COURS M2 APC 2010-2011

Thierry Reposeur (CENBG, reposeur@in2p3.fr)

Le programme

Rappel de relativité
- Pourquoi
- Autrement
- les 4-vecteurs
- le mouvement hyperbolique

Rappel d'électrodynamique
- les équations de Maxwell
- les transformations de Lorentz du champ électro-magnétique

Particules accélérées dans l'Univers
- pourquoi ?
- les processus
- les mécanismes de Fermi

Production de photons dans l'Univers
- hadronique
- Effet Compton
- Rayonnement d'une charge en mouvement

Avertissement: *sans les notes, cette présentation est peu utile. Elle est de plus et sans doute pleine de fautes (orthographe, goût,...)*

RELATIVITE

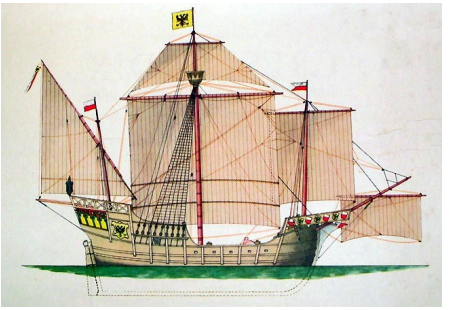
Physique == comment marche le monde
Partager/comparer les résultats avec les autres
→ *concilier des points de vue différents.*

Principe de relativité

« Il existe une infinité continue de repères d'espace-temps (de points de vue) physiquement équivalents »

→ Les valeurs de certaines grandeurs physiques changent
→ Les relations entre grandeurs sont les mêmes (les lois physiques ont la même forme)

Historiquement Galileo Galilei a énoncé le principe en 1632 et posé une transformation entre repères



Quai

Caravelle

lement. Enfermez-vous avec un ami dans la plus grande cabine sous le pont d'un grand navire et prenez avec vous des mouches, des papillons et d'autres petites bêtes qui volent ; munissez-vous aussi d'un grand récipient rempli d'eau avec de petits poissons ; accrochez aussi un petit seau dont l'eau coule goutte à goutte dans un autre vase à petite ouverture placé en dessous. Quand le navire est immobile, observez soigneusement comme les petites bêtes qui volent vont à la même vitesse dans toutes les directions de la cabine, on voit les poissons nager indifféremment de tous les côtés, les gouttes qui tombent entrent toutes dans le vase placé dessous ; si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de jeter plus fort dans une direction que dans une autre lorsque les distances sont égales ; si vous sautez à pieds joints, comme on dit, vous franchirez des espaces égaux dans toutes les directions. Quand vous aurez soigneusement observé cela, bien qu'il ne fasse aucun doute que les choses doivent se passer ainsi quand le navire est immobile, faites aller le navire à la vitesse que vous voulez ; pourvu que le mouvement soit uniforme, sans balancement dans un sens ou l'autre, vous ne remarquerez pas le moindre changement dans tous les effets qu'on vient d'indiquer ; aucun ne vous permettra de vous rendre compte si le navire est en marche ou immobile : en sautant, vous franchirez sur le plancher les mêmes distances qu'auparavant, et ce n'est pas parce que le navire ira très vite que vous ferez de plus grands sauts vers la poupe que vers la proue ; pourtant, pendant le temps où vous êtes en l'air, le plancher au-dessous de vous court dans la direction opposée à votre saut ; si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'aurez pas besoin de plus de force pour qu'il le reçoive, qu'il se trouve du côté de la proue ou de la poupe, et vous à l'opposé ; les gouttelettes tomberont comme auparavant dans le vase du dessous sans tomber du côté de la poupe, et pourtant, pendant que la gouttelette est en l'air, le navire avance de plusieurs palmes ; les poissons dans leur eau ne se fatigueront pas plus pour nager vers l'avant que vers l'arrière de leur récipient, c'est avec la même facilité qu'ils iront vers la nourriture que vous aurez disposée où vous voudrez au bord du récipient ; enfin, les papillons et les mouches continueront à voler indifféremment dans toutes les directions, jamais vous ne les verrez se réfugier vers la paroi du côté de la poupe comme s'ils étaient fatigués de suivre la course rapide du navire dont ils auront été longtemps séparés, puisqu'ils restent en l'air ; brûlez un grain d'encens, il se fera un peu de fumée que vous verrez monter vers le haut et y demeurer, tel un petit nuage, sans qu'elle aille d'un côté plutôt que d'un autre. Si tous ces effets se correspondent, cela vient de ce que

Galileo Galilei, « Dialogue sur les deux grands systèmes du monde », publié en 1632

Expériences vérifiées en 1641 par Pierre Gassendi en rade Marseille

Au passage, invention des « expériences de pensées »

Transformations de Galilée

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' \end{cases}$$

Bien éprouvée tant que v « petit », dv/dt=0

- régates de bateaux,
- contrôle aérien,
- joueurs/arbitre sur un terrain,
- …

Tout est déjà là, sauf les grandes vitesses...

Où comment après 3 siècles, les transformations de Galilée sont malmenées...

- 1870: Maxwell réalise la première unification
Électricité + magnétisme → électromagnétisme

Equations pas invariantes sous une transf. de Galilée PAS BON !

