

# Les processus intervenant dans l'émission gamma

Denis Dumora

20 février 2007

## Première partie

# Interactions particules-matière

## 1 Introduction

Ce cours de Master 2 intitulé "Astroparticules" est en fait plus focalisé sur l'astronomie gamma à haute énergie, domaine d'activité du groupe astroparticules du CENBG. Pourtant depuis le début du cours, il a été question d'objets astrophysiques (AGN, pulsars, SNR), d'extraction d'énergie, d'accélération de particules chargées, de propagation des rayons cosmiques, mais toujours pas à proprement parler de rayonnement gamma.

L'objet de cette partie est donc de décrire les processus qui conduisent à la production de rayonnement gamma de haute énergie. Cette partie va donc s'attacher à répondre à la question : "comment accélérer des photons jusqu'à des énergies largement supérieures au  $TeV$ ". La manière générale consiste à accélérer des particules chargées jusqu'à de telles énergies et d'ensuite produire les gamma. Ce sont ces processus d'émission de photons haute énergie qui vont être décrits ici.

Les processus d'émission de photons haute énergie sont à chercher parmi les processus de perte d'énergie (rayonnement) des particules chargées accélérées. Il va donc falloir s'intéresser aux processus d'interaction des particules de haute énergie avec la matière.

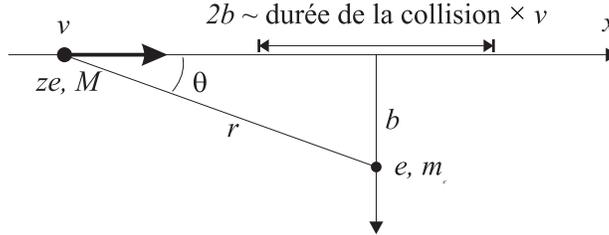
## 2 Pertes par ionisation

Afin de mener une étude des processus d'interaction, il faut d'abord commencer par s'intéresser aux processus dit de *pertes par ionisation*.

### 2.1 Approche classique

Dans le cadre d'une approche non relativiste, le problème se résume à étudier l'interaction d'une particule de haute énergie proton ou noyau avec un électron supposé au repos. Il est très simple de montrer que seule une très petite fraction de l'énergie cinétique de la particule

incidente est transférée à l'électron <sup>1</sup>. Cela permet d'affirmer que la particule incidente n'est pas déviée dans l'interaction, la seule chose qui va se produire est que l'électron cible va subir une petite impulsion à travers une interaction électromagnétique.



Le problème classique peut alors se poser de la façon suivante : “une particule de masse  $M$  de charge  $ze$  supposée non déviée dans l'interaction, appelons  $b$  le paramètre d'impact c'est à dire la distance d'approche la plus faible de l'électron. L'impulsion donnée à l'électron va alors s'écrire :  $\int F dt$ . Par raison de symétrie, on montre très facilement que seule la composante normale de la force agit

$$F_{\perp} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \text{ et } dt = \frac{dx}{v}$$

On a alors  $p = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\perp} dt = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$ , l'énergie cinétique transférée à l'électron s'écrit alors  $\frac{p^2}{2m_e} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e}$ .

On doit alors calculer l'énergie totale perdue par la particule  $-dE$  après un parcours  $dx$  dans la matière (le nombre d'électrons dans le volume est  $N_e 2\pi b db dx$  où  $N_e$  est la densité d'électrons dans le milieu)

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} N_e 2\pi b db \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v^2 m_e} dx = \frac{N_e z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 v^2 m_e} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$$

Pourquoi introduire  $b_{min}$  et  $b_{max}$ , parce que le calcul complet est beaucoup plus difficile et demande un traitement quantique complet. Cette approximation donne cependant de bon résultats car  $b_{min}$  et  $b_{max}$  n'apparaissent que dans le logarithme et donc ne nécessitent pas d'être connus avec précision.

### 2.1.1 Discussion sur $b_{max}$ et $b_{min}$ .

La borne supérieure d'intégration est atteinte quand la durée de la collision devient du même ordre de grandeur que la période de l'orbite de l'électron, celui-ci ne ressent alors qu'une lente

<sup>1</sup>Considérons une particule de masse  $M$  et de vitesse  $v$  entrant en collision frontale avec un électron au repos de masse  $m_e$ . Le traitement classique pour une collision parfaitement élastique donne

$$\begin{cases} Mv = Mv' + m_e v_e \\ Mv^2 = Mv'^2 + m_e v_e^2 \end{cases} \Rightarrow v_e = \frac{2M}{M+m_e} v \sim 2v \text{ soit } E_{c_e} \sim 2m_e v^2$$

Ce que l'on peut interpréter en terme de perte d'énergie cinétique du projectile par

$$\Delta E = \frac{2m_e v^2}{2} = \frac{4m_e}{M} v^2, \text{ ce qui est très petit excepté pour les collisions électron-électron.}$$

variation du champ électrique. On prendra  $\tau = \frac{2b}{v}$  comme durée de collision <sup>2</sup>. On a alors  $\frac{2b_{max}}{v} \approx \frac{1}{\nu_0}$  où  $\nu_0$  est la fréquence orbitale de l'électron, soit  $b_{max} \approx \frac{\pi v}{\omega_0}$ .

La borne inférieure est plus difficile à estimer, la première approche consiste à considérer que l'énergie maximale transférable est comme calculée précédemment  $2m_e v^2$  et donc  $\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b_{min}} = 2m_e v^2 \Rightarrow b_{min} = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}$ . La seconde approche consiste à reprendre l'approche quantique, en considérant que la variation de vitesse maximale de l'électron  $\Delta v \approx 2v$  et par conséquent sa variation maximale d'impulsion  $\Delta p \approx 2m_e v$ . Il est alors possible d'estimer l'incertitude sur la position  $\Delta x \approx \frac{\hbar}{2m_e v}$ . Donc  $b_{min} = \frac{\hbar}{2m_e v}$ .

*Remarque* : si c'est cette dernière valeur qui est valable, cela signifie que l'on aurait dû dès le départ utiliser le formalisme quantique. Il n'en demeure pas moins que cette valeur de  $b_{min}$  demeure la valeur la plus petite accessible.

Il faut donc choisir qu'elle est la valeur de  $b_{min}$  à utiliser.

Pour cela, il faut comparer  $\frac{b_{min}(quant)}{b_{min}(class)} = \frac{\hbar}{2m_e v} \times \frac{8\pi\epsilon_0 m_e v^3}{ze^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 v \hbar}{ze^2} = \frac{1}{z\alpha} \left(\frac{v}{c}\right)$  donc si  $\frac{v}{c} \gtrsim 0.01z$  il faut utiliser la limite quantique.

Pour les particules non relativistes de haute énergie, on a donc

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 v^2 m_e} \ln\left(\frac{2\pi m_e v^2}{\hbar\omega_0}\right)$$

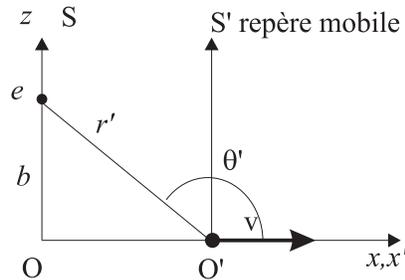
Il reste à exprimer  $\omega_0$ , ce qui peut par exemple être fait en écrivant l'énergie de liaison  $|\epsilon| = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$  or cette énergie est aussi l'énergie d'ionisation de l'atome. donc

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 v^2 m_e} \ln\left(\frac{\pi m_e v^2}{I}\right)$$

En réalité dans notre cas, il faut prendre en compte le fait que  $I$  être calculé correctement comme une valeur moyenne des énergies des différents niveaux de l'atome. Au final, on écrit

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 v^2 m_e} \ln\left(\frac{2m_e v^2}{\bar{I}}\right)$$

## 2.2 Approche relativiste



<sup>2</sup>Si on considère  $\tau = \frac{2b}{v}$  comme le temps durant laquelle l'interaction est la plus forte et que l'on multiplie cette valeur par la force maximale subie par l'électron, on obtient  $p = F\tau = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \times \frac{2b}{v} = \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 bv}$  ce qui est l'expression trouvée précédemment. On peut donc identifier  $\tau = \frac{2b}{v}$  à la durée de la collision.

### 2.2.1 Transformations relativistes du champ électrique

Comme la particule cible est non relativiste, il suffit donc de calculer le champ électrique associé au projectile relativiste dans le repère de l'observateur lié à l'électron cible.

Dans le repère mobile, on a

$$E_{x'} = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos \theta' = -\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} \text{ et } E_{z'} = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \sin \theta' = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{r'^3} \text{ avec } r'^2 = (vt')^2 + b^2$$

La relation entre les temps dans les deux repères est donnée par la transformation de Lorentz  $t' = \gamma(t - x\frac{v}{c^2})$  mais pour notre choix de coordonnées, on a  $x = 0$  pour l'électron cible donc  $t' = \gamma t$

$$\text{En conséquence, } E_{x'} = -\frac{ze(\gamma vt)}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \text{ et } E_{z'} = \frac{zeb}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

En utilisant la transformation de Lorentz inverse pour  $E$  et  $B$ , on obtient

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x'} & B_x &= B_{x'} \\ E_y &= \gamma(E_{y'} + vB_{z'}) & B_y &= \gamma(B_{y'} - \frac{v}{c^2}E_{z'}) \\ E_z &= \gamma(E_{z'} - vB_{y'}) & B_z &= \gamma(B_{z'} + \frac{v}{c^2}E_{y'}) \end{aligned}$$

avec  $B_{x'} = B_{y'} = B_{z'} = 0$  soit,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\gamma^2 z e v t}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} & B_x &= 0 \\ E_y &= 0 & B_y &= -\frac{\gamma v z e b}{4\pi\epsilon_0 c^2 [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ E_z &= \frac{\gamma z e b}{4\pi\epsilon_0 [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} & B_z &= 0 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Pertes par ionisation relativistes

Etant donnée la symétrie du champ  $E_x$  (fonction impaire de  $t$ ), celui-ci ne va pas donner d'impulsion à l'électron, il ne reste donc plus qu'à traiter la composante  $E_z$

$$\text{une fois encore } p = \int F_{\perp} dt = \int e E_z dt = \frac{ze^2 \gamma b}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{ze^2 \gamma b}{4\pi\epsilon_0} 2 \frac{1}{\gamma v b^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donc  $p = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 v b}$ , c'est la même expression qu'en classique.

