}\, dx$$

$$- 2(\sin\omega t)\int_{x=-R}^{+R} \underbrace{(R^2-x^2)^{1/2} \sin\frac{2\pi x\theta}{d}\, dx}_{\text{fonction impaire de } x \;\Rightarrow\; 0}$$

$$\Rightarrow \quad S = 2\cos\omega t \int_{-R}^{+R} (R^2-x^2)^{1/2}\left(\cos\frac{2\pi\theta}{d}x\right) dx$$

ou $\quad S = 4\cos\omega t \int_0^R (R^2-x^2)^{1/2}\left(\cos\frac{2\pi\theta x}{d}\right) dx$

changement variable $u = \frac{x}{R}$ pour se ramener à la forme

$$Q = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, \cos(mu)\, du$$

$\boxed{u = \frac{x}{R}} \Rightarrow du = \frac{1}{R}dx \quad$ et $\quad mu = \frac{2\pi\theta}{d}x \Rightarrow \boxed{m = \frac{2\pi\theta}{d}R}$

$u \in [0,1] \quad ; \quad dx = R\,du$

$$\boxed{S = 4R^2 \cos\omega t \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, \cos mu\, du}$$

or $J_1(m)$ = fonction de Bessel du 1° ordre = fonction tabulée

$$J_1(m) = \frac{2m}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, \cos mu\, du$$

$$\Psi(P) = S = 4R^2 \frac{\pi}{2} \underbrace{(\cos\omega t)}_{\text{Phase temporelle (on l'oublie)}} \frac{J_1(m)}{m}$$

$I = |\Psi(P)|^2 = 4R^4\pi^2 \frac{J_1^2(m)}{m^2} \quad ; \quad m = \frac{2\pi R}{d}\theta = 2\pi R \frac{X}{d f}$

$\theta = 0 \quad m = 0 \Rightarrow X = 0 \quad P$ en $F'_j \quad \frac{J_1(m)}{m} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow I = (\pi R^2)^2 = I_0$

$\boxed{I(P) = I_0 \left(\frac{J_1(m)}{m}\right)^2}$ et $J_1(m) = 0$ pour $m = 3{,}83 ; 7{,}02 ; 10{,}17$

Note : en utilisant la methode des complexes
et se debarassant de ωt si on n'a pas besoin de la phase temporelle

$$\Psi = \int_{x=-R}^{+R} \int_{y_1}^{y_2} e^{-i 2\pi (ux + vy)}\, dx\, dy \qquad u = \frac{X}{\lambda f} = \frac{\theta}{\lambda} \qquad v = \frac{Y}{\lambda f} = \frac{\theta_y}{\lambda f}$$

(On utilise toujours sym. revolution / : Oz
$\Rightarrow$ v donnera même integrale)

$$\Psi = \int_{x=-R}^{+R} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} e^{-i 2\pi (ux)}\, dy \right\} dx$$

$y_1 = -y_2$; $y = (R^2 - x^2)^{1/2}$

$$\Psi = 2 \int_{x=-R}^{+R} (R^2 - x^2)^{1/2} e^{-i 2\pi u x}\, dx$$

On prend partie reelle

$$\mathcal{R}(\Psi) = 2 \int_{x=-R}^{+R} (R^2 - x^2)^{1/2} \cos(2\pi u x)\, dx$$

$$s = \mathcal{R}(\Psi) = 4 \int_{x=0}^{R} (R^2 - x^2)^{1/2} \cos(2\pi u x)\, dx \quad ; \quad u = \frac{\theta}{\lambda}$$

$$\boxed{s = \mathcal{R}(\Psi) = 4 \int_{x=0}^{R} (R^2 - x^2)^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi \theta}{\lambda} x\right) dx} \quad \text{et} \quad I = |s|^2$$

note $\mathcal{I}(\Psi) = 2 \int_{x=-R}^{+R} (R^2 - x^2)^{1/2} \sin(2\pi u x)\, dx$ $\rightarrow$ fonct. impaire de x.

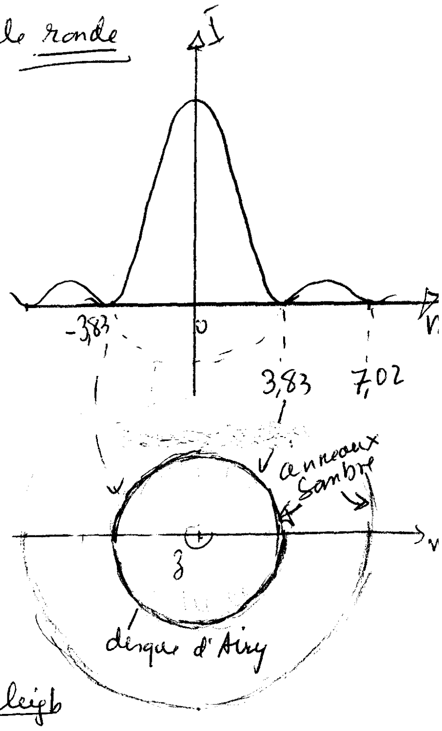
$\mathcal{I}(\Psi) = 0$

Pour $s(P)$
on retrouve forme presentée avant.

