

Accélération par mécanisme de Fermi

Contraintes

- loi de puissance $E^{-\nu}$
- sans collision
- indice universel $\nu \sim 2$

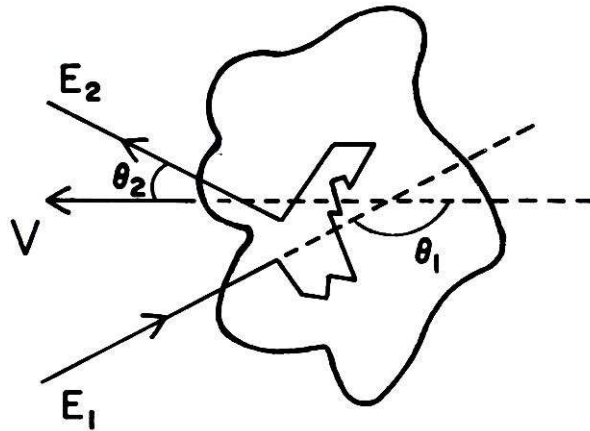
Cycle d'accélération

$$\frac{\Delta E}{E} = \xi \Rightarrow E_n = E_0(1 + \xi)^n \Rightarrow n = \frac{\ln(\frac{E}{E_0})}{\ln(1 + \xi)}$$

Probabilité d'échappement P_{ech} constante:

$$N(\geq E) \propto \sum_{m=n}^{\infty} (1 - P_{ech})^m = \frac{(1 - P_{ech})^n}{P_{ech}} = \frac{e^{n \ln(1 - P_{ech})}}{P_{ech}} = \frac{e^{\ln(\frac{E}{E_0}) \ln(1 - P_{ech}) / \ln(1 + \xi)}}{P_{ech}} \propto E^{-\nu}$$

$$\nu = -\frac{\ln(1 - P_{ech})}{\ln(1 + \xi)} \simeq \frac{P_{ech}}{\xi}$$



nuage magnétisé non-relativiste de vitesse $V=c\beta$, mais particule relativiste $E=pc$:

$$E' = \gamma(E_1 - \beta cp_1 \cos \theta_1) = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1)$$

E' constant dans la diffusion (pas de collision):

$$E_2 = \gamma E' (1 + \beta \cos \theta_2)$$

Gain relatif d' énergie:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \gamma^2 (1 + \beta (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - \beta^2 \cos \theta_2 \cos \theta_1) - 1$$

On moyenne sur θ_2 : $\frac{dn}{d \cos \theta_2} = \frac{1}{2}$ avec $-1 \leq \cos \theta_2 \leq 1$

$$\langle \cos \theta_2 \rangle = 0$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta_1) - 1$$

On moyenne sur θ_1 : $\frac{dn}{d \cos \theta_1} = \frac{1 - \beta \cos \theta_1}{2}$ avec $-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1$

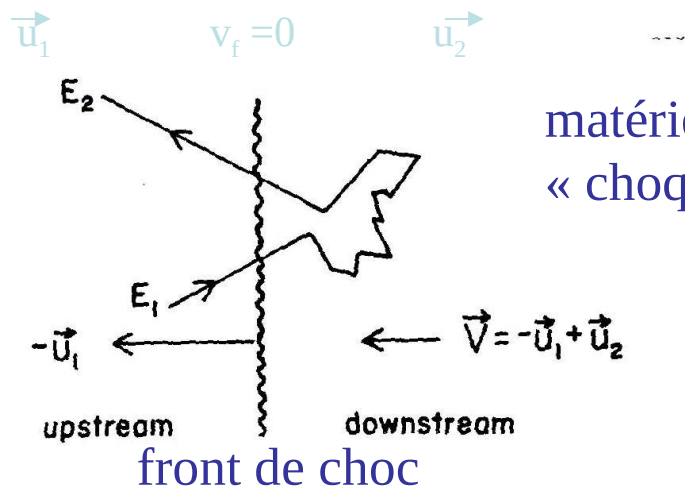
$$\langle \cos \theta_1 \rangle = \frac{-\beta}{3}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \gamma^2 (1 + \frac{\beta^2}{3}) - 1 \simeq (1 + \beta^2) (1 + \frac{\beta^2}{3}) - 1 \simeq \frac{4}{3} \beta^2$$

2 ème ordre en β !