La détermination de  $b_{min}$  et  $b_{max}$  conduira à une dépendance en  $\ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) \dots$

### 2.2.3 Pertes par ionisation relativistes

La calcul quantique exact conduit à la formule connue sous le nom de formule de Bethe-Bloch :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi\epsilon_0^2 v^2 m_e} \left[ \ln\left(\frac{2\gamma^2 m_e v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Qui est la formule que nous avons trouvée au terme  $\frac{v^2}{c^2}$  près qui est toujours petit.

Pour obtenir cette formule, il a été supposé que l'on pouvait additionner les différentes contributions du milieu indépendamment les unes des autres. En réalité les effets collectifs ne peuvent

être négligés que dans des milieux pas trop denses et pour des particules pas trop relativistes dans le cas contraire, il faut couper le problème en deux parties suivant le paramètre d'impact, on obtient alors la formule modifiée :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{z^2 e^4 N_e}{4\pi \varepsilon_0^2 v^2 m_e} \left[ \ln \left( \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{\hbar} b_0 \right) + \ln \left( \frac{b(\gamma, \varepsilon)}{b_0} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Comme  $b_0$  apparaît dans les deux logarithmes la détermination de sa valeur précise n'a pas d'importance. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet de densité* et a tendance à diminuer l'ionisation pour les particules ultra relativistes.

### 2.3 Pertes par ionisation pour les électrons

Deux nouveaux faits sont à prendre en compte pour traiter le cas où le projectile est un électron. Premièrement le fait que projectile et cible sont des particules identiques et deuxièmement qu'un électron de haute énergie va subir une déviation plus importante qu'un proton ou un noyau de haute énergie qui ne sont pas déviés dans l'interaction électrostatique avec les électrons du milieu.

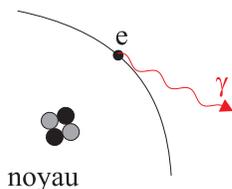
Le résultat final bien que voisin du résultat précédent en diffère quelque peu :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{e^4 N Z}{8\pi \varepsilon_0^2 m_e v^2} \left[ \ln \frac{\gamma^2 m_e v^2 E_{max}}{2I^2} - \left( \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \right]$$

$$E_{max} = \frac{2\gamma^2 M^2 m_e v^2}{m_e^2 + M^2 + 2\gamma m_e M}$$

## 3 Radiation des particules accélérées

Dans les années 30, Anderson s'aperçut que les pertes par ionisation telles que les donne la formule précédente sont sous estimées lorsque les électrons deviennent relativistes. Il devint alors évident qu'un nouveau processus accompagnait les pertes par ionisation et traduisait une perte due à l'accélération de l'électron dans le champ du noyau. Ce phénomène fut baptisé rayonnement de freinage et plus généralement de sa dénomination allemande *bremssstrahlung*. Ce phénomène est aussi connu en physique atomique sous le terme d'émission *free-free* puisqu'il fait intervenir des transitions entre états non liés du noyau.



*bremssstrahlung* : Interaction des électrons accélérés dans le champ coulombien du noyau.

- Le photon émis va avoir une énergie comparable à celle de l'électron
- Les électrons de haute énergie vont donc produire des photons de haute énergie

### 3.1 Quelques outils pour aborder le problème

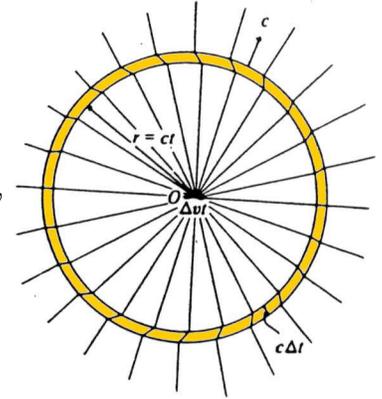
#### 3.1.1 taux de perte d'énergie $\frac{dE}{dt}$

c'est un invariant relativiste, en effet, si on considère les quadrivecteur  $[\vec{p}, \frac{E}{c^2}]$  et  $[\vec{r}, t]$ ,  $E$  et  $t$  sont tous les deux la quatrième composante de leur quadrivecteur. Il se transforme donc de la même façon par transformée de Lorentz.

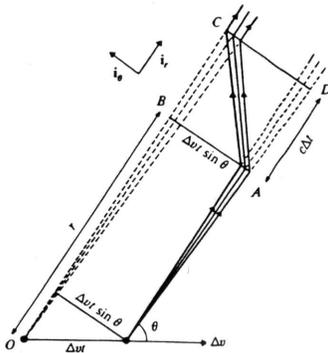
On a donc  $dE$  et  $dt$  se transforment de la même façon, donc  $\frac{dE}{dt}$  est un invariant relativiste.

#### 3.1.2 justification du rayonnement associé à la particule accélérée

- $t = 0$ , la particule chargée est en  $O$ , le champ  $\vec{E}$  est radial
- La particule subit une petite accélération  $\Delta v$  durant  $\Delta t$
- $t = t$ , le champ à l'intérieur de la sphère  $r = ct$  a vu le déplacement, le champ à l'extérieur ne l'a pas vu.
- Il existe donc une zone de reconnexion des lignes de champ
- Le champ doit avoir une composante  $E_\theta$  dans cette zone



#### Estimation de $E_\theta$



- supposons  $\Delta v \ll c$ , les lignes de champ à  $t = 0$  et  $t = t$  sont donc radiales
- La figure montre  $\frac{E_\theta}{E_r} = \Delta v t \frac{\sin \theta}{c \Delta t}$ , or  $E_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$  (avec  $r = ct$ )
- $E_\theta = q \frac{\Delta v}{\Delta t} \sin \theta \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \Rightarrow E_\theta = \frac{q \ddot{r} \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}$  ( $E_\theta$  en  $\frac{1}{r}$ )

Ceci peut être interprété en terme de moment dipolaire  $p = qr$  avec  $E_\theta = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}$ . c'est un pulse de radiation électromagnétique. La quantité d'énergie électromagnétique rayonnée par unité de surface par seconde à la distance  $r$  s'exprime grâce au vecteur de Poynting

$$\mathcal{P} = E \times H = \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} E^2$$

La quantité d'énergie perdue par unité d'angle solide  $d\Omega$  s'écrit alors

$$- \left( \frac{dE}{dt} \right)_{rad} d\Omega = \frac{|\ddot{p}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 r^2} r^2 d\Omega \times \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|\ddot{p}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega$$

En intégrant sur l'angle solide :

- $\left(\frac{dE}{dt}\right)_{rad} = \int_0^\pi \frac{|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{|\vec{p}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 |\vec{r}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$
- On retrouve la formule de Larmor
- L'émission est de type dipolaire.
- Le champ électrique varie en  $\sin \theta$
- L'énergie par unité d'angle solide en  $\sin^2 \theta$
- L'émission est polarisée

Attention, tout de même, on s'est placé dans le repère propre instantané, il faudra être prudent quand on se placera du point de vue de l'observateur.

### 3.1.3 justification du rayonnement associé à la particule accélérée, une autre approche

On se place ici dans le cadre d'une approche plus classique à partir des équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{array} \quad \text{ce qui peut être réécrit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système sont bien évidemment les potentiels retardés

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \end{array}}$$

Dans notre cas particulier, pour une particule chargée accélérée :

$$\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3 r' = q \vec{v} \delta(\vec{r})$$

On a alors  $\vec{A} = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r}$ , on en déduit  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q \vec{a}}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{q \vec{a}}{r}$ , c'est la même expression que celle trouvée précédemment. Attention, cependant, elle n'est valable qu'aux faibles vitesses.

### 3.1.4 pertes par radiation pour des particules chargées accélérées relativistes

Le traitement relativiste du problème conduit à

$$\boxed{\left(\frac{dE}{dt}\right)_S = \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left[ \vec{a}^2 + \gamma^2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}\right)^2 \right]}$$

où  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  et  $\gamma$  sont mesurés dans le repère de l'observateur.

En décomposant l'accélération suivant ces composantes parallèles  $a_{\parallel}$  à la vitesse et orthogonale  $a_{\perp}$  à celle-ci, on arrive à

$$\boxed{\left(\frac{dE}{dt}\right)_S = \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left[ |a_{\perp}|^2 + \gamma^2 |a_{\parallel}|^2 \right]}$$

### 3.1.5 obtention des composantes spectrales

Considérons la transformée de Fourier de l'accélération

$$\begin{cases} \dot{v}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ \dot{v}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t) \exp(-i\omega t) dt \end{cases}$$

Le théorème de Parseval donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(t)|^2 dt$$

Pour le problème qui nous intéresse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{v}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega$$

La quantité d'énergie émise s'écrit alors

$$\int_0^{\infty} I(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{Fourier nous donne } \int_{-\infty}^0 |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega)$$

On a alors

$$\boxed{I(\omega) = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{v}(\omega)|^2}$$

C'est la quantité d'énergie émise par unité de longueur d'onde durant son accélération.

Attention, ce n'est que pour une particule....

## 4 bremsstrahlung

### 4.1 traitement du problème

Nous allons tenter de traiter le problème particulier du bremsstrahlung.

Partons de l'expression de l'accélération de l'électron

$$\begin{cases} a_{\parallel} = \dot{v}_x = -\frac{eE_x}{m_e} = \frac{\gamma^2 Z e^2 vt}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ a_{\perp} = \dot{v}_z = \frac{eE_z}{m_e} = \frac{\gamma^2 Z e^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

où  $Ze$  est la charge du noyau et  $b$  le paramètre d'impact. On a donc écrit l'accélération d'un électron arrivant avec un paramètre d'impact  $b$  dans le champ coulombien du noyau.