- 1887: Michelson et Morley établissent expérimentalement que la vitesse de la lumière est constante dans les transf. de Galilée, alors que

$x = x'+vt'$ et $t=t' \rightarrow dx/dt = dx'/dt + v = dx'/dt' + v \Rightarrow V = V'+v$, pour un objet de vitesse V' dans la Caravelle à la vitesse v

PAS BON...

- t<1905, Lorentz, cherche et trouve les transformations qui réconcilient équations de Maxwell et relativité, laissent constante la vitesse de la lumière

- 1905: Einstein redécouvre tout ça et SURTOUT, donne un sens physique

La vitesse de la lumière joue un rôle historique, qu'a-t-elle à voir avec le principe de relativité ????

Voyons autrement.

Galilée a raison sur le principe, on va s'en servir

La relativité autrement

Voir J.-M. Levy-Leblond, Am. J. Phys. 44(1976)271

A 2D, l'invariance par rotations spatiales garantit la 4D

$$\begin{cases} x' = f(x, t, \varphi) \\ t' = g(x, t, \varphi) \end{cases}$$

coord d'1 évt

Transformation de coordonnées entre (K), (K)'
φ: paramètre de la transformation

Invariance par translations d'espace et de temps → Homogénéité de l'espace-temps

L'espace s'étend et le temps s'écoule de la même façon partout dans l'Univers

Origines des repères prises pour 1 événement en commun

$$\begin{cases} X = 0 \\ t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} f(0,0,\varphi) = 0 \\ g(0,0,\varphi) = 0 \end{array}$$

Et pour 2 évènements quelconques A et B

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = f(x_B, t_B, \varphi) - f(x_A, t_A, \varphi)$$
$$= f(x_A + \Delta x, t_A + \Delta t, \varphi) - f(x_A, t_A, \varphi)$$

Pour l'évènement commun: $\Delta x' = f(\Delta x, \Delta t, \varphi)$, $\Delta t' = g(\Delta x, \Delta t, \varphi)$

Et donc: $\begin{cases} dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ dt' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial t} dt \end{cases}$

Ne dépendent que de φ pas de x, t.

→ f et g sont linéaires en x, t.

→ $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega c \\ \varepsilon \frac{\omega}{c} & \delta \end{pmatrix}$

Simple jeu d'écriture pratique, justifiée a posteriori.
α, β, ω quelconques
c>0 et ε = ± 1

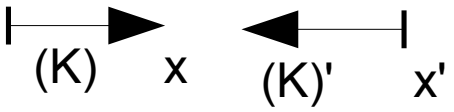
Pour le tic-tac d'une montre dans le repère du poignet
Δt' = tac - tic et Δx'=0, → Δx/Δt = ωc/α

→ Δx/Δt est une vitesse, celle de (K)' par rapport à (K)

V = Δx/Δt est une constante par construction

→ *Ces transformations ne concernent que des repères à vitesse constante les uns par rapport aux autres:* ***inertiels***

Petites manipulations...



$$\begin{cases} x' = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{v^2}{c^2}}}(x-vt) \\ t' = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{v^2}{c^2}}}\left(\dfrac{\varepsilon v}{c^2}x - t\right) \end{cases}$$

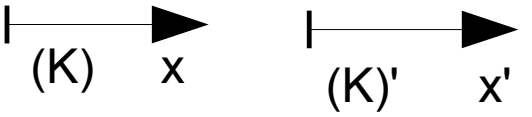
$\eta = \pm 1$

Si c devient grande devant v, $x' \to \eta(x-vt)$ et $t' \to -\eta t$, or une transformation bien vérifiée depuis 3 siècles est celle de Galilée.

Pas d'autre choix que $\eta=-1$

Pour ε c'est plus subtil et plus physique:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon v^2}{c^2}}}$$
$$t' = \frac{t-\frac{\varepsilon v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon v^2}{c^2}}}$$



Si $\varepsilon = -1$ alors $\Delta t' = \dfrac{\Delta t + \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1+v^2/c^2}}$

On peut toujours trouver v telle que $\Delta t\, \Delta t' < 0$

→ Viol du principe de causalité

On reste avec ε=+1 :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

→|v| < c obligatoire et donc la classe d'évènements définie par Δx/cΔt <1 est bien telle que Δt Δt' > 0

Il existe un peu d'ordre dans l'Univers, et on retrouve les transformations de Lorentz

La lumière n'a aucun rôle dans cette histoire.

[c] = vitesse, que sait-on d'elle ?

- Elle est grande devant les vitesses de Galilée,
- C'est une constante, quel que soit le repère,
- On ne peut ni l'atteindre, ni la franchir. L'autre univers défini par ε=-1 est distinct.
- Si la masse du photon est nulle , alors c est la vitesse de la lumière.

Actuellement
M < 1.e-18 eV, pas d'inquiétude...

Ne plus dire «c est la vitesse de la lumière », mais « si m_{photon} = 0, les photons vont à la vitesse c. »

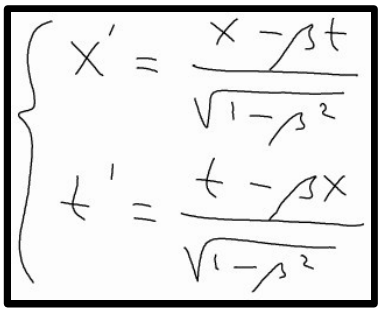
Galilée avait tout pour arriver à ce résultat, mais v ~qlq m/s ne lui permettait pas de mesurer des écarts à ses transformations.