Forme de la figure de diffraction

Revolution /: Oz ⇒ tache centrale ronde

On a des anneaux sombres correspondants aux minima de $I(m)$



$m = 2\pi \frac{\theta}{\lambda} R = 3{,}83 \Rightarrow 1^{er}$ anneau

car $\theta \simeq \frac{X}{f}$ et $m = 2\pi R \frac{X}{\lambda f}$

$\theta_{min} = \frac{3{,}83}{\pi} \lambda \frac{1}{2R} = 1{,}22 \frac{\lambda}{2R}$

le 1er anneau sombre a pour rayon

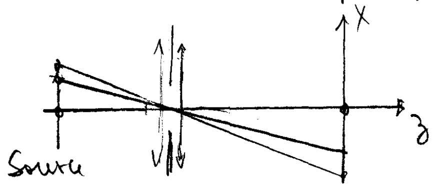
$\boxed{X_{min} = 1{,}22 \frac{\lambda f}{2R}}$ = Rayon du "disque d'Airy"

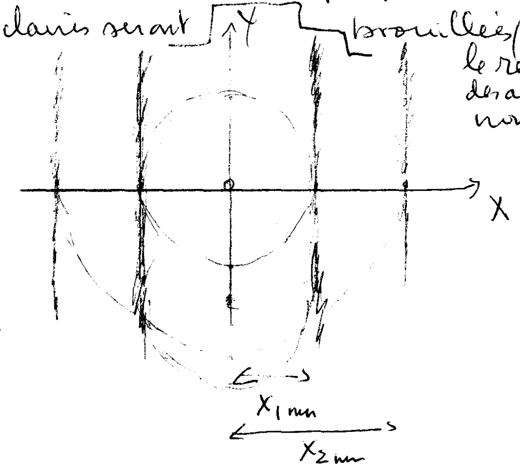
avec R = rayon Diaphragme

correspondra aussi au critère de Rayleigh

A.N./ TD D4 : $f = 10^2$ mm $\lambda = 0{,}55\,\mu m$ $2R = 0{,}1$ mm $\Rightarrow X_{min} = 0{,}67$

- Si le trou source est remplacé par une fente : chaque point de la source donne la même image de disques clairs et sombres centrés sur le pt image secondaire. Le resultat sera des franges claires et noires alternées. Les franges claires seront brouillées (par le reste des anneaux noirs)





les franges noires ⇒ $\pm 1{,}22 \frac{\lambda f}{2R}$ seront marquées.

1^{er} min $m = 3{,}83$ $X_{1min} = 1{,}22 \frac{\lambda f}{2R}$

2^{e} min $m = 7{,}02$ $X_{2min} = 2{,}23 \frac{\lambda f}{2R}$

3^{e} min $m = 10{,}17$ $X_{3min} = 3{,}23 \frac{\lambda f}{2R}$

1^{er} MAX second $X_{2MAX} = 1{,}63 \frac{\lambda f}{2R}$

2) D, le diaphragme est percé de 2 trous
(2R = 0,1 mm et distants de e = 0,5 mm)
Chaque trou donne lieu à 1 diffraction comme en 1) d'une source centrée sur Oz. A cela se superpose interférence de ces trous ex : fentes de Young (cf + loin rappel)

a) Les 2 trous donnent diffraction : anneaux centrés en F'

b) Les interférences associées à écart e donnent des lignes d'interfrange $i = \frac{\lambda f}{e}$ - Dans les fentes de Young ce terme est lié au $\cos^2 \pi u e$ ne dépend que de e pas de la forme du trou de ~~ray~~ diamètre a

$$a = 2R = 0{,}1\,mm \quad e = 0{,}5\,mm \quad f = 0{,}1\,m \quad \lambda = 0{,}55\,\mu m$$

$$i = \frac{0{,}55 \times 10^{-6} \times 10^{-1}}{5 \times 10^{-4}} = 0{,}11 \times 10^{-3} = 0{,}11\,mm$$

3) cas de N trous identiques
Comme + haut chaque trou donne la même figure de diffraction
Donc les anneaux vont être N fois + intenses.
Coté interférence, les N trous sont dispersés de façon aléatoire et donc le terme de phase φ entre 2 trous sera aléatoire, les interfranges aussi ⇒ la partie interférence sera lavée.