En passant dans l'espace des fréquences, on a :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2 Z e^2 vt}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \exp(i\omega t) dt \\ \dot{v}_z(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2 Z e^2 b}{4\pi\epsilon_0 m_e [b^2 + (\gamma vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \exp(i\omega t) dt \end{aligned}$$

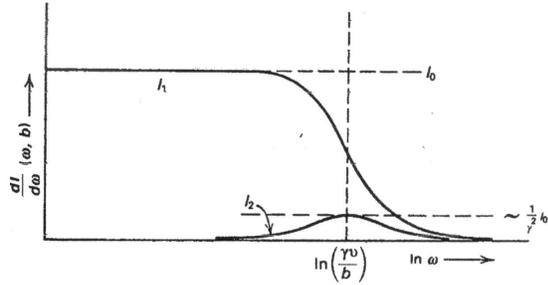
En posant  $x = \frac{\gamma vt}{b}$

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\gamma b v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}} \exp\left(i \frac{\omega b}{\gamma v} x\right) dx \\ \dot{v}_z(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{b v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}} \exp\left(i \frac{\omega b}{\gamma v} x\right) dx \end{aligned}$$

En posant cette fois  $y = \frac{\omega b}{\gamma v}$

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\gamma b v} I_1(y) \\ \dot{v}_z(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{b v} I_2(y) \end{aligned}$$

- $I_1(y) = 2\gamma y K_0(y)$
- $I_2(y) = 2\gamma K_1(y)$
- $K_0$  et  $K_1$  fonctions de Bessel modifiées.



On a alors

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \left[ |a_{\perp}|^2 + |a_{\parallel}|^2 \right] = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e b v} \right)^2 \left[ \frac{1}{\gamma^2} I_1^2(y) + I_2^2(y) \right] \\ I(\omega) &= \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 \gamma^2 v^4} \left[ \frac{1}{\gamma^2} K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) + K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right] \end{aligned}$$

Attention, ce spectre est obtenu pour une collision unique entre un électron et un noyau avec un paramètre d'impact  $b$ .

- On constate que c'est la composante transverse qui contribue le plus même pour  $\gamma = 1$ .
- Dans le cas relativiste, l'intensité due à l'accélération le long de la trajectoire diminue encore d'un facteur  $\frac{1}{\gamma^2}$
- La contribution dominante au bremsstrahlung provient donc de la composante du moment  $\perp$  à la direction de propagation.

## 4.2 Comportement asymptotique

pour  $y \ll 1$ , on a  $K_0(y) = -\ln y$ ;  $K_1(y) = \frac{1}{y}$

pour  $y \gg 1$ , on a  $K_0(y) = K_1(y) = \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-y)$

On a donc pour le **spectre haute fréquence**

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{48\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 \gamma v^3 b} \left[ \frac{1}{\gamma^2} + 1 \right] \exp\left(-\frac{2\omega b}{\gamma v}\right)$$

On remarque que l'on a un cutoff exponentiel à grande fréquence.

**Spectre basse fréquence**

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2 b^2} \left[ 1 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 \ln^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]$$

à basse fréquence  $\frac{\omega b}{\gamma v} \ll 1$

$$I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2 b^2} = Cste$$

Ce qui peut se comprendre facilement, la durée de collision étant très courte par rapport à la longueur d'onde et  $TF(\delta) \rightarrow$  spectre plat.

### 4.3 Fin du calcul

On a trouvé  $I(\omega) = \frac{Z^2 e^6}{24\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v^2 b^2} = Cste$ ,

mais ce calcul a été fait pour :

- 1 électron
- 1 noyau
- 1 collision
- 1 paramètre d'impact

Il reste désormais à considérer tous les paramètres d'impact de la collision contribuant à la fréquence  $\omega$ .

Soit :

Si l'électron est relativiste, la densité de noyaux vus est amplifiée de  $\gamma$  à cause de la contraction des longueurs.

Dans le repère en mouvement  $N' = \gamma N$  avec  $N$  la densité de noyaux dans le référentiel du laboratoire.

Le nombre de collisions par secondes est alors  $N'v$ .

Dans le repère de l'électron, on a alors :

$$I(\omega') = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi b' \gamma N v K db'$$

soit

$$I(\omega') = \frac{Z^2 e^6 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{b'_{max}}{b'_{min}}\right)$$

### 4.4 bremsstrahlung relativiste

On reprend  $I(\omega') = \frac{Z^2 e^6 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{b'_{max}}{b'_{min}}\right)$

Le problème consiste à déterminer les bornes, valeurs de  $b'_{min}$  et  $b'_{max}$  (ou  $b_{min}$  et  $b_{max}$ ).

#### 4.4.1 Arguments pour déterminer le paramètre d'impact

$b_{min}$  : on attend une radiation cohérente de l'électron. Soit  $\Delta x$  l'extension spatiale de l'électron, si la durée d'interaction est plus petite que le temps de parcours  $\Delta x$ , alors chaque bout de la

distribution de probabilité de position de l'e<sup>-</sup> reçoit l'information à des temps différents. On a alors émission incohérente.

On doit donc avoir  $\Delta t_{\text{durée d'interaction}} \geq \frac{\Delta x}{v}$

$$\text{soit } \frac{b_{\min}}{\gamma v} = \frac{\hbar}{\gamma m_e v} \Rightarrow \boxed{b_{\min} = \frac{\hbar}{m_e v}}$$

$b_{\max}$  : l'approche est plus délicate

1. Nous nous sommes placés dans la région  $I(\omega) = K$  donc avant le cutoff. On montre que l'essentiel de l'émission se fait à des fréquences telles que  $\frac{\omega b}{\gamma v} \simeq 1 \Rightarrow \boxed{b_{\max_{\text{coll}}} = \frac{\gamma v}{\omega}}$
2. L'électron interagit avec le champ coulombien du noyau écranté par son propre cortège électronique.

Une expression convenable du potentiel du noyau est alors  $V(r) = \frac{Ze^2}{r} \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$  (modèle de Fermi-Thomas), avec  $a = 1,4a_0 Z^{-\frac{1}{3}}$  et  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \times 10^{-10} m$  pour les atomes neutres, on peut prendre  $\boxed{b_{\max_{\text{FT}}} = 1,4a_0 Z^{-\frac{1}{3}}}$ .

On doit donc choisir la plus petite des deux valeurs.

#### 4.4.2 Cas ultra-relativiste

si  $\gamma \rightarrow \infty$  on prend  $b_{\max_{\text{FT}}}$  et  $I(\omega') = \frac{Z^2 e^6 \gamma N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{1,4a_0 Z^{-\frac{1}{3}} m_e v}{\hbar}\right)$

Le passage dans le repère du laboratoire donne  $\Delta\omega = \gamma\Delta\omega'$  soit  $I(\omega) = \frac{I(\omega')}{\gamma}$

$$\boxed{I(\omega) = \frac{Z^2 e^6 N}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 v} \ln\left(\frac{192v}{Z^{\frac{1}{3}} c}\right)}$$

**Perte totale d'énergie**  $-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \int_0^{\frac{E}{\hbar}} I(\omega) d\omega = \frac{Z^2 e^6 N E}{12\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2 c^4 \hbar} \ln\left(\frac{192}{Z^{1/3}}\right)$  comme  $v \approx c$

Cette expression est à comparer à la célèbre formule de Bethe-Heitler, fruit du traitement complet relativiste quantique

$$\boxed{I(\omega) = \frac{Z(Z+1.3)e^6 N}{16\pi^2 \epsilon_0^3 m_e^2 c^4 \hbar} \left[ \ln\left(\frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}\right) + \frac{1}{8} \right]}$$

Remarques : On a  $\frac{dE}{dx} \propto E \Rightarrow$  on peut définir  $X_0$  la longueur de radiation sur laquelle un électron perd une fraction  $1 - \frac{1}{e}$  de son énergie.

On écrit  $-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}$

il est courant d'utiliser la quantité  $\xi_0 = \rho X_0$  exprimée en  $g.cm^{-2}$

$$-\frac{dE}{d\xi} = -\frac{dE}{dt} \frac{1}{\rho c} = \frac{E}{\rho X_0} = \frac{E}{\xi_0}, \text{ on peut montrer } \boxed{\xi_0 = \frac{7160 M_A}{Z(Z+1.3) \left[ \ln\left(183 Z^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{8} \right]} kg.m^{-2}}$$

### 4.4.3 La physique

A haute énergie, le bremsstrahlung domine, mais à basse énergie les pertes par ionisation prennent le relais.

On définit une énergie critique  $E_c$  marquant cette transition

Quelques valeurs sont données dans le tableau suivant :

	$\xi_0(kg.m^{-2})$	$X_0(m)$	$E_c(MeV)$
hydrogène	580	$6,7 \times 10^3$	340
air	365	280	83
Pb	58	$5,6 \times 10^{-3}$	6,9

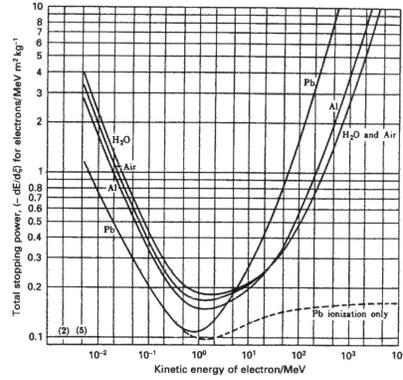
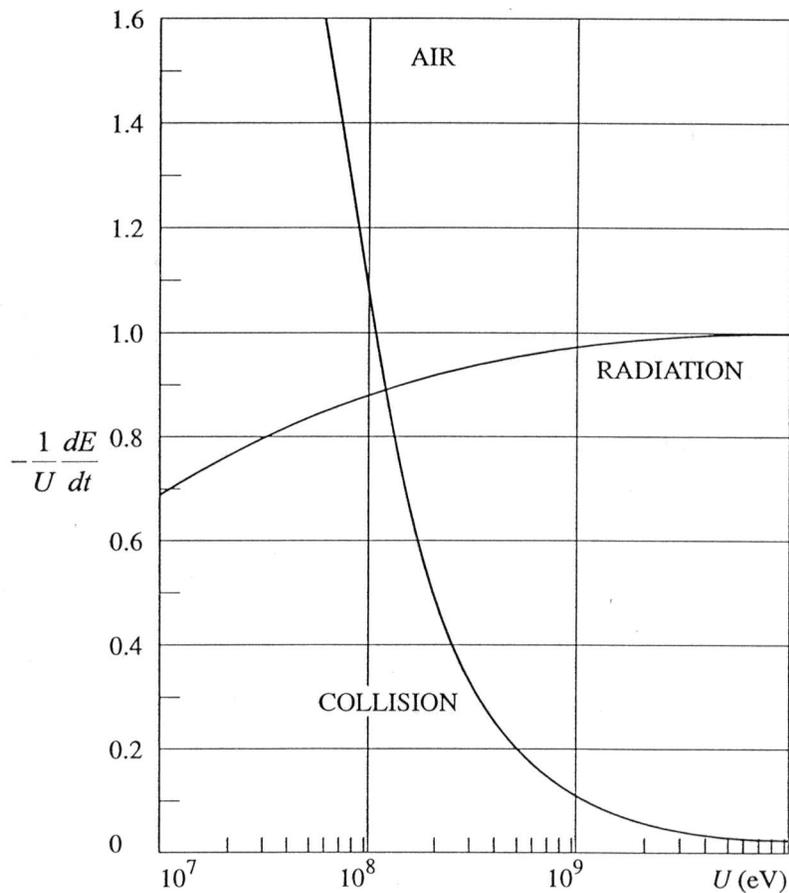


