

Éléments de correction exo 3 : Réfraction par un dioptré sphérique

D'après la figure 1

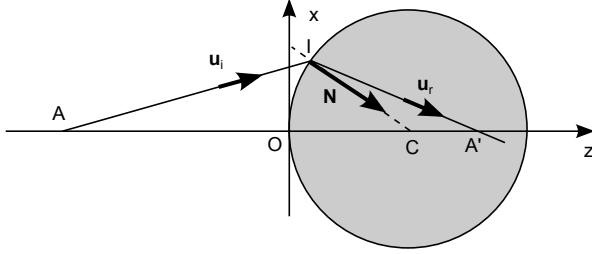


FIGURE 1 – Réfraction d'un rayon passant de l'air dans le verre à travers un dioptré sphérique

- On fixe la position du point source $A : z_A$
- On fixe l'ordonnée x_I du point I sur le dioptré sphérique et on en déduit l'abscisse z_I de ce même point à partir de l'équation en coordonnées cartésiennes du cercle de centre C et de rayon R :

$$x_I^2 + (z_I - z_C)^2 = R^2$$

soit $z_I = z_C - \sqrt{R^2 - x_I^2}$

- On calcule alors le vecteur \mathbf{AI} dont on déduit le vecteur unitaire $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{AI}}{AI}$. On notera les composantes de $\mathbf{u}_i = [\alpha_i, 0, \gamma_i]$.
- On détermine le vecteur normal \mathbf{N} au point I à partir du vecteur \mathbf{IC} en posant $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{IC}}{IC}$. On notera les composantes de $\mathbf{N}_i = [N_x, 0, N_z]$.
- Enfin on exploite les relations de Snell-Descartes dans leur version vectorielle $n_1 (\mathbf{N} \times \mathbf{u}_i) = n_2 (\mathbf{N} \times \mathbf{u}_r)$ qui donnent ici (projection sur Oy) la relation

$$n_1 (\alpha_i N_z - \gamma_i N_x) = n_2 (\alpha_r N_z - \gamma_r N_x)$$

où on a noté par souci d'homogénéité les composantes de $\mathbf{u}_r = [\alpha_r, 0, \gamma_r]$.

En posant $\eta = \frac{n_1(\alpha_i N_z - \gamma_i N_x)}{n_2}$ on obtient

$$\alpha_r = \frac{(\gamma_r N_x + \eta)}{N_z} \quad (1)$$

De plus le vecteur \mathbf{u}_r étant normé on a la relation $\alpha_r^2 + \gamma_r^2 = 1$ ce qui donne une équation sur γ_r

$$\gamma_r^2 + \frac{(\gamma_r N_x + \eta)^2}{N_z^2} = 1$$

soit

$$(N_z^2 + N_x^2) \gamma_r^2 + 2\eta N_x \gamma_r + \eta^2 - N_z^2 = 0$$

Sachant que $N_z^2 + N_x^2 = 1$ on obtient une simple équation du second degré

$$\gamma_r^2 + 2b' \gamma_r - c = 0$$

avec $b' = \eta N_x$ et $c = \eta^2 - N_z^2$ avec comme unique solution positive

$$\gamma_r = -b' + \sqrt{\Delta'} \quad (2)$$

où $\Delta' = b'^2 - c$ est le discriminant réduit de l'équation en γ_r .

Une fois γ_r obtenu on déduit α_r de l'équation (1)

- Disposant du vecteur directeur du rayon réfracté \mathbf{u}_r , on choisit de tracer les rayons jusqu'à un plan Π localisé à l'abscisse z_P . On calcule alors l'ordonnée x_P du point P intersection du rayon réfracté avec le plan Π en posant

$$\mathbf{IP} = t_0 \mathbf{u}_r$$

ce qui donne en projetant sur les axes Ox et Oz

$$\begin{cases} x_P - x_I &= t_0 \alpha_r \\ z_P - z_I &= t_0 \gamma_r \end{cases}$$

De la seconde équation on détermine le scalaire $t_0 = \frac{z_P - z_I}{\gamma_r}$ et on en déduit $x_P = x_I + t_0 \alpha_r$