$$\nu = \frac{T_{cycle}}{\xi T_{ech}} \simeq \frac{1}{\frac{4}{3} \beta^2 c \rho_n \sigma_n T_{ech}}$$

milieu interstellaire
au repos



$$E' = \gamma(E_1 - \beta c p_1 \cos \theta_1) = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1) \quad E_2 = \gamma E' (1 + \beta \cos \theta)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \gamma^2 (1 + \beta (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - \beta^2 \cos \theta_2 \cos \theta_1) - 1$$

On moyenne sur θ_2 : $\frac{dn}{d \cos \theta_2} = 2 \cos \theta_2$ avec $0 \leq \cos \theta_2 \leq 1$

$$\langle \cos \theta_2 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \gamma^2 (1 + \beta (\frac{2}{3} - \cos \theta_1) - \frac{2}{3} \beta^2 \cos \theta_1) - 1$$

On moyenne sur θ_1 : $\frac{dn}{d \cos \theta_1} = -2 \cos \theta_1$ avec $-1 \leq \cos \theta_1 \leq 0$

$$\langle \cos \theta_2 \rangle = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \gamma^2 (1 + \frac{4}{3} \beta + \frac{4}{3} \beta^2) - 1 \simeq \frac{4}{3} \beta = \frac{4}{3} (\frac{u_1 - u_2}{c})$$

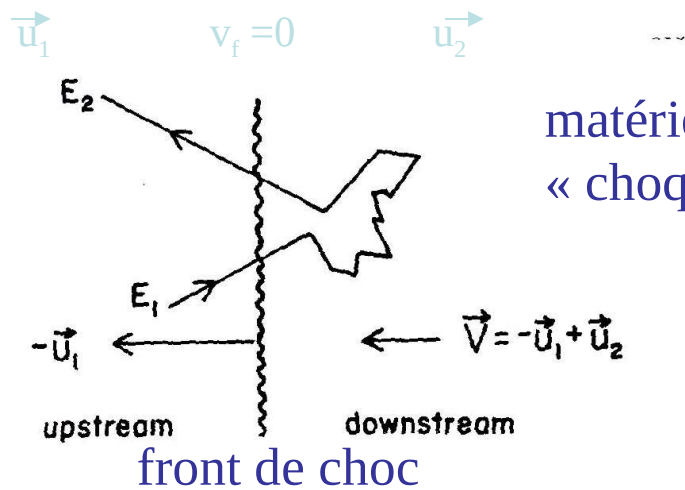
$$\tau_{acc} = \int d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{c\rho}{4\pi} \cos \theta = \frac{c\rho}{4}$$

$$\tau_{ech} = \rho u_2$$

$$P_{ech} = \frac{4\rho u_2}{c\rho} = \frac{4u_2}{c}$$

$$\nu = \frac{P_{ech}}{\xi} = \frac{\frac{4\rho u_2}{c}}{\frac{4}{3} (\frac{u_1 - u_2}{c})} = \frac{3}{u_1/u_2 - 1}$$

milieu interstellaire
au repos



Equations de Rankine-Hugoniot "jump"

Conservation de la masse

$$u_1 \rho_1 = u_2 \rho_2$$

du moment :

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$$

de l' énergie:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma - 1} P_1 + \rho_1 \frac{u_1^2}{2} = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} P_2 + \rho_2 \frac{u_2^2}{2}$$

$$M_1 = \frac{u_1}{a_{s1}}$$

$$a_{s1} = \sqrt{\frac{dP_1}{d\rho_1}} = \sqrt{\frac{\Gamma P_1}{\rho_1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1^2 (\Gamma + 1)}{2 + M_1^2 (\Gamma - 1)} \simeq \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} = 4$$

$\epsilon = \frac{P}{(\Gamma - 1)\rho}$: énergie interne spécifique

et $P\rho^\Gamma = cste$

$h = \epsilon + P/\rho = \frac{\Gamma P}{(\Gamma - 1)\rho}$: enthalpie spécifique

$\Gamma = \frac{5}{3}$ rapport des capacités calorifiques (gaz parfait non-relativiste)

$$\nu = \frac{3}{u_1/u_2 - 1} = 1$$

$$N(\geq E) \propto E^{-1}$$

$$n(E) = \frac{dN}{dE} \propto E^{-2}$$

Intervalle élémentaire ("distance") en métrique pseudo-euclidienne (espace de Minkowski) dans système inertielle ou de Lorentz:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

A position fixe :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

τ : temps propre de la particule.