Disparition de c

c est une constante tellement fondamentale qu'on la fait disparaître ! $t_{nouveau} = ct_{ancien}$

→ [t] = distance, par ex. « année-lumière »
→ les vitesses n'ont plus de dimensions
→ pour toute masse non nulle, β=v/c < 1

Système dit « c=1 », les éq. aux dimensions nous permettrons les app. num.



Transformations de Lorentz

Très jolies, symétriques en x,t

Propriétés de la transformation de Lorentz

La distance

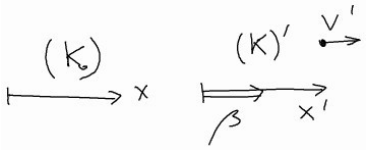
Entre 2 évènements, on a dx et dt que l'on peut relier à dx' et dx' par notre transformation

Très facile de montrer que la « distance carrée » $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2$ est invariante sous les transformations de Lorentz $((dt)^2 - (dx)^2 = (dt')^2 - (dx')^2)$

Attention: $(ds)^2$ peut être négative.

À 3D: $(ds)^2 = (dt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$ où $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ est la distance spatiale (>0)

Composition des vitesses

Pour 

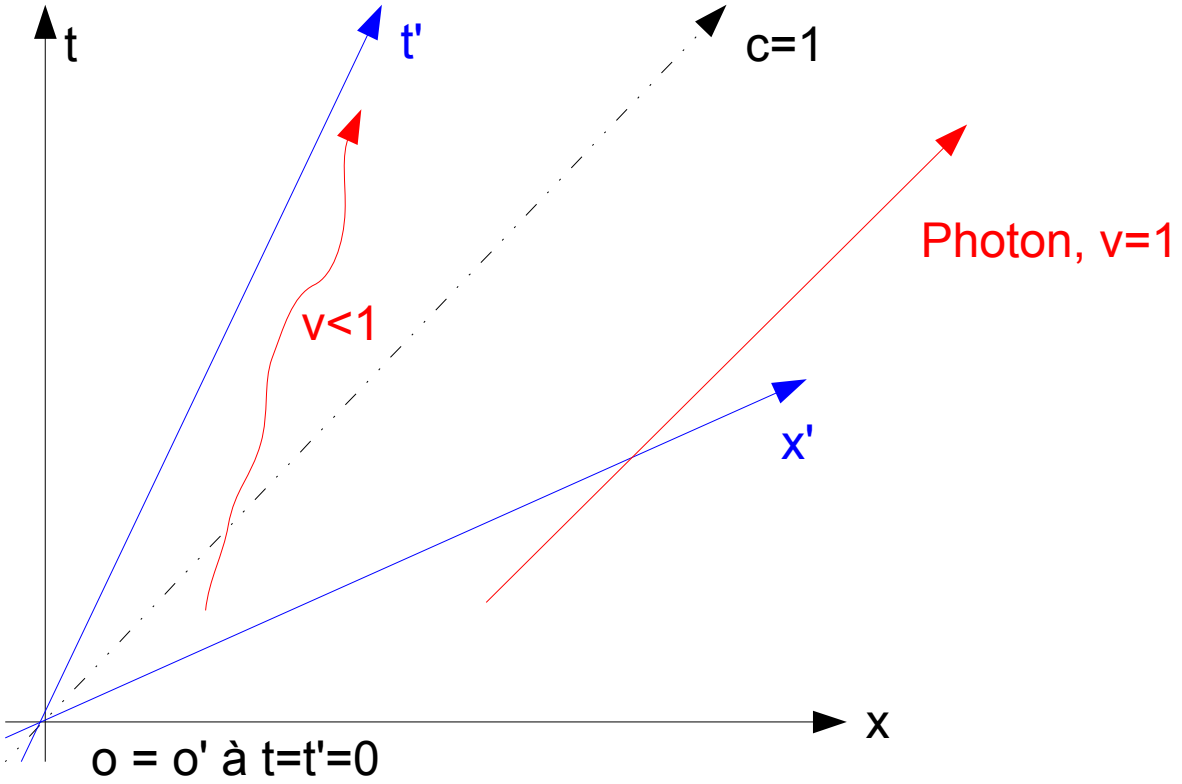
Galilée dit v = v'+β, mais Michelson & Morley disent non, pour la lumière, on mesure c = c + β !!!