Listing du programme :

```
# -*- coding: cp1252 -*-
"""
Tracé des rayons issus d'un point source A venant frapper
un dioptré sphérique avec changement d'indice de n1 à n2
On exprimera les longueurs en centimètres
"""
from __future__ import division
from scipy import *
from pylab import *

n1 = 1          # indice du premier milieu
n2 = 1.5        # indice du milieu réfringent
R = 10          # rayon de courbure du dioptré
```

```

z_C = R      # position du centre de courbure
z_A = -30    # position du point source A (négative car dans l'espace objet et
              de norme supérieure à R/(n-1))
z_Ap = n2/((n2 - n1)/R + n1/z_A)    # position du point conjugué calculée dans
              l'approximation de Gauss
print "position de l'objet z_A = ", z_A, "position de l'image 'gaussienne' z_Ap
      = ", z_Ap
R_dia = 9    # rayon du diaphragme
Ne = 31      # nombre de rayons à tracer
z_P = z_Ap*1.1 # position du plan d'observation des rayons

#tracé du dioptre sphérique
x_D = linspace(-R_dia, R_dia, 50)
z_D = z_C - sqrt(R**2-x_D**2)
plot(z_D, x_D, color='k')

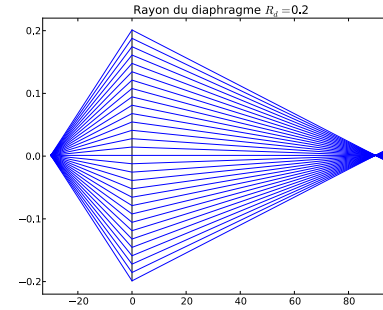
for x_I in linspace(-R_dia, R_dia, Ne):
    z_I = z_C - sqrt(R**2-x_I**2)    #détermination d'un point du dioptre
    #calcul du vecteur normal
    IC = sqrt(x_I**2 + (z_C - z_I)**2)
    Nx = -x_I/IC
    Nz = (z_C - z_I)/IC
    #calcul du vecteur "rayon incident"
    AI = sqrt(x_I**2 + (z_I - z_A)**2)
    alpha_i = x_I/AI
    gamma_i = (z_I - z_A)/AI
    #calcul du vecteur "rayon réfracté"
    eta = (alpha_i*Nz - gamma_i*Nx)*n1/n2
    bp = eta*Nx
    c = eta**2-Nz**2
    deltaP = bp**2 - c
    gamma_r = -bp +sqrt(deltaP)
    alpha_r = (eta + Nx*gamma_r)/Nz
    #calcul de la position du rayon dans un plan z_P
    t0 = (z_P - z_I)/gamma_r
    x_P = x_I + alpha_r*t0
    plot([z_A, z_I, z_P], [0, x_I, x_P], color='b')

axis([z_A*1.1, z_Ap*1.1, -R_dia*1.1, R_dia*1.1])
title(ur"Rayon du diaphragme $R_d = $" +str(R_dia))

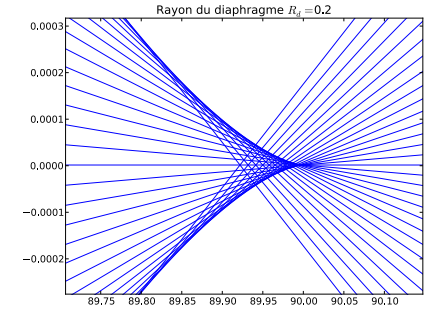
show()

```

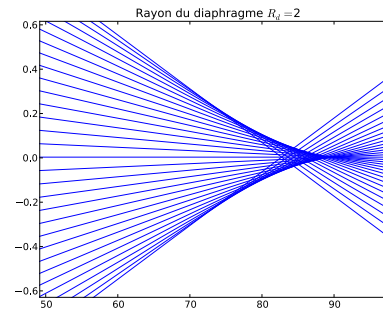
Quelques résultats :



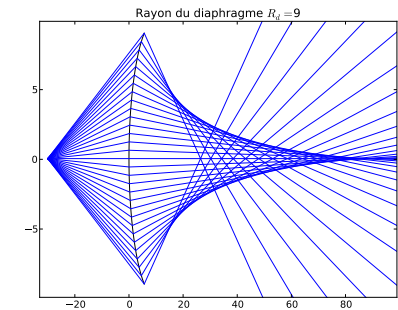
(a) Rayon du diaphragme $R_d = 0.2$ cm vue d'en-semble



(b) Rayon du diaphragme $R_d = 0.2$ cm agrandissement



(a) Rayon du diaphragme $R_d = 2$ cm agrandissement



(b) Rayon du diaphragme $R_d = 9$ cm vue d'en-semble