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 (1 - v^2)$$

$$d\tau = \gamma^{-1} dt$$

Equations du mouvement, les particules suivant des *géodésiques*:

$$\delta \int ds = 0$$

$$ds = (\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2} d\lambda$$

$$\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

Lagrangien:

$$\mathcal{L} = (\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2}$$

$$\delta \int ds = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange.

On peut choisir $\lambda = c\tau/m$, ce qui conduit à $\mathcal{L} = \text{cste}$.

On introduit: $L \equiv \mathcal{L}^2 = \text{cste} = -E^2 + p^2 c^2 = -m^2$, que l'on peut utiliser alternativement pour obtenir les équations du mouvement.

Métrie de Schwarzschild:

symétrie sphérique, corps de masse M au repos (pas de rotation), non chargé

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Singularité pour $r = R_S$, qui définit l'horizon, ou surface du trou noir:

$$R_S \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

Temps propre:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} dt$$

“dilatation du temps gravitationnelle”: $d\tau < dt$

On pose $c=G=1$

$$L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) = -m^2$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = cste \Rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = cste \equiv E$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = cste \Rightarrow r^2 \sin^2\theta \dot{\phi} = cste \equiv l$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{d\lambda} (2r^2 \dot{\theta}) = 2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2$$

On pose comme conditions initiales: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$.

θ reste alors constant car $\ddot{\theta} = 0$.

$$L = -m^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^{-2} l^2$$

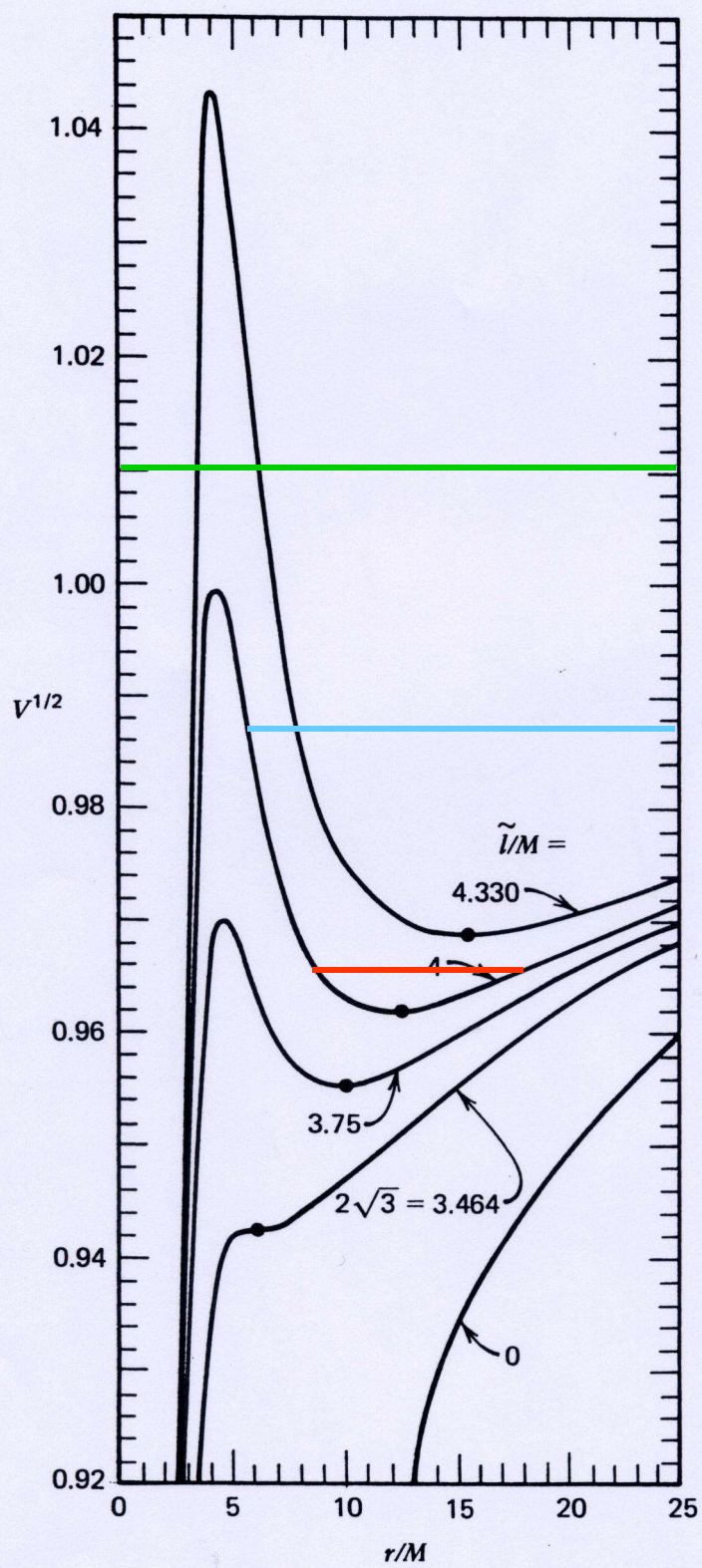
$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(m^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