Figure 3.5. The total stopping power for electrons in air, water, aluminium and lead. At energies less than 1 MeV, the dominant loss mechanism is ionisation losses. At higher energies, the dominant loss process is bremsstrahlung. For comparison, the contribution from ionisation losses for electrons in lead is also shown. (From H. A. Engle (1966). *Introduction to nuclear physics*, page 190, London: Addison-Wesley Publishing Co.)



Retour sur le spectre d'émission

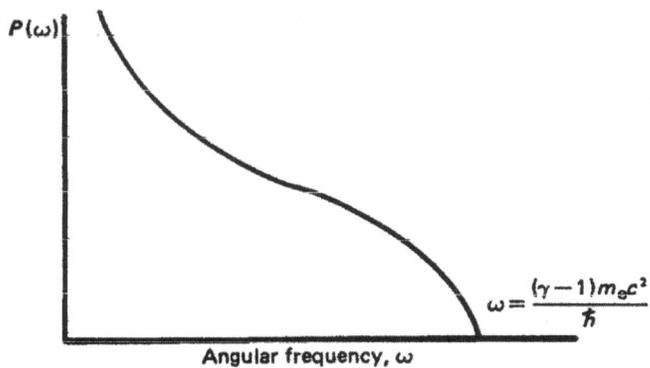
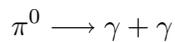


Figure 3.6. The probability per unit bandwidth of the emission of a photon by bremsstrahlung as a function of angular frequency of the emitted photon plotted on linear intensity and frequency scales.

L'interprétation de la courbe précédente doit surtout montre d'une part que la probabilité d'émission diverge à fréquence nulle. Mais ce qu'il faut surtout retenir, c'est que bien que la probabilité d'émission d'un photon haute énergie soit faible, il emportera une partie importante de l'énergie de l'électron, ce qui fait du bremsstrahlung un des processus privilégiés d'émission de photons haute énergie.

## 5 Désintégration des $\pi^0$

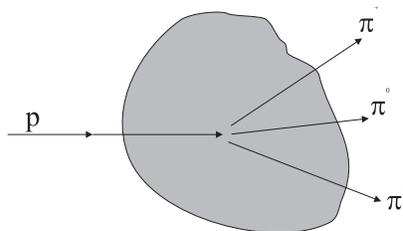


avec  $m_{\pi^0} = 134,9764 \text{ MeV}$

pour un spectre de  $\pi^0$ , la distribution présente un pic à  $\frac{m_{\pi^0}}{2}$  (cinématique)

$$\overline{E_\gamma} = 70 \text{ MeV}$$

D'où viennent ces  $\pi^0$  ?



$$n_{\pi^+} \simeq n_{\pi^-} \simeq n_{\pi^0}$$

Donc les paramètres importants vont être

- la section efficace  $p - p$
- la multiplicité de l'interaction (nombre de secondaires produits)

$$\sigma_{ppHE} \simeq Cste \simeq 100 \text{ mb}$$

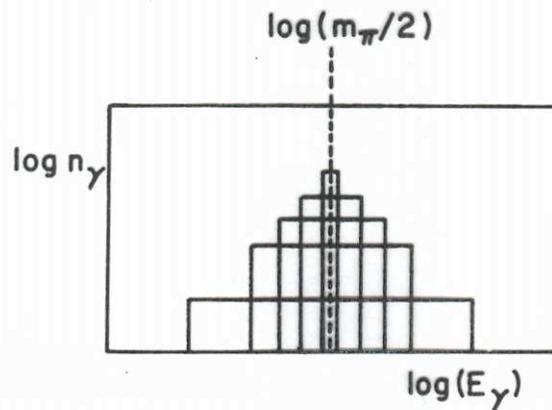


Figure 10.1: Schematic construction of the photon spectrum produced by decay of a spectrum of neutral pions. (After Stecker, 1971.)

## 6 Rayonnement synchrotron

- Ce processus est omniprésent en astrophysique des hautes énergies.
- C'est la radiation émise par des électrons très énergétiques orbitant dans un champ magnétique.
- On le rencontre
  - dans l'émission radio de la Galaxie
  - dans les SNR
  - dans les sources radio extragalactiques
  - dans l'émission optique non thermique du crabe
  - ...

### 6.1 Rayonnement synchrotron

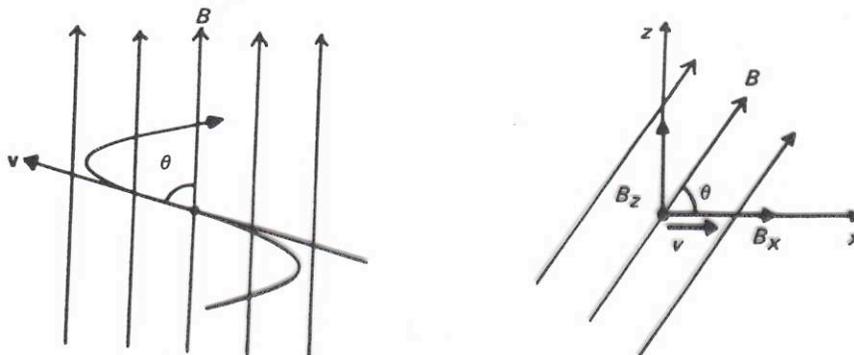


Figure 18.1. The coordinates used in working out the total radiation rate due to synchrotron radiation.

Position du problème

Dans un champ magnétique uniforme, une particule spirale avec un angle constant  $\theta$  par rapport au champ.

Sa vitesse le long des lignes de champ est constante  $v_g = \frac{eB}{2\pi\gamma m_e}$ .

Dans son mouvement, la particule est accélérée vers le centre de la trajectoire.

Donc elle rayonne.....

En utilisant ce que l'on a déjà démontré

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -\left(\frac{dE}{dt}\right) &= \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |a_\perp|^2 \\
 \Rightarrow &= \frac{\gamma^4 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 v^2 B^2 \sin^2 \theta}{\gamma^2 m_e^2} \\
 \Rightarrow &= \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 c m_e^2} \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta \\
 \Rightarrow &= 2 \left( \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2} \right) \beta^2 c \frac{B^2}{2\mu_0} \gamma^2 \sin^2 \theta \quad (\text{on a } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1) \\
 \Rightarrow &= 2\sigma_T c U_{mag} \gamma^2 \sin^2 \theta \left(\frac{v}{c}\right)^2
 \end{aligned}$$

Dans le cas ultra-relativiste

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_{rad} \gamma^2 \sin^2 \theta$$

cette formule est vraie pour un angle  $\theta$  et une énergie  $E(\gamma)$

Si on considère une distribution isotrope des angles  $\rho(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$

$$\Rightarrow -\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_T c U_{rad} \gamma^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \times \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{rad} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma^2$$

## 6.2 Traitement relativiste du problème

Nous ne détaillerons pas le calcul qui donne pour l'émissivité

$$j(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 c m_e} F(x)$$

avec  $F(x) = x \int_0^\infty K_{\frac{5}{3}}(x) dx$ ,  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ ,  $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2a}$  avec  $a$  rayon de courbure de la particule.

La quantité d'énergie émise est alors

$$-\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty j(\omega) d\omega = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 c m_e} \int_0^\infty F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{(9\sqrt{3})}{4\pi} \left(\frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}\right) c \frac{B^2}{2\mu_0} \gamma^2 \sin^2 \alpha \int_0^\infty F(x) dx$$

$$-\frac{dE}{dt} = \sigma_T c U_{mag} \sin^2 \alpha \left(\frac{9\sqrt{3}}{4\pi}\right) \int_0^\infty F(x) dx$$

$$\text{On a } \int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{(\mu+2)} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{en prenant } \mu = 0, \text{ on a } \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^\infty F(x) dx = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2!!!!$$

$$\Rightarrow -\frac{dE}{dt} = 2\sigma_T c U_{mag} \gamma^2 \sin^2 \alpha$$

Table 18.1. *The function  $F(x)$ , which describes the synchrotron radiation spectrum of a single ultrarelativistic electron (see expressions (18.36) and (18.31))*

$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$
$1.0 \times 10^{-4}$	0.0996	$2.0 \times 10^{-1}$	0.904	1	0.655
$1.0 \times 10^{-3}$	0.213	$2.8 \times 10^{-1}$	0.918	2	0.301
$1.0 \times 10^{-2}$	0.445	$3.0 \times 10^{-1}$	0.918	3	0.130
$3.0 \times 10^{-2}$	0.613	$5.0 \times 10^{-1}$	0.872	5	$2.14 \times 10^{-2}$
$1.0 \times 10^{-1}$	0.818	$8.0 \times 10^{-1}$	0.742	10	$1.92 \times 10^{-4}$