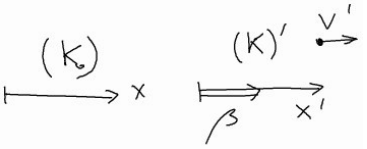
Transf Lorentz: $\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta t') \\ t = \gamma(t' + \beta x') \end{cases}$ soit en calculant le rapport dx/dt = ...

$$V = (V' + \beta) / (1 + V'\beta)$$

On n'additionne pas les vitesses, on les compose, et v' → 1 donne bien v → 1

Par l'image





$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \beta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \dfrac{t - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

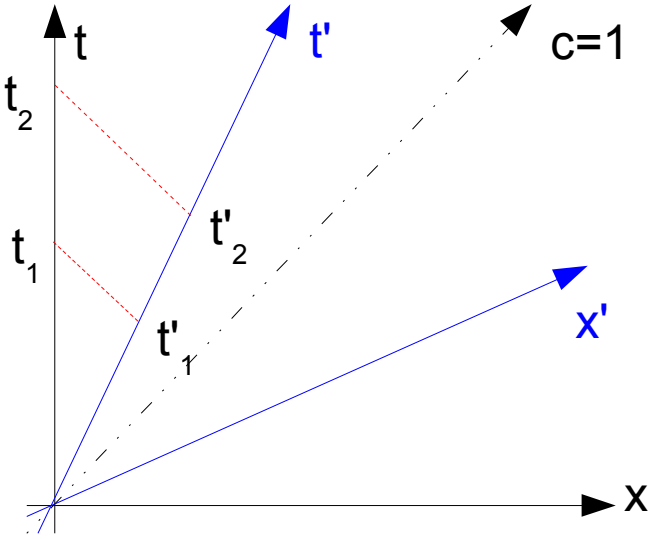
Axes de (K)

Axes de (K)

Lignes d'univers

L'axe t' est la ligne d'univers de o' vue de (K) (vitesse β). L'axe x' s'obtient par symétrie avec la ligne c=1

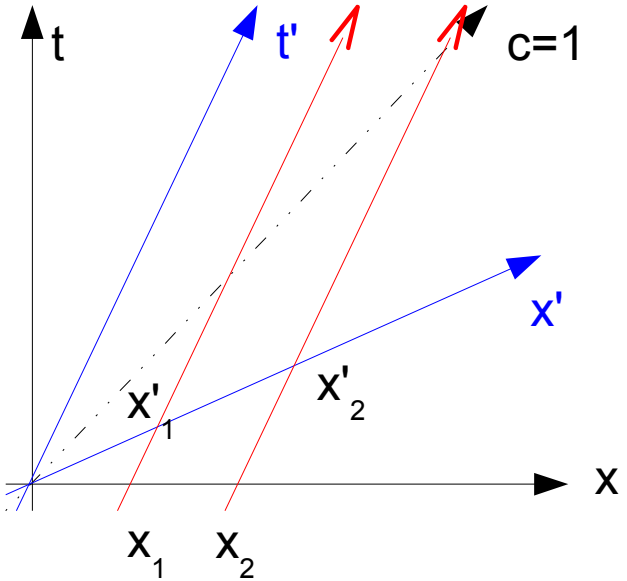
Contractions des longueurs et dilatation des temps



(K)' envoie 2 signaux lumineux séparés de $\Delta t'=t'_2-t'_1$; (K) reçoit $\Delta t>\Delta t'$, mais...

(K) envoie 2 signaux lumineux séparés de $\Delta t=t_2-t_1$; (K)' reçoit $\Delta t'>\Delta t$, !!!!!!!

Les montrent véloces « retardent » par rapport aux montres immobiles



Ligne d'Univers d'une règle de longueur $\Delta x'=x'_2-x'_1$ immobile dans (K)'

$\rightarrow \Delta x=x_2-x_1 < \Delta x'$

Les mètres voyageurs apparaissent plus courts qu'au repos

Référentiels inertiels...?

Gravitation partout...

