

## TP modélisation MESP 703 : Électromagnétisme

### Exercice n° 1 Intégration

Dans les exercices suivant nous avons besoin d'intégrer des fonctions. Pour cela on dispose dans `scipy` de la fonction `quad` dont voici la syntaxe

`J, err = quad(f, a, b)`

où `f` est la fonction que l'on désire intégrer, `a` et `b` sont les bornes d'intégration. Le résultat de l'intégration est récupéré dans la variable (ici nommée) `J` et l'erreur dans la variable `err`.

Voici un exemple d'utilisation où on intègre la fonction  $f(x) = x^3$  sur l'intervalle  $[0, 1]$

```
# -*- coding: cp1252 -*-
"""
Modèle d'intégration d'une fonction f(x) dans l'intervalle [a,b]
"""

from __future__ import division
from scipy import *
from scipy.integrate import quad

a = 0 # borne inférieure
b = 1 # borne supérieure
# définition de la fonction
def f(x):
    return x**3

J, err = quad(f, a, b)
print "l'intégrale vaut ", J
print "erreur = ", err
```

On notera l'appel de la fonction `quad` à l'aide de la ligne `from scipy.integrate import quad`.

### Exercice n° 2 Circulation

On considère une charge ponctuelle  $q$  localisée en un point  $O$  pris comme origine. On cherche ici à calculer numériquement la circulation de ce champ électrique entre deux points de l'espace  $A$  et  $B$  placés dans le plan  $xy$  suivant un chemin  $\gamma$  reliant ces deux points.

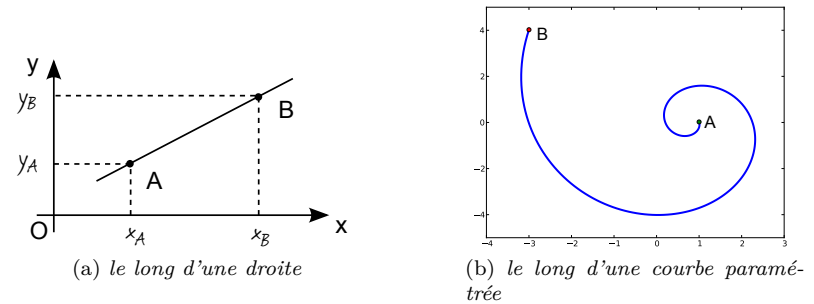


FIGURE 1 – Circulation d'un champ électrique

1. Cas d'un chemin  $\gamma_1$  reliant  $A$  et  $B$  suivant une droite.

(a) Montrer que la circulation de ce champ électrique se ramène à l'intégrale

$$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{K}{r^3} [x + ay] dx$$

où  $K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $r$  est la distance d'un point du chemin à l'origine et  $a$  est la pente de l'équation de la droite passant par  $A$  et  $B$ .

(b) Écrire un programme utilisant la fonction `quad` qui calcule cette circulation entre les deux points  $A$  et  $B$ . Comparer avec l'évaluation de cette circulation utilisant le potentiel électrostatique de la charge  $q$ .

2. On considère à présent le chemin  $\gamma_2$  donné par la courbe paramétrée pour  $t \in [0, t_0]$

$$\begin{cases} x(t) &= x_A + \alpha [e^{\lambda t} \cos(t) - 1] \\ y(t) &= y_A + \beta e^{\lambda t} \sin(t) \end{cases}$$

(a) Déterminer les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la courbe passe bien par le point  $B$

(b) Tracer cette courbe à l'aide de la fonction `plot` pour différentes valeurs de  $t_0$  et de  $\lambda$ .

(c) Exprimer les différentielles  $dx$  et  $dy$  en fonction de  $dt$ , puis écrire la circulation du champ électrique comme une intégrale simple sur la variable  $t$ .

(d) Comme précédemment écrire un programme calculant la circulation du champ électrique le long de la courbe paramétrée  $\gamma_2$  et comparer avec la formule utilisant le potentiel.

### Exercice n° 3 Flux

On sait que le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle placée au centre d'un cube à travers une de ses faces est égal à  $\frac{q}{6\epsilon_0}$  (cf. TD). On veut retrouver ici ce résultat par un calcul numérique direct du flux.