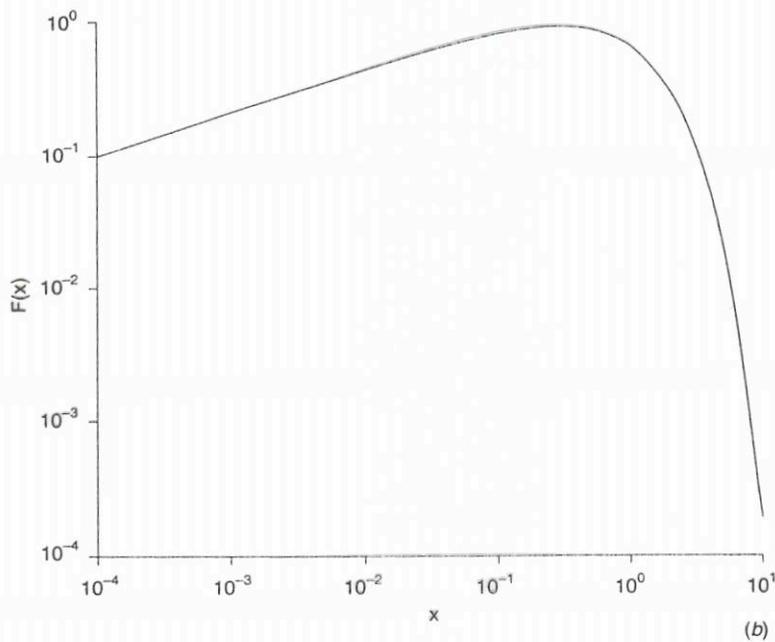
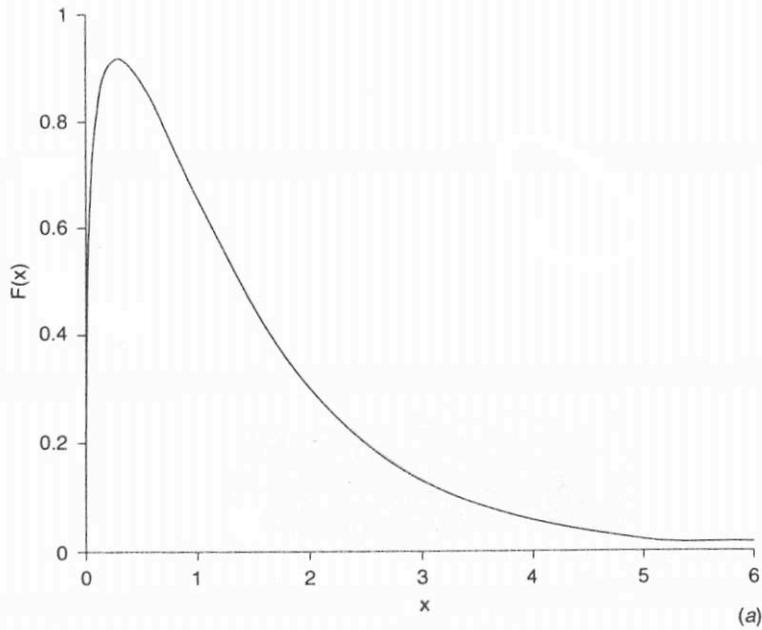


Figure 18.8. The intensity spectrum of the synchrotron radiation of a single electron shown (a) with linear axes and (b) with logarithmic axes. The function is plotted in terms of  $x = \omega/\omega_c = v/v_c$ , where  $\omega_c$  is the critical angular frequency,  $\omega_c = 2\pi\nu_c = \frac{3}{2} \left(\frac{c}{v}\right) \gamma^3 \omega_r \sin \alpha$ .

### 6.3 Émissivité

Intéressons nous au comportement asymptotique de l'émissivité

$$F(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } x \ll 1 \text{ (basse fréquence)}$$

$F(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \exp(-x)$  pour  $x \gg 1$  (haute fréquence)

– à haute fréquence, on a  $j(\nu) \propto \nu^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\nu}{\nu_c}\right)$

On a donc un cut-off exponentiel pour  $\nu \gg \nu_c$

à basse fréquence  $\nu \ll \nu_c$

$$j(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \varepsilon_0 c m_e} \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$j(\omega) = \frac{e^2}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)2\pi\varepsilon_0 c} \left(\frac{eB \sin \alpha}{\gamma m_e}\right)^{\frac{2}{3}} \omega^{\frac{1}{3}}$$

On a donc  $j(\nu) \propto \nu^{\frac{1}{3}}$

## 6.4 Radiation synchrotron d'une distribution d'électrons en loi de puissance

A FAIRE

## Deuxième partie

# Interactions photon-matière

Les trois principaux processus mettant en oeuvre l'interaction photon-matière sont l'effet photoélectrique, l'effet Compton, et la création de paires électron-positon. Nous verrons que les sections efficaces sont telles que ces trois processus sont tour à tour prépondérants dans cet ordre en fonction de l'énergie du photon incident.

## 7 Effet photoélectrique

A basse énergie du photon incident  $\hbar\omega \ll m_e c^2$ , le processus dominant par lequel les photons perdent leur énergie est l'effet photoélectrique dans lequel un photon arrache un électron périphérique (donc faiblement lié) d'un atome. Un photon d'énergie  $\hbar\omega$  va pouvoir arracher des électrons d'énergie de liaison  $E_I \leq \hbar\omega$ , l'énergie cinétique de l'électron éjecté sera alors  $\hbar\omega - E_I$ .

Pour les photons d'énergie plus élevée, la section efficace d'effet photoélectrique décroît comme  $\nu^{-3}$ . Pour les énergie  $\hbar\omega \gg E_I$  et  $\hbar\omega \ll m_e c^2$ , la section efficace d'éjection d'un électron de la couche  $K$  prend la forme suivante :

$$\sigma_K = 4\sqrt{2}\sigma_T\alpha^4 Z^5 \left(\frac{m_e c^2}{\hbar\omega}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{e^{12} m_e^{\frac{3}{2}} Z^5}{192\sqrt{2}\pi^5 \varepsilon_0^6 \hbar^4 c} \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^{\frac{7}{2}}$$

où

- $\alpha$  est la constante de structure fine  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$
- $\sigma_T$  est la section efficace de diffusion Thomson  $\sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0^2 m_e^2 c^4}$

## 8 Effet Compton

Dans l'effet Compton, le photon incident de haute énergie entre en collision avec un électron immobile fortement lié et transfère une partie de son énergie et de son impulsion à l'électron.

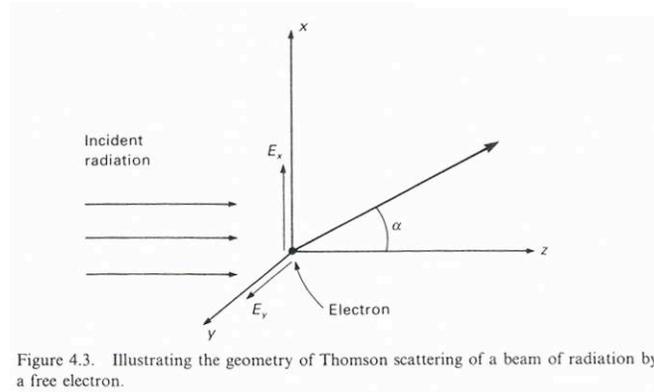
En conséquence, les photons sortent de la collision avec un énergie moindre que l'énergie incidente, les électrons ayant quand à eux bien évidemment gagné de l'énergie.

Avant d'étudier l'effet Compton, il faut d'abord s'intéresser au processus plus simple de la diffusion Thomson

### 8.1 Diffusion Thomson

La diffusion Thomson peut être décrite comme la diffusion d'un faisceau non polarisé de radiation sur un électron au repos.

Ce problème peut être décrit par la figure suivante :



Le champ électrique ressenti par l'électron dans les directions  $x$  et  $y$  est alors  $E_x = E_{0x} \exp(i\omega t)$  et  $E_y = E_{0y} \exp(i\omega t)$ , l'électron oscille donc dans le champ avec les accélérations  $\ddot{r}_x = \frac{eE_x}{m_e}$  et  $\ddot{r}_y = \frac{eE_y}{m_e}$

Si nous utilisons ces valeurs dans la formule démontrée précédemment à propos des pertes par radiation, on a pour la composante  $x$ . (on a ici  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ )

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_x d\Omega = \frac{e^2 |\dot{r}_x|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega = \frac{e^4 |E_x|^2 \cos^2 \alpha}{16\pi^2 m_e^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega$$

Nous allons maintenant raisonner en terme d'énergie par unité de surface sur l'électron, pour cela, il faut faire une moyenne sur toutes les radiations constituant le champ  $E$  et exprimer

le problème du champ en terme de vecteur de Poynting. De plus, on peut écrire la valeur moyenne de  $\overline{E_x^2} = \frac{E_{x0}^2}{2}$  et donc  $S_x = \sum_i c \varepsilon_0 \frac{E_{x0}^2}{2}$ .

On a alors

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_x d\Omega = \frac{e^4 \cos^2 \alpha}{16\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c^3} \sum_i \overline{E_x^2} d\Omega = \frac{e^4 \cos^2 \alpha}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^4} S_x d\Omega$$

Si on s'intéresse à la direction  $y$ , on a

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_y d\Omega = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^4} S_y d\Omega$$

La quantité totale d'énergie diffusée dans  $d\Omega$  est alors

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) d\Omega = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^4} (1 + \cos^2 \alpha) \frac{S}{2} d\Omega$$

où  $S = S_x + S_y$  et  $S_x = S_y$  pour une radiation non polarisée.

On définit alors l'intensité diffusée dans la direction  $\alpha$  par

$$\frac{d\sigma_T(\alpha)}{d\Omega} = \frac{\text{énergie rayonnée par unité de temps et unité d'angle solide}}{\text{énergie incidente par unité de temps et de surface}}$$

Comme l'énergie totale incidente est  $S$ , la section efficace différentielle de diffusion Thomson s'écrit alors

$$d\sigma_T = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^4} \frac{(1 + \cos^2 \alpha)}{2} d\Omega$$

On a alors

$$\sigma_T = \int_0^\pi \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^4} \frac{(1 + \cos^2 \alpha)}{2} 2\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 c^4} = 6,653 \times 10^{-29} m^2$$

Cette section efficace réapparaît dans un très grand nombre de formule impliquant les processus d'interaction photon matière.