Labo lâché avec $v_z=0$ à t=0

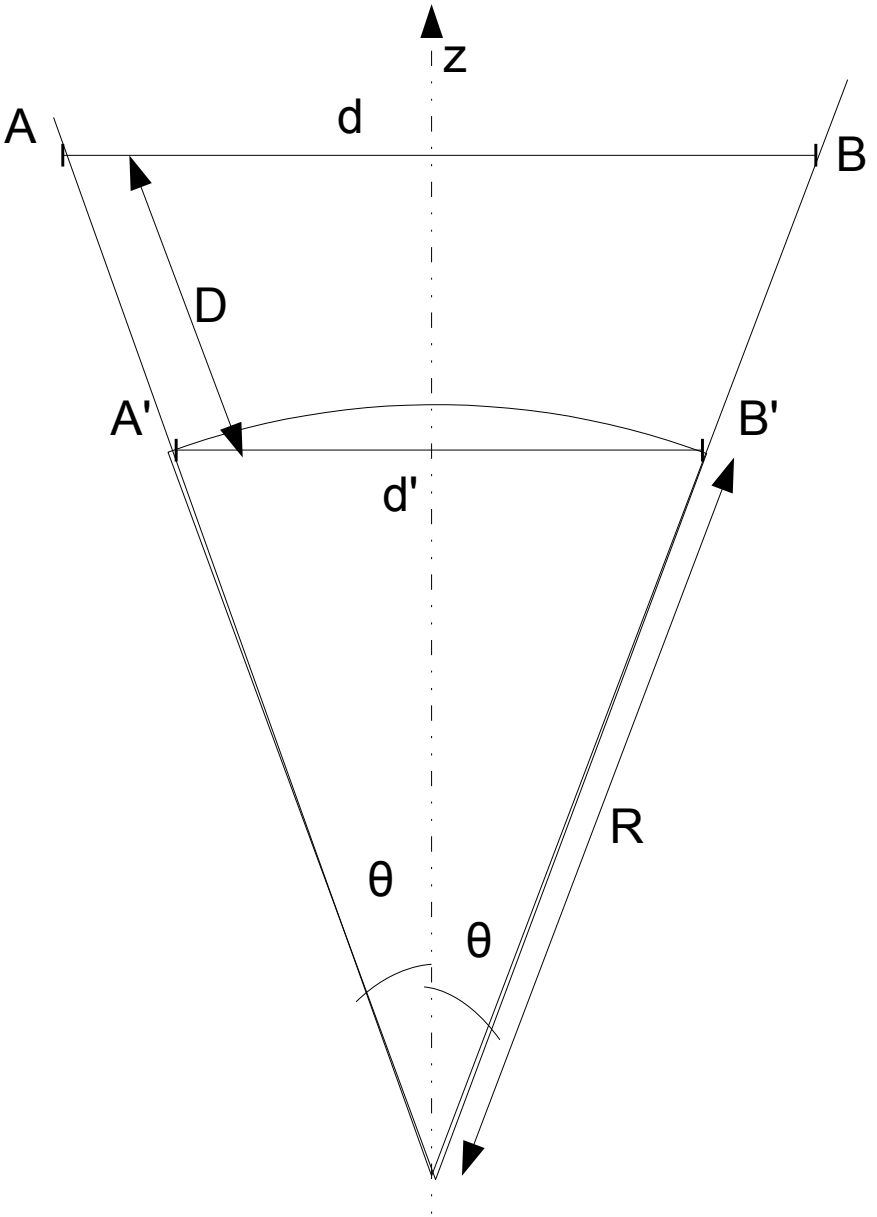
$V_{AB}=0$, mais $V_{A'B'} \neq 0$ pour t>0

Petit calcul: champ terrestre g=9,81 m/s/s
R de la Terre, Δt~7 s, d=25 m
→ d-d' ~ 1 mm
Si Masse solaire, même rayon
→ d-d' ~23 m !!!

Suivant z:
$g(r+\Delta z) - g(r) = (dg/dr)\,\Delta z = (-2GM/R^3)\Delta z$

Δz=25m au voisinage de la Terre, Δt=7 s
→ élongation de 2 mm

Masse solaire dans $R_{terrestre}$: ~600 m !!!!
→ « effets de marée »



Conséquences

- Voisinage de la Terre, tolérance sur les mesures de distance de 2 mm
Un labo de 25 m3 en chute libre est inertiel pendant 7 secondes

- En chute libre, contraction transverse au mouvement, élongation dans le sens de la chute

→ dislocation des objets rigides, par ex. Anneaux de Saturne

Conclusion

La gravitation interdit en principe l'existence de répères inertiels MAIS localement, l'espace-temps est partout plat et Lorentzien. L'échelle de « platitude » est définie par GM/R^2

Aucune manifestation de la gravité ne se fait sentir si on est seul. On doit toujours comparer le mouvement relatif de 2 objets.

Le formalisme quadri-vectoriel

Très pratique pour voyager facilement dans le monde relativiste.

Pour un événement P de coordonnées (t,x,y,z) dans (K) et (t',x',y',z') dans (K)', les transformations telles que:

$$X'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta} X^{\beta}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \beta} \Lambda^{\gamma}_{\ \delta} g_{\alpha\gamma} = g_{\beta\delta}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont dites transfromations de Lorentz

Si (K)' a la vitesse β selon x par rapport à (K):

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques

- « convention d'Einstein » de contraction des indices: $X_{\alpha} = X^{\beta} g_{\alpha\beta}$
- indices: 0 (==« temps »), 1,2,3 == « espace »
- X^{α}=(t,x,y,z) pour l'évènement P

Distance

Entre 2 évènements A et B, on définit $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 = g_{\alpha\beta}(dX)^\alpha(dX)^\beta$

$$(ds')^2 = g_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta}$$
$$= g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}_{\ \mu}\, dx^{\mu}\, \Lambda^{\beta}_{\ \nu}\, dx^{\nu} = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = (ds)^2$$

$(ds)^2$ est invariant sous les transformations de Lorentz.

$(ds)^2 > 0$, dominé par $(dt)^2$, on définit l'intervalle de temps propre $d\tau = \sqrt{(ds)^2}$

Très important: intervalle de temps entre 2 évènements où ils ont lieu au même endroit.

Par ex. $t_{mort} - t_{naissance}$ = durée de vie d'une particule dans son repère, au repos donc.
On a vu par l'image que $\Delta t > \Delta t'$ si l'on bouge, c'est pour ça que l'on voit des muons cosmiques sur Terre (alors que $d\tau \sim$ 2e-6 s)

Vocabulaire

- $(ds)^2 > 0$, intervalle genre temps,
- $(ds)^2 < 0$, intervalle genre espace,
- $(ds)^2 = 0$, intervalle genre lumière.

quadri-vecteurs

Par définition tout quadruplet qui se transforme comme $X^\alpha=(t,x,y,z)$

On définit le produit scalaire $AB = A_\alpha B^\alpha = g_{\alpha\beta}(A)^\alpha(B)^\beta$ qui est invariant relativiste

(Très-très-très important, la base de tout !)