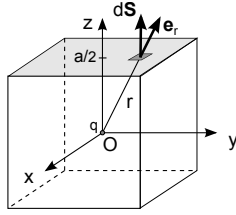


FIGURE 2 – Charge au centre d'un cube

1. Montrer que le flux du champ électrique de la charge  $q$  à travers la face supérieure du cube de côté  $a$  s'écrit en prenant un système de coordonnées comme indiqué sur la figure

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{y=-a/2}^{y=+a/2} \int_{x=-a/2}^{x=+a/2} \frac{\frac{a}{2} dx dy}{\left[x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

On prendra par la suite un système d'unités tel que  $q = 1$  et  $\epsilon_0 = 1$  de manière à ce que le flux recherché vaille  $1/6$ .

2. Effectuer le changement de variable  $X = \frac{x}{a/2}$  et  $Y = \frac{y}{a/2}$  et montrer que le flux s'écrit

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{Y=-1}^{Y=+1} F(Y) dY$$

avec

$$F(Y) = \int_{X=-1}^{X=+1} f(X, Y) dX$$

où

$$f(X, Y) = \frac{1}{[X^2 + Y^2 + 1]^{3/2}}$$

3. Calculer alors le flux en utilisant la fonction `quad` deux fois. On remarquera que dans la première intégrale (sur la variable  $X$ ) la variable  $Y$  apparaît comme un paramètre dans la fonction  $f(X, Y)$  et doit donc être passée en argument dans l'appel de la procédure `quad` suivant la syntaxe : `quad(f, Xmin, Xmax, args=(Y, ))`. Comparer ce résultat avec le résultat théorique.
4. Étendre le calcul du flux pour une charge qui cette fois-ci n'est pas nécessairement localisée à l'origine. Que devient le flux lorsque la charge est placée très près de la surface ? Commenter.

#### Exercice n° 4 Lignes de champ

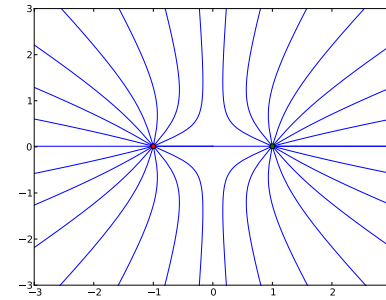
On place deux charges  $A$  et  $B$  de charge respective  $q_A$  et  $q_B$  et on désire tracer quelques lignes de champ issues du voisinage de chaque point.

1. Montrer tout d'abord que les lignes de champ obéissent au système d'équations différentielles

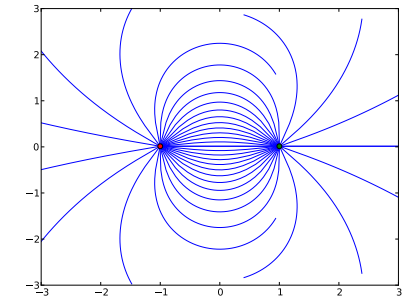
$$\begin{cases} \frac{dx}{du} = E_x(x, y) \\ \frac{dy}{du} = E_y(x, y) \end{cases}$$

où  $E_x$  et  $E_y$  sont les composantes du champ électrique en un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  et  $u$  est une paramétrisation de la courbe.

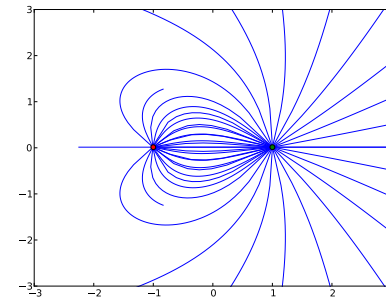
2. Intégrer ce système d'équations à l'aide de la fonction `odeint` de `scipy` en prenant des points initiaux situés au voisinage des points  $A$  et  $B$ . *Indication* : pour éviter les divergences numériques au voisinage de chaque charge on régularisera les champs en « saturant » les champs à une valeur en  $1/r_0$  lorsque  $r < r_0$ .
3. Explorer différentes distribution de charges :  $q_A = q_B$ ,  $q_A = -q_B$ ,  $3q_A = q_B$  (cf. figure 3a, 3b, 3a)
4. Étudier par exemple la cartographie d'une distribution quadrupolaire (figure 3b).



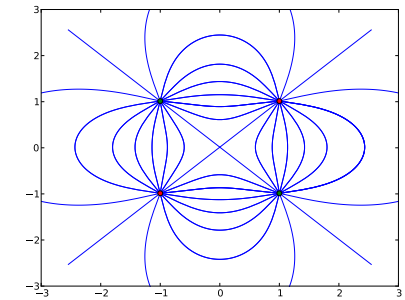
(a)  $q_A = q_B$



(b)  $q_A = -q_B$



(a)  $3q_A = q_B$



(b)  $q_A = q_D = -q_B = -q_C$