A ce niveau, il est important de noter que la formule donnant la section efficace différentielle de diffusion Thomson est symétrique en  $\alpha$ , ce qui signifie qu'il y a autant d'énergie rayonnée vers l'avant que vers l'arrière.

## 8.2 Effet Compton

Dans le cas de la diffusion Thomson, la fréquence des photons incidents n'est pas modifiée, l'électron n'est donc là que pour diffuser la radiation incidente. Ceci reste physiquement acceptable tant que l'énergie des photons est très inférieure à l'énergie de masse de l'électron

$\hbar\omega \ll m_e c^2$ . Il est possible de prolonger le traitement "diffusion Thomson" tant que l'énergie des photons est inférieure à  $m_e c^2$ .

Le traitement de l'effet Compton fait partie des grands classiques des exercices d'application de la relativité restreinte.

On peut réécrire ce problème de façon plus élégante en utilisant le formalisme quadrivecteur.

Notons ' les quantités après le choc.

Pour l'électron  $\mathbf{P} = [\gamma m_e \vec{v}, \gamma m_e]$  et  $\mathbf{P}' = [\gamma' m_e \vec{v}', \gamma' m_e]$

Pour le photon  $\mathbf{K} = \left[ \frac{\hbar\omega}{c} \vec{i}_k, \frac{\hbar\omega}{c^2} \right]$  et  $\mathbf{K}' = \left[ \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{i}_{k'}, \frac{\hbar\omega'}{c^2} \right]$

La conservation des quadrivecteurs donne

$$\mathbf{P} + \mathbf{K} = \mathbf{P}' + \mathbf{K}'$$

*Remarque :*

On a  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' = m_e^2 c^2$  et  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}' = 0$

On a  $(\mathbf{P} + \mathbf{K})^2 = (\mathbf{P}' + \mathbf{K}')^2$

soit  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}' + 2\mathbf{P}' \cdot \mathbf{K}' + \mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}'$

soit  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{K}'$

En multipliant par  $\mathbf{K}'$  l'équation de conservation des quadrivecteurs, on a alors  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{K}' + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{K}' + \mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}' \Rightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}' + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}$

En réécrivant l'équation précédente en fonction de paramètres plus parlants, à savoir :

- l'angle de diffusion  $\vec{i}_k \cdot \vec{i}_{k'} = \cos \alpha$
- l'angle  $\theta$  entre la direction incidente des photons et la direction de la vitesse de l'électron  
 $\cos \theta = \vec{i}_k \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  et  $\cos \theta' = \vec{i}_{k'} \cdot \frac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|}$

On a alors

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right) \cos \theta}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right) \cos \theta' + \left(\frac{\hbar\omega}{\gamma m_e c^2}\right)(1 - \cos \alpha)\right]}$$

L'effet Compton est généralement décrit comme la collision d'un photon sur un électron au repos, donc  $v = 0$  et  $\gamma = 1$ .

On a alors  $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\hbar\omega}{\gamma m_e c^2}\right)(1 - \cos \alpha)\right]}$  ce qui souvent s'exprime en terme de refroidissement des photons  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{\gamma m_e c^2} (1 - \cos \alpha)$

La section efficace de diffusion Thomson ne convient pas pour décrire l'interaction haute énergie des photons dans le cadre de l'effet Compton, la section efficace doit être traitée avec une approche quantique relativiste, ce calcul conduit à la formule de Klein-Nishina

$$\sigma_{K-N} = \pi r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[ 1 - \frac{2(\varepsilon + 1)}{\varepsilon^2} \right] \ln(2\varepsilon + 1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\varepsilon} - \frac{1}{2(2\varepsilon + 1)^2} \right\}$$

où  $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}$  et  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$  est le rayon classique de l'électron.

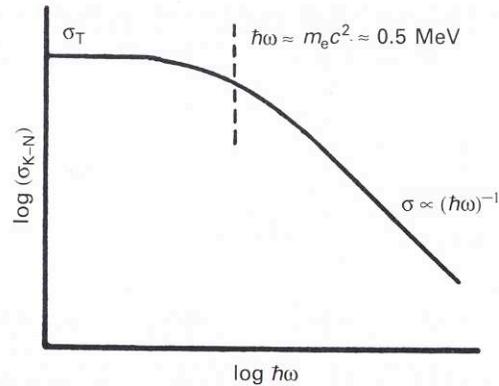


Figure 4.5. A schematic diagram showing the dependence of the Klein–Nishina cross-section upon photon energy.

Le comportement asymptotique à basse énergie donne :

$$\sigma_{K-N} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 (1 - 2\varepsilon) \simeq \sigma_T (1 - 2\varepsilon) \simeq \sigma_T$$

De l'autre côté, la limite ultra-relativiste donne :

$$\sigma_{K-N} = \pi r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left( \ln 2\varepsilon + \frac{1}{2} \right)$$

Pour un atome à  $Z$  électrons la section efficace pour l'atome est alors simplement  $Z\sigma_{K-N}$

### 8.3 Inverse Compton

Effet Compton direct : diffusion de photons énergétiques sur des électrons au repos

Inverse Compton : diffusion de photons de basse énergie sur des électrons ultra-relativistes

Ce processus est un des plus importants pour l'astrophysique des hautes énergies puisqu'il conduit à la production de photons énergétiques.

Pour le Compton direct : l'énergie des photons après interaction est diminuée, celle des électrons augmentés.

Pour l'inverse Compton : c'est l'inverse, l'énergie des électrons est diminuée, celle des photons augmentés.

### 8.3.1 Inverse Compton

Cas où le photon à une énergie  $\ll m_e c^2$  dans le référentiel barycentrique

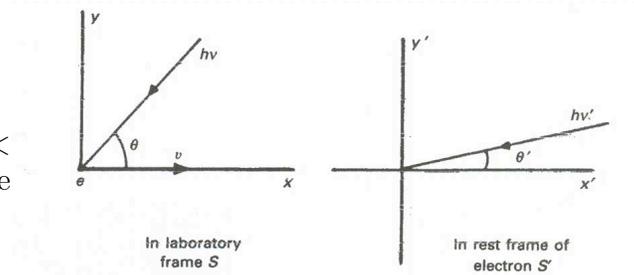


Figure 4.6. The geometry of inverse Compton scattering in the laboratory frame of reference  $S$  and that in which the electron is at rest  $S'$ .

Dans  $S'$ , on a

$$\text{et } \begin{cases} \hbar\omega &= \gamma \hbar\omega' \left[ 1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right] \\ \sin \theta &= \frac{\sin \theta'}{\gamma \left[ 1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right]} \\ \cos \theta &= \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{\left[ 1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right]} \end{cases}$$

On s'est placé dans le cas  $h\omega' \ll m_e c^2$

$\Rightarrow$  Compton dans le référentiel barycentrique

Les pertes d'énergie de l'électron s'écrivent alors

$-\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \sigma_T c U'_{rad}$  où  $\sigma_T$  est la section efficace de diffusion Thomson,  $U'_{rad}$  est la densité d'énergie de radiation dans le référentiel lié à l'électron

$\Rightarrow$  Calculons donc  $U'_{rad} \dots$

### 8.3.2 Estimation de $U'_{rad}$

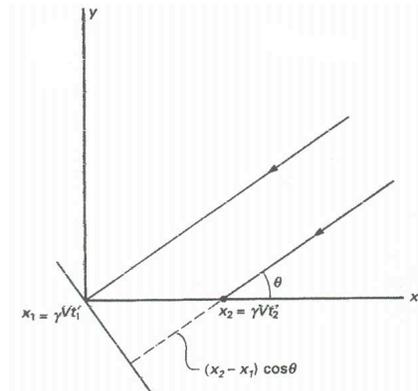


Figure 4.7. Illustrating the rate of arrival of photons at the observer in the laboratory frame of reference (see text).

supposons que la densité de photons dans un faisceau incident à angle  $\theta$  soit  $N$

- La densité d'énergie des photons dans  $S$  est  $N\hbar\omega$ .
- Le flux de photons incidents sur un électron au repos est  $U_{rad}c = N\hbar\omega c$

Passons dans le référentiel de l'électron...

- Energie de chaque photon dans  $S'$ , on a vu  $\hbar\omega = \gamma \hbar\omega' \left[ 1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right]$

- Taux d'arrivée des photons sur l'électron :

La figure précédente  $\Rightarrow \Delta t = t_2 + \frac{(x_2 - x_1)}{c} \cos \theta - t_1 = (t'_2 - t'_1) \gamma \left[ 1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right]$

l'intervalle de temps entre deux photons est divisé par  $[1 + \frac{v}{c} \cos \theta]$ . donc le taux d'arrivée est multiplié par  $[1 + \frac{v}{c} \cos \theta]$  donc

$$U'_{rad} = [\gamma (1 + \frac{v}{c} \cos \theta)]^2 U_{rad}$$

Si on supposee que les photons incidents arrivent dans un angle solide  $2\pi \sin \theta d\theta$

$$\Rightarrow U'_{rad} = U_{rad} \int_0^\pi \gamma^2 [1 + \frac{v}{c} \cos \theta]^2 \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$

$$U'_{rad} = \frac{4}{3} U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$$

$$\text{On a alors } (\frac{dE}{dt})' = \frac{4}{3} \sigma_{TC} U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$$

$$\text{dans les outils, on a montré } (\frac{dE}{dt}) = (\frac{dE}{dt})'$$

$$\Rightarrow (\frac{dE}{dt}) = \frac{4}{3} \sigma_{TC} U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4})$$

C'est l'énergie gagnée par le champ de photons par diffusion des photons de basse énergie.