Convention: (composante «temps » = scalaire , composante espace = vecteur)

Le quadri-vecteur position (commode pour se donner rendez-vous)

Dèjà vu: $X^\alpha=(t,x,y,z) = (t,\mathbf{x})$

Le quadri-vecteur impulsion (pratique pour la cinématique)

Par définition: $P^\alpha= m(dX^\alpha/d\tau)$ pour une masse m

$(d\tau)^2= (dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 \rightarrow d\tau= dt\{1 - (d\mathbf{x}/dt)^2\}^{1/2} = dt(1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}$

$\rightarrow P^\alpha = (E,p)=(m\gamma,m\gamma\mathbf{v})$, P^0 = énergie relativiste, P^i = impulsion relativiste, $\gamma=1/(1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}$

$P^2 = m^2$ invariant $\rightarrow$ détruit le concept de masse au repos, la masse est invariante

$p^i = Ev^i$, l'impulsion est indépendante de m

$m^2 = E^2 - p^2 \rightarrow E^2 = p^2 + m^2$ bien connue

Si m est finie, E,p $\rightarrow \infty$ quand v $\rightarrow$ 1, dur-dur...

Mais si m=0 E = p

E et p ne sont finie que si v=1, on utilise plutôt E=hν et p=Ev, et tout va bien

(où l'on retrouve que les photons n'ont la vitesse 1 que si leur masse=0)

Le quadri-vecteur vitesse

m invariant autorise: $P^\alpha = mU^\alpha$, où $U^\alpha = dX^\alpha/d\tau$, vérifie $U^2=1$

$U=(\gamma,\gamma v)$

Le quadri-vecteur accélération

Osons $W = dU/d\tau$, dans le repère propre: W=(0,dv/dt), pas étonnant.

Remarque: $U.W = 0$, invariant

Le mouvement hyperbolique (détaillé dans les notes)

Pour voyager il faut partir et donc accélérer, l'apesanteur est inconfortable

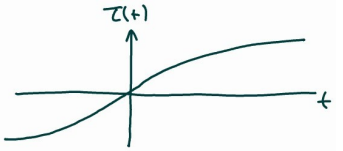
→ Tintin: « objectif Lune »
- voyager avec une accélération égale à celle de la pesanteur,
- à mi-chemin, effectuer un demi-tour sur soi-même et continuer avec la même accel.
- on se place en 2D, supposant qu'il n'y aura ni zig ni zag

Dans le repère de la fusée: U'=(1,0,0,0) et W'=(0,a,0,0), avec WU=W'U'=0 et un peu de calcul on trouve, exprimé dans le repère de la base de lancement:

$$V(t) = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}} \qquad X(t) = \frac{1}{a}\left[\sqrt{1+a^2t^2} - 1\right]$$

Et pour l'évolution du temps propre de Tournesol vu de la Terre

$$\tau(t) = \frac{1}{a}\,\mathrm{arg\,sh}(at) = \frac{1}{a}\ln\left(at + \sqrt{1+a^2t^2}\right)$$



L'accélération donne aux voyageurs l'avantage du temps, par ex.

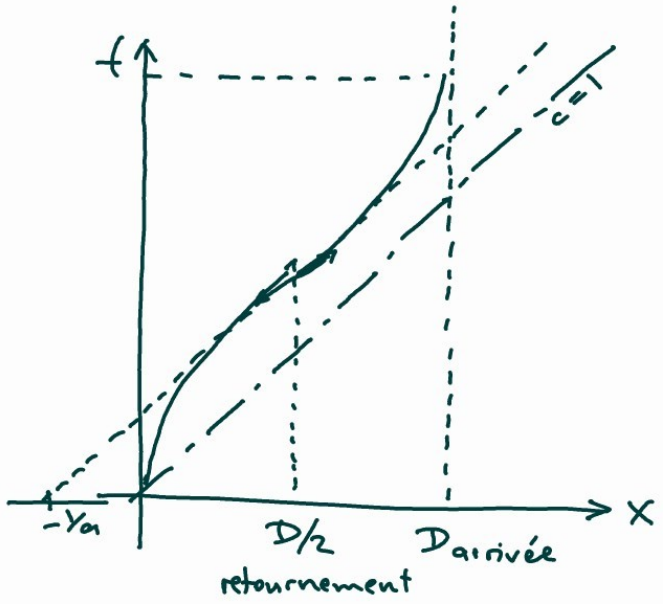
a=g=9,81 ms^{-2} en unités « c=1 » a~1 an^{-1}

t=1 mois → τ~1 mois, pas top, mais v=0,085 lent ! Pas relativiste

t=1 an ~πe7 s → τ~2,76e7 s, gain de 1 mois 16 jours

T=10 ans → τ~9,27e7 s ~2,93 ans ! V=0,995 ultra-relativiste

Par l'image, ligne d'univers de Tournesol vue de la Terre



Calculs sur la 1ere moitié du voyage, car a vue de la Terre change de signe sur la 2eme moitié.

→ Voyage total par symétrie par rapport au point de retournement.