On définit:

$$\tilde{l} = \frac{l}{m}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{m}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - V(r)$$

$$V(r) = \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$



Trajectoire circulaire stable:

$$\frac{dr}{d\tau} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \geq 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow Mr^2 - \tilde{l}^2 r + 3M\tilde{l}^2 = 0$$

Rayon de l' orbite circulaire stable:

$$r_{sco} = \frac{\tilde{l}^2 + \tilde{l}^2 \sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{\tilde{l}^2}}}{2M}$$

qui existe si:

$$\tilde{l} \geq 2\sqrt{3}M$$

Pour

$$\tilde{l} = 2\sqrt{3}M$$

on a $r_{sco,min}$ ("radius of last stable circular orbit"):

$$r_{sco,min} = 6M$$

On vérifie que:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 r}\right)_{r=r_{sco,min}} = 0$$

et

$$\tilde{E} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

D' où la fraction de l'énergie disponible pour le rayonnement:

$$\epsilon = \frac{m - E}{m} = 1 - \tilde{E} = 0.0572$$

Métrie de Boyer-Lindquist: trou noir de Kerr

symétrie cylindrique, trou noir de masse M , de moment angulaire a , non chargé.

On pose: $G=c=1$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\phi^2$$

avec

$$a \equiv \frac{J}{M}$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$$

Singularité pour $\Delta = 0$, qui définit l'horizon, ou surface du trou noir.

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$a \leq M$$

Si on pose comme conditions initiales: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$, θ reste alors constant car $\ddot{\theta} = 0$. On a: $\Sigma = r^2$

$$L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{4aM}{r}\dot{t}\dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi}^2 = -m^2$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = cste \equiv -2E$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = cste \equiv 2l$$

$$\dot{t} = \frac{(r^3 + a^2r + 2Ma)E - 2aMl}{r\Delta}$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r - 2M)l + 2aME}{r\Delta}$$

$$r^3\dot{r}^2 \equiv R(E, l, r) = E^2(r^3 + a^2r + 2Ma^2) - 4aMEl - (r - 2M)l^2 - m^2r\Delta$$

Trajectoire circulaire stable

$$R = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \leq 0$$

On redéfinit:

$$\tilde{l} = \frac{l}{m}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{m}$$

On trouve (haut:même sens que le BH, bas: sens opposé):

$$\tilde{E} = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}$$

$$\tilde{l} = \pm \frac{\sqrt{Mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}$$

(Bardeen 1973)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial^2 r} \leq 0 \Rightarrow 1 - \tilde{E}^2 \geq \frac{2}{3} \frac{M}{r}$$

$$r_{sco,min} = \frac{2M}{3(1 - \tilde{E}^2)} = M[3 + B \mp \sqrt{(3 - A)(3 + A + 2B)}]$$

avec

$$A = 1 + (1 - x^2)^{1/3}[(1 + x)^{1/3} + (1 - x)^{1/3}]$$

et

$$B = (3x^2 + A^2)^{1/2}$$

$$x = \frac{a}{M}$$

On a:

$$r_{sco,min} = 6M \quad (a/M = 0)$$

$$r_{sco,min} = M \quad (a/M = 1, \text{ sens direct})$$

$$r_{sco,min} = 9M \quad (a/M = 1, \text{ sens retrograde})$$

$$\tilde{E}^2 = 1 - \frac{2}{3} \frac{M}{r_{sco,min}}$$

$$\frac{a}{M} = 0 \Rightarrow \tilde{E} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{a}{M} = 1, \text{ sens direct} \Rightarrow \tilde{E} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{a}{M} = 1, \text{ sens retrograde} \Rightarrow \tilde{E} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

D' où la fraction de l'énergie maximale disponible (a/M=1, sens direct):

$$\epsilon = 1 - \tilde{E} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.423$$