Mais ces photons de basse énergie ont alors disparu du champ au rythme de  $\dots \sigma_{TC} U_{rad}$

$$\text{On a alors } \frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_{TC} U_{rad} (\gamma^2 - \frac{1}{4}) - \sigma_{TC} U_{rad}$$

$$\text{\$donc } \frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_{TC} U_{rad} (\gamma^2 - 1)$$

$$\Rightarrow (\frac{dE}{dt}) = \frac{4}{3} \sigma_{TC} U_{rad} \left(\frac{v^2}{c^2}\right) \gamma^2 \quad \text{car } \gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2$$

ceci est vrai tant que  $\gamma \hbar \omega \ll m_e c^2$

### 8.3.3 Spectre d'émission de l'Inverse Compton

$$I(\nu) d\nu = \frac{3\sigma_{TC} N(\nu_0)}{16\gamma^4} \frac{\nu}{\nu_0^2} \nu \left[ 2\nu \ln \frac{\nu}{4\gamma^2 \nu_0} + \nu + 4\gamma^2 \nu_0 - \frac{\nu^2}{2\gamma^2 \nu_0} \right] d\nu$$

où le champ de radiation est supposé monochromatique de fréquence  $\nu_0$  et  $N(\nu_0)$  est la densité de photons.

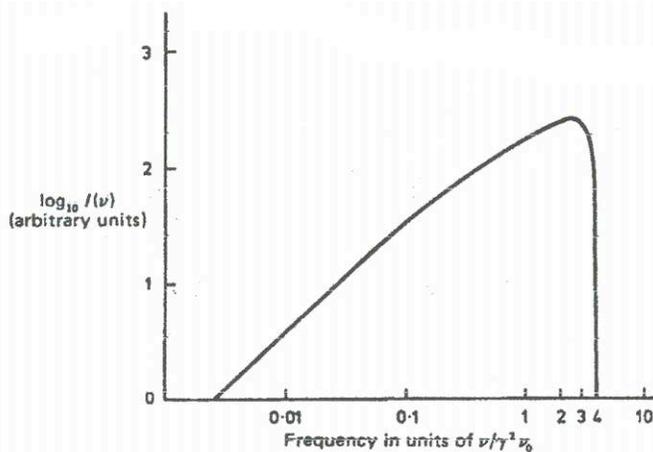


Figure 4.8. The emission spectrum of inverse Compton scattering;  $\nu_0$  is the frequency of the unscattered radiation. (From G. R. Blumenthal and R. J. Gould (1970). *Rev. Mod. Phys.*, **42**, 237.)

- Pour  $\nu$  petit, le terme entre crochets est constant  $\Rightarrow I(\nu) \propto \nu$
- On peut montrer que  $(\hbar\omega)_{max} = \hbar\omega\gamma^2(1 + \frac{v}{c})^2 \simeq 4\gamma^2\hbar\omega_0$ , choc frontal, le photon est rétrodiffusé.
- Nombre de photons diffusés par unité de temps  $\frac{\sigma_T c U_{rad}}{\hbar\omega_0}$

L'énergie moyenne des photons diffusés  $\hbar\omega = \frac{4}{3}\gamma^2(\frac{v}{c})^2\hbar\omega_0 = \frac{4}{3}\gamma^2\hbar\omega_0$

**Il est important de noter que l'on a  $\nu \simeq \gamma^2\nu_0 \Rightarrow$  ce qui est important en astrophysique des hautes énergies (où les électrons ont des  $\gamma$  compris entre 100 et 1000) .**

## 9 Création de Paire

Si le photon a une énergie supérieure à  $2m_e c^2$ , la production de paire devient alors possible dans le champ du noyau. La création de paire constitue encore un problème très classique de relativité puisque il est aisé de montrer que la production de paire ne peut avoir lieu dans le vide car dans ce cas, il est impossible de conserver l'impulsion.

Il suffit pour cela de considérer un photon d'énergie  $\hbar\omega$  qui décroît en deux particules (électron et positon) ayant chacune une énergie  $(\gamma - 1)m_e c^2$ . En supposant la paire créée suivant la direction de déplacement du photon, on a :

La conservation de l'énergie impose  $\hbar\omega = 2\gamma m_e c^2$

L'impulsion de la paire  $2\gamma m_e v = (\frac{\hbar\omega}{c})(\frac{v}{c})$

Or l'impulsion initiale du photon est  $\frac{\hbar\omega}{c}$ .

Le seul moyen de conserver l'impulsion est de supposer qu'un troisième corps absorbe l'excédent d'impulsion ou d'énergie.

La section efficace de création de paire est donnée suivant l'énergie du photon par l'une des deux formules suivantes :

*Aux énergies intermédiaires* : sans écrantage du champ du noyau, la section efficace pour les photons d'énergies dans le domaine  $1 \ll \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \ll \frac{1}{\alpha Z^{\frac{1}{3}}}$

$$\sigma_{pair} = \alpha r_e^2 Z^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \left( \frac{2\hbar\omega}{m_e c^2} \right) - \frac{218}{27} \right] m^2 atom^{-1}$$

*La limite ultrarelativiste* : avec un écrantage total du champ du noyau, la section efficace pour les photons d'énergies  $\frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \gg \frac{1}{\alpha Z^{\frac{1}{3}}}$

$$\sigma_{pair} = \alpha r_e^2 Z^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \left( \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \right) - \frac{2}{27} \right] m^2 atom^{-1}$$

De la même façon que l'on a défini une longueur de radiation pour le bremsstrahlung on peut définir une longueur de radiation de création de paire  $\xi_{pair}$ .

$$\xi_{pair} = \frac{\rho}{N_i \sigma_{pair}} = \frac{M_A}{\mathcal{N}_0 \sigma_{pair}}$$

où  $M_A$  est la masse atomique,  $N_i$  est la densité de noyaux.

Si on compare la longueur de radiation pour la production de paire et la longueur de radiation de bremsstrahlung dans la limite ultrarelativiste on constate que  $\xi_{pair} \approx \xi_{brems}$ . Ceci n'est pas étonnant si on considère que dans le traitement par l'électrodynamique quantique ces deux phénomènes sont similaires.

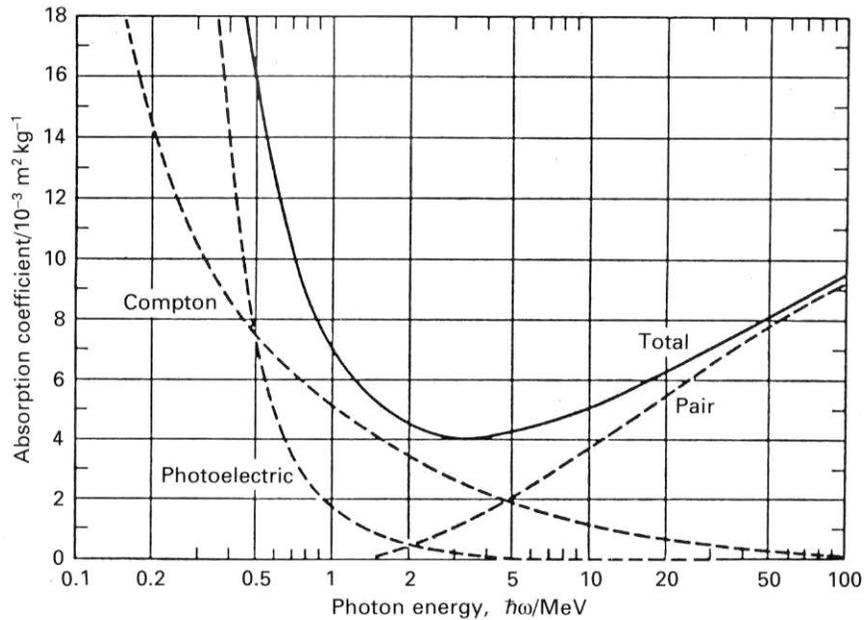


Figure 4.16. The total mass absorption coefficient for high energy photons in lead, indicating the contributions associated with the photoelectric absorption, Compton scattering and electron-positron pair production. (From H. A. Enge (1966). *Introduction to nuclear physics*, page 193, London: Addison-Wesley Publishing Co.)

## 9.1 Une manifestation de la création de paires : l'absorption infra-rouge

Le ciel gamma montre des différences importantes suivant l'énergie considérée. EGRET a détecté quelques 270 sources aux énergies inférieures à  $10\text{GeV}$ , seules quelques sources ont été vues au delà de  $300\text{GeV}$ . On constate de plus qu'aucun blazar lointain  $z > 0.1$  n'est vu à haute énergie.

A TERMINER

## Troisième partie

# Cascades

Tous les processus que nous venons de traiter (et certains que nous n'avons pas abordé) vont tous être présents simultanément dès que les particules vont traverser des milieux. Cela va se produire au niveau des sources où les particules évoluent dans des milieux où la matière est

dense, dans les nuages de matière que traversent les particules dans leur parcours à travers le milieu interstellaire et dans l'atmosphère que traversent les particules avant d'arriver au sol. Ces phénomènes existent aussi bien évidemment quand les particules traversent le matériau des détecteurs.

Cette partie va s'attacher à décrire l'enchaînement de ces mécanismes.

## 10 Cascade électromagnétique

Nous avons vu que lorsqu'un photon interagit avec la matière, il va, à haute énergie, créer une paire électron-positon, chaque particule d'énergie moindre que celle du photon incident va émettre un photon de haute énergie l'électron conservant une partie de son énergie. Ces particules vont de nouveau interagir. Il se développe alors une cascade de particules de moins en moins énergétiques.