Durée « terrestre »

$aD/2 = (1+ (a\Delta t/2)^2)^{1/2} - 1 \rightarrow \Delta t \sim D(1+2/(aD)+...)$

Voyage au centre galactique D=30000 ans, a~1 an^{-1}

→ Δt~30000 + 2 ans

v = 0,99999999778 et γ= 15007,5 ultra-ultra-relativiste

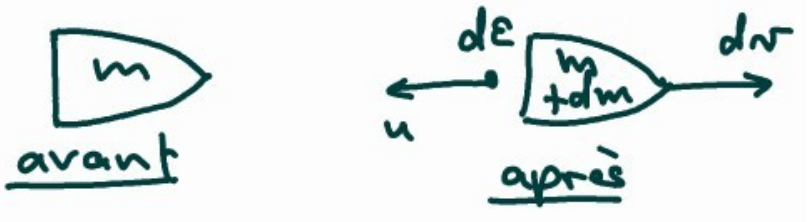
Durée pour Tryphon

$\Delta\tau/2 = 1/a \, Ln(a\Delta t/2 + (1+ (a\Delta t)^2)^{1/2}) \rightarrow \Delta\tau/2 \sim 10,3$ ans

$\Delta\tau$ = 20,6 ans !!!! fin du capitalisme, les armateurs sont morts à l'arrivée

Combien ça coûte ?

Repère de la fusée
- immobile à t'=0
- éjecte dε énergie à la vitesse u à l'instant dt', voit sa vitesse devenir dv



Conservation de P^{α} → u*dm + m*dv = 0

Vu de la Terre
- V correspondant à t'=0
- composition des vitesses: V+dV = (V+dv)/(1+V*dv) après éjection de dε

Au 1er ordre en dv: dV/(1-V*V) = dv = -u*dm/m

Au passage: on définit la rapidité φ=Ln((1+V)/(1-V)), additive sous les transf. de Lorentz

→ dm/m = -(1/u) dφ → $m_{finale}/m_{initiale} = \exp(-2\varphi_{1/2}/u)$

Numérique: toujours a=g~1 an^{-1} et D=30000 ans

→ $m_{finale}/m_{initiale} \sim 10^{-9}$ soit pour m_{finale} = 1 m^3 d'eau, $m_{initiale} = (10^3)^3$ = 1km^3 d'eau

C'est pas demain la veille !!!!!

Sordide: à mi-chemin, Tryphon voit un proton m~1GeV avec une énergie 15 TeV. Problème !

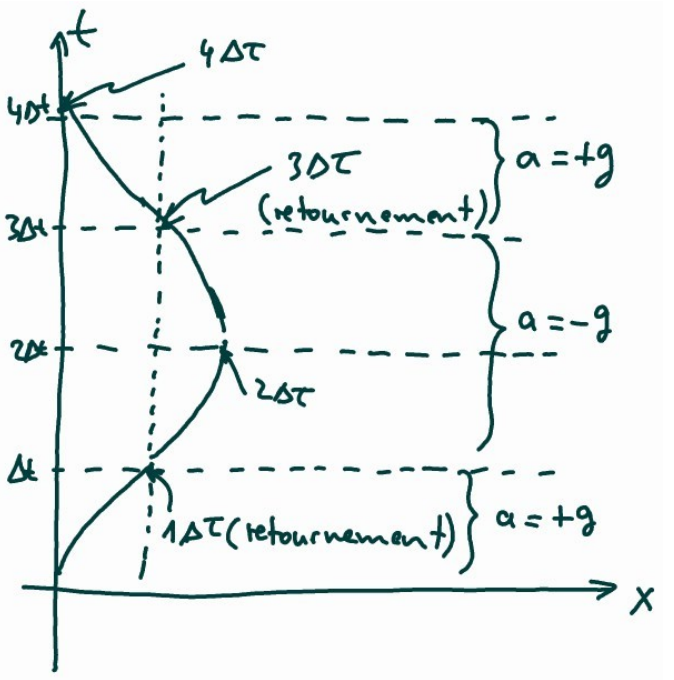
Le paradoxe des jumeaux

2 jumeaux dérivant de conserve...

à t=0, l'*un* s'en va en se donnant a=g pdt $\Delta\tau$

il décide de revenir et retourne sa fusée en maintenant son accel. pdt $2\Delta\tau$

Enfin, il décide de rejoindre l'*autre* et retourne une dernière fois sa fusée pour ralentir. Au bout de $\Delta\tau$ il se sont rejoints



Si l'histoire dure 4Δt=9 mois pour l'*autre*, l'*un* est plus jeune au retour de ~1 jour 14 heures !

Il est vraiment plus jeune, ça n'a rien à voir avec le retard (relatif) des montres entre repères inertiels, qui est un cas parfaitement symétrique.
Le jumeau accéléré n'est PAS INERTIEL, le problème n'est pas symétrique

Tout se passe comme si l'*un* était plongé dans un champ de gravitation, et pas l'*autre*.

Impossible de savoir si l'on est accéléré par un moteur ou une masse (assis sur une chaise, v=0 alors que dv/dt non).
→ prélude à une autre très belle histoire...