Nous avons vu qu'à haute énergie le processus d'interaction photon-matière dominant est la création de paire et que le processus dominant d'interaction électron-matière est le bremsstrahlung. Nous avons vu que ces deux phénomènes ont une longueur de radiation identique. Une modélisation simple du phénomène de cascade peut se faire comme indiqué sur la figure ci-dessous

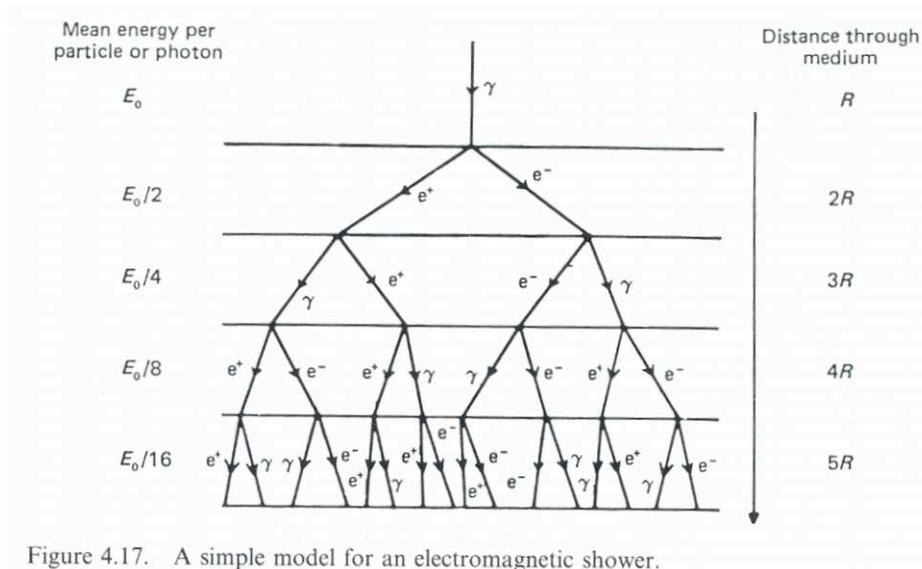


Figure 4.17. A simple model for an electromagnetic shower.

A chaque longueur de radiation, l'énergie moyenne des particules est divisée par 2, le nombre de particules étant lui multiplié par 2.

Lorsque l'énergie des particules devient inférieure à l'énergie critique  $E_c$  les électrons perdent alors leur énergie par ionisation, la création de particules s'arrête, la cascade de particules entre dans sa phase d'absorption.

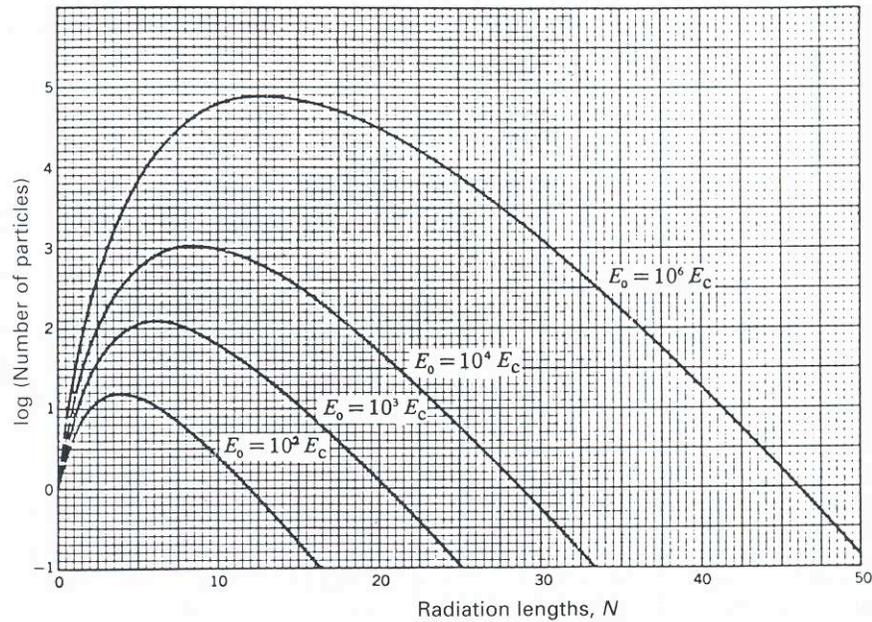


Figure 4.18. The total number of particles in a shower initiated by an electron of energy  $E_0$  as a function of depth through the medium measured in radiation lengths  $N$ ;  $E_c$  is the critical energy. (From B. Rossi and K. Greisen (1941). *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240.)

## 11 Gerbes hadroniques

L'interaction des hadrons ou des noyaux cosmiques avec la matière va elle aussi donner lieu au développement d'une gerbe de particules. Les particules secondaires de l'interaction sont essentiellement des pions  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  et  $\pi^0$ , des kaons  $K^+$  et  $K^-$ . Nous avons vu que les  $\pi^0$  allaient décroître en deux photons, donnant ainsi naissance à une cascade électromagnétique, les  $\pi^\pm$  vont pouvoir de nouveau interagir avec les noyaux du milieu donnant de nouveau secondaire constituant la composante hadronique de la gerbe. Ils peuvent aussi décroître en  $\mu^\pm$  accompagnés d'un neutrino donnant ainsi naissance à la composante muonique de la gerbe.

## 12 Rayonnement Cerenkov

Il est ici important de mentionner un autre phénomène associé au développement de la gerbe et qui revêt une importance capitale dans la détection des gerbes se développant dans l'atmosphère. Il s'agit de l'*effet Cerenkov*. Quand une particule traverse un milieu avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans celui-ci, elle émet du rayonnement Cerenkov.

L'émission Cerenkov associe deux phénomènes, le premier est l'émission d'une particule chargée se déplaçant dans un milieu, l'autre a trait à la cohérence du phénomène.

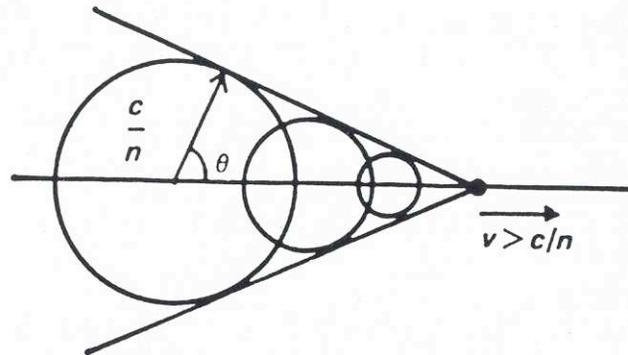


Figure 4.19. Illustrating Huygens' construction for determining the direction of propagation of the wavefront of Cherenkov radiation.

Géométriquement, le rayonnement Cerenkov peut être interprété comme une onde de choc derrière la particule alors que celle-ci se déplace dans le milieu à une vitesse superluminique. L'angle d'émission peut alors être très simplement écrit :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta}$$

Cette expression permet de comprendre qu'il existe pour la particule chargée une vitesse limite en deçà de laquelle il ne peut y avoir d'émission cohérente.

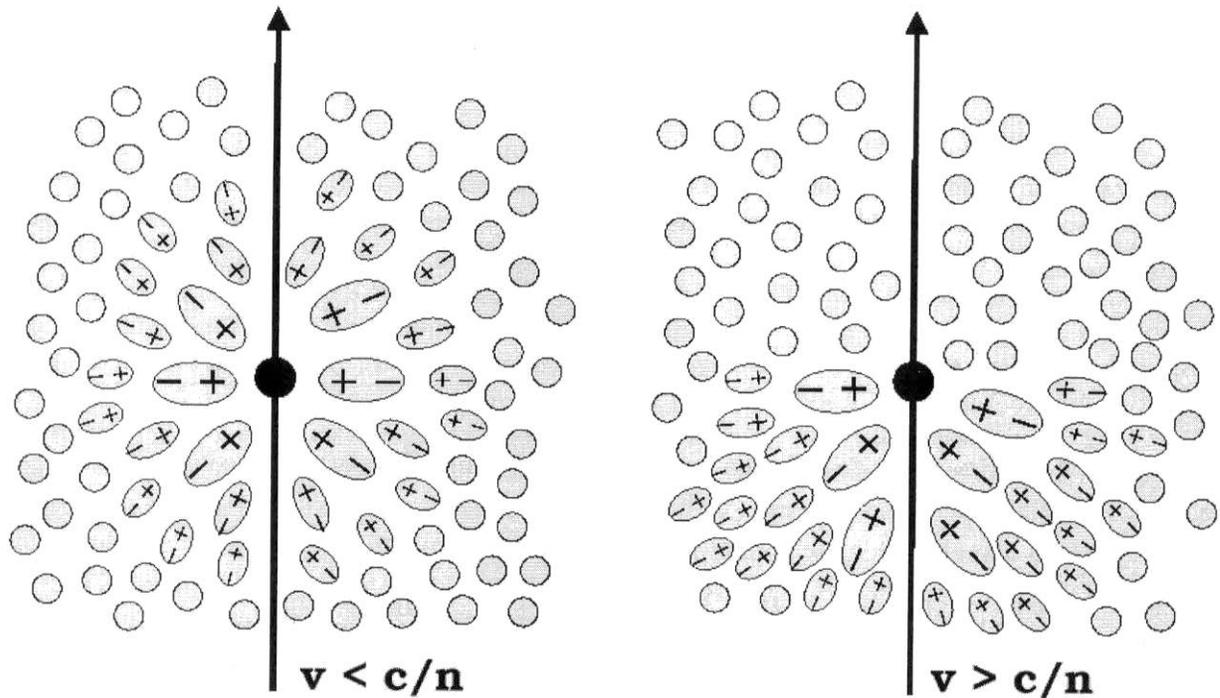
$$\beta = \frac{1}{n}$$

On peut voir qu'il existe un angle limite d'émission pour les particules ultra relativistes donné par

$$\cos \theta_{max} = \frac{1}{n}$$

## 12.1 Processus d'émission

Nous ne détaillerons pas ici le processus d'émission, il faut cependant noter qu'il n'a rien à voir avec le bremsstrahlung qui est le rayonnement associé à une particule accélérée dans le champ électrostatique des noyaux. Dans le cas du Cerenkov, les photons sont émis par le milieu sous l'action du champ électrique de la particule.



Lorsqu'une particule chargée traverse le milieu, elle polarise les molécules environnantes. Dans le cas où la vitesse est inférieure à la vitesse de la lumière, cette polarisation est symétrique et la résultante macroscopique des champs est nulle. Dans le cas où la vitesse est supérieure à celle de la lumière, un retard de polarisation apparaît conduisant à une résultante non nulle du champ à l'origine de l'émission Cerenkov

Le nombre de photons émis par une particule de charge  $ze$  par unité de longueur  $dx$  et par intervalle de longueur d'onde  $d\lambda$  dans le milieu d'indice  $n(\lambda)$  est donné par

$$\frac{dN}{d\lambda dx} = \frac{2\pi\alpha z^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)} \right) = \frac{2\pi\alpha z^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta$$