Electrodynamique classique: les équations de Maxwell

Avant JC, la physique est Galiléenne, les phénomènes magnétiques et/ou électriques, tout ça est un peu fade.
Après JC, ça s'arrange: James Clerk Maxwell établit la 1ere unification de l'histoire avec la synthèse de l'électricité et du magnétisme

Lorentz trouvera des transformations qui permettent de voyager avec les équations de Maxwell, et au passage de voyager plus vite que les mouches de Galilée...

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Equations de Maxwell (électromagnétisme)

Avec $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

Et la force de Lorentz (dynamique)

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

L'**électrodynamique** est née

On déduit des équations 1 et 4 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ équation de continuité

Subtilité lourde de conséquences:
- ρ charge source du champ
- q charge test, qui subit le champ

Les potentiels électromagnétiques

Séquence émotion: jolis souvenirs de calcul vectoriel, div(rot)==0 et rot(grad)==0, et coetera...

Ré-écriture des équations de Maxwell à l'aide de potentiels, pour préparer

- les invariances de jauge
- les transformations de Lorentz
- l'étude des solutions de ces eq.

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \quad , \quad \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\,\phi \quad , \quad \phi(\vec{r},t)$$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{A}) = \rho/\varepsilon_0$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{-\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$

Et toujours la force de Lorentz pour une théorie de l'électro-dynamique

Invariance de jauge

Les transformations $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' \overset{df}{=} \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\chi$ $\quad \phi \longrightarrow \phi' \overset{df}{=} \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ laissent les champs E et B sont inchangés

→ l'électrodynamique est dite invariante de jauge, permet d'étudier différentes solutions des équations de Maxwell

Pour nous, la jauge de Lorentz, définie par: $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

→ $\begin{cases} \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} \end{cases}$ 2 équations d'onde

Unités

Dans un souci anti-pédagogique mais cohérent avec les transf. de Lorentz, on joue avec les dimensions.

→ système dit « $c = \varepsilon_0 = 1$ »

Qui permet d'avoir
[t] = [x] et [E] = [B]

Et de ré-écrire nos équations:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Très belle symétrie juste gâchée par l'absence de monopôle magnétique...

C'est cet amour (de la symétrie) qui est cause d'obstination (à les chercher).

Électrodynamique et transformations de Lorentz

Bon exercice: montrer que les éq. de Maxwell ne sont pas invariantes sous les transformations de Galilée x'=x-vt et t'=t

Idée: si la charge électrique, comme la masse, est une propriété intrinsèque de nos particules définie dans son repère propre, alors elle devient une caractéristique invariante.

Astuce de Feynman (lire et relire Feynman...)

Quelques charges électriques dans une boite à chaussures

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{\Sigma q_i}{V_0} & \text{dans la boite} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans un repère où la boite a la vitesse β: $V = \sqrt{1-\beta^2}\, V_0$

$$\rho = \begin{cases} \frac{\Sigma q_i}{V} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\jmath} = \rho \vec{\beta} = \rho_0 \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Epatant ! Ressemble à une 4-vitesse !

1- ρ_0 invariant, on court définir une quadri-densité de courant: $j^\alpha = \rho_0 U^\alpha$

→ $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, l'équation de continuité, invariante (produit scalaire)

2- osons: $A^\alpha = (\Phi, A)$, alors $\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = j^\beta$ Hourra ! Les composantes spatiale et temporelle donnent les 2 équations d'onde en jauge de Lorentz.

3- et justement la jauge de Lorentz s'écrit $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, invariante.

On a des 4--vecteurs, des équations invariantes, on va pouvoir travailler dès que l'on aura les champs E, B.

E, B ne peuvent pas être réduits à des 4-vecteurs, il faut faire autrement:

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ par définition donne

Le tenseur du champ électromagnétique

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell
+ Lorentz
+ sa jauge
+ unités ad-hoc

et $\partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu$$
$$\partial_\mu A^\mu = 0$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{m} F^{\alpha\beta} p_\beta$$

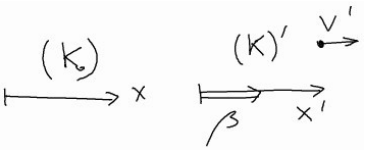
Les transformations ?

A et J c'est trivial, comme X, attention A est un (4-)potentiel, on transforme ses valeurs en tout point X=(t,x), pas les fonctions.

Pour $F_{\mu\nu}$ c'est plus calculatoire...bon sujet d'exam...

$$\begin{cases} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \dfrac{E_y + \beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & B'_y = \dfrac{B_y - \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ E'_z = \dfrac{E_z - \beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & B'_z = \dfrac{B_z + \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

entre 2 repères



Des champs E, B apparaissent dès que l'on se bouge.

À petite vitesse

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{E} \end{cases}$$

Rayonnement d'une charge en mouvement

!! accélération transverse ici !!!

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi}\gamma^4 |\dot{\vec{v}}|^2$$

Est la puissance rayonnée par une charge animée d'une vitesse v.

→ Formule de Larmor si basse vitesse

$$\frac{d\mathcal{P}}{d^2\hat{R}} = \left(\frac{q}{4\pi}\right)^2 \frac{\dot{\vec{v}}^2}{(1-v)^3}$$

Est la distribution angulaire vers l'avant de